مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ على منحنيات ديني الملساء

الدكتور محمد علي[1]
الدكتور حسن بدور[2]
نور دهمان[3]

(تاريخ الإيداع 11 / 7 / 2018. قُبِل للنشر في 16 / 9 /2018)

ملخّص

درسنا في هذا البحث بعض الخواص الجديدة التي يتمتع بها معامل الملوسة الكسري المُعرّف من قبل الباحث Akgun عام 2011. ومن ثم بحثنا المسألة المباشرة في نظرية التقريب للدوال العقدية من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ على أسرة منحنيات ديني الملساء إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود فابير باستخدام معامل الملوسة الكسري، وتوصلنا إلى تقريب الدوال التحليلية في صف سميرنوف ذو الأس المتغير $E^{p(.)}(G)$ باستخدام معامل الملوسة الكسري في الحالة التي يكون فيها المحيط منحني ديني أملس. وتجدر الإشارة إلى أنّه في عام 2016، توصل كل من الباحثين Israfilov وTestici إلى دراسة المسألة المباشرة لتقريب الدوال في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ على أسرة منحنيات ديني الملساء باستخدام معامل ملوسة معرّف بالعلاقة التالية:

$$\Omega_{p(.)}(f,\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\left\|f(.)-\frac{1}{h}\int_0^h f(we^{it})\,dt\right\|_{L^{p(.)}(T)} \quad ;\ \delta\ge 0 .$$

الكلمات المفتاحية: فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير – صف سميرنوف ذو الأس المتغير – منحنيات ديني الملساء– كثيرات حدود فابير – معامل الملوسة الكسري.

[1] أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
[2] أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
[3] طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

Approximation of complex functions from Lebesgue space with variable exponent $L^{p(.)}(\Gamma)$ on Dini smooth curves

Dr. Mohammad Ali[1]
Dr. Hasan Baddour[2]
Nour Dahman[3]

(Received 11 / 7 / 2018. Accepted 16 / 9 /2018)

□ ABSTRACT □

In this research, we have studied some of the new properties of the fractional modulus of smoothness defined by the researcher Akgun in 2011. Then we have investigated the direct problem of approximation theory of complex functions from Lebesgue spaces with variable exponent $L^{p(.)}(\Gamma)$ on Dini smooth curves by rational functions related to Faber polynomials using fractional modulus of smoothness. We have obtained approximation of analytic functions from Smirnov class with variable exponent $E^{p(.)}(G)$ on a simply connected domain G bounded by Dini smooth curve using fractional modulus of smoothness. It should be noted that in 2016, both researchers Israfilov and Testici studied approximation of functions from $L^{p(.)}(\Gamma)$ on Dini smooth curves using modulus of smoothness identifier with the following relation:

$$\Omega_{p(.)}(f,\delta) = \sup_{0<h\leq\delta} \left\| f(.) - \frac{1}{h}\int_0^h f(we^{it})\,dt \right\|_{L^{p(.)}(T)} \;;\delta \geq 0 .$$

Keywords: Lebesgue Space with variable exponent, Smirnov class with variable exponent, Dini Smooth curves, Faber Polynomials, fractional modulus of smoothness.

[1]**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[2]**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[3]**Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

اهتم العديد من الباحثين بدراسة تقريب صفوف داليّة متنوعة. ففي عام 1885 برهن الباحث Chebyshev على صحة نظرية Weierstrass التي تنص بأنّ: " كل دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود يمكن تقريبها بكثيرة حدود" ، وفي عام 1950 توصل الباحث Mergelyan إلى أن :" يمكن تقريب الدوال العقدية التحليلية في منطقة ما؛ ولتكن G؛ والمستمرة على المحيط إذا وفقط إذا كانت متممة المنطقة G مترابطة و $\infty \in G^c$".

في العام 2016 دُرست المسألة المباشرة لتقريب دوال الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ إلى دوال كسرية على أسرة منحنيات ديني الملساء من قبل الباحثين Israfilov و Testici باستخدام معامل الملوسة المعرف بالعلاقة الآتية [8]:

$$\Omega_{p(.)}(f,\delta) = \sup_{0<h\leq\delta} \left\| f(.) - \frac{1}{h}\int_0^h f(we^{it})\,dt \right\|_{L^{p(.)}(T)} \quad ;\delta \geq 0 \ .$$

وفي عام 2017 توصل كلٌ من الباحثين محمد علي وسليمان محمود وأحمد كنج إلى دراسة المسألة المباشرة لتقريب دوال الصف $E^{p(.)}(G)$ المُعرّفة على منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيين ديني أملسين إلى دوال كسرية [3].

كما و درس الباحث Jafarov المسألة المباشرة لتقريب دوال الصف $E_w^{p(.)}(G)$ الموزن بأوزان ماكنهوبت إلى مجاميع فيجر و آبل– بواسون لسلسلة فابير وذلك في الحالة التي يكون فيها المحيط منحني ديني أملس [9].

دراسات مشابهة تم فيها تقريب صف دوال موري سميرنوف في [4,5].

قمنا في هذا البحث بدراسة مسألة تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود فابير على أسرة منحنيات ديني الملساء وذلك باستخدام معامل الملوسة الكسري.

نشير في البداية إلى أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث ... $c, c_1, c_2,$ جميعها موجبة ومختلفة ولا تؤثر على دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه:

يملك هذا البحث أهمية في نظرية تقريب الدوال العقدية، فمن خلال معرفة الأسرة التي تنتمي إليها الدالة العقدية يمكننا إيجاد كثيرة حدود أو دالة كسرية قريبة منها بدرجة كافية، أما هدف البحث فيكمن في دراسة تقريب صف دوال ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ إلى دوال كسرية على أسرة منحنيات ديني الملساء وذلك باستخدام معامل الملوسة الكسري.

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي ونظرية الدوال لذلك فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية، وتعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

أ) ليكن Γ منحني جوردان ذو طول محدود يقسم المستوي العقدي $\mathbb{C}$ إلى قسمين منفصلين نرمز لهما بالشكل $G := \text{int}\,\Gamma$ و $G^- := \text{ext}\,\Gamma$. نفرض؛ دون المساس بعمومية المسألة؛ أن $0 \in G$.

ب) لتكن $T := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ دائرة الوحدة، عندئذ $D := \text{int}\,T$ و $D^- := \text{ext}\,T$.

ت) نرمز بالرمز $w = \varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- محققة العلاقتين التاليتين:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0\,,\varphi(\infty)=\infty$$

ولنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

ث) نرمز بالرمز $w=\varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- محققة العلاقتين التاليتين:

$$\lim_{z\to 0} z\,\varphi_1(z)>0\,,\varphi_1(0)=\infty$$

ولنرمز بـ ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1.

<u>تعريف 1</u> فضاء ليبيغ (الكلاسيكي) $L^p(\Gamma)$ $(1\le p<\infty)$ [7]: يُقال عن الدالة القيوسة $f:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ إنها تنتمي إلى فضاء دوال ليبيغ (الكلاسيكي) $L^p(\Gamma)$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\int_\Gamma |f(z)|^p\,|dz|<\infty$$

وكما هو معلوم أن فضاء ليبيغ (الكلاسيكي) يشكل فضاء باناخ، إذا عرِّف عليه النظيم الآتي [7]:

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)}:=\left(\int_\Gamma |f(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>تعريف 2</u> صف سميرنوف (الكلاسيكي) $E^p(G)$ $(1\le p<\infty)$[7]: يُقال عن الدالة التحليلية في المنطقة G إنها تنتمي إلى صف سميرنوف $E^p(G)$ إذا حققت العلاقة الآتية:

$$\sup_{0\le r<1}\int_{\Gamma_r}|f(z)|^p\,|dz|<\infty$$

حيث أن Γ_r هو صورة الدائرة $\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}$ وفق التحويل الذي ينقل بشكل محافظ D إلى G.

يعرّف النظيم على الصف $E^p(G)$ بالعلاقة التالية [7]: $\|f\|_{E^p(G)}:=\|f\|_{L^p(\Gamma)}$

<u>تعريف 3</u> فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{P(.)}(\Gamma)$ [6]: لتكن $p(.):\Gamma\longrightarrow[1,\infty)$ دالة قيوسة تحقق الشرط التالي: $1\le p_-:=\operatorname*{ess\,inf}_{z\in\Gamma}p(z)\le\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Gamma}p(z):=p_+<\infty$

يُرمز بالرمز $L^{P(.)}(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال القيوسة $f:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ المحققة للعلاقة التالية:

$$\int_\Gamma |f(z)|^{p(z)}\,|dz|<\infty$$

يُعرّف النظيم على الفضاء $L^{P(.)}(\Gamma)$ بالشكل الآتي [6]:

$$\|f\|_{L^{P(.)}(\Gamma)}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Gamma\left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)}|dz|\le 1\right\}$$

في الحالة الخاصة، إذا كانت $p(.)$ دالة ثابتة أي إذا كانت $p(.)=p;\,1\le p<\infty$، فإننا نحصل على فضاء ليبيغ (الكلاسيكي).

<u>تعريف 4</u> صف سميرنوف ذو الأس المتغير $E^{p(.)}(G)$ [8]: يُعرّف صف سميرنوف ذو الأس المتغير $E^{p(.)}(G)$ بالشكل الآتي:

$$E^{p(.)}(G):=\left\{f\in E^1(G):f\in L^{p(.)}(\Gamma)\right\}$$

وكما هو معلوم أنَّ النظيم على الصف $E^{p(.)}(G)$ يُعرّف بالعلاقة التالية [8]:

$$\|f\|_{E^{p(.)}(G)}:=\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

في الحالة الخاصة، إذا كانت $p(.)$ دالة ثابتة أي إذا كانت $p(.)=p\;;1\le p<\infty$، فإننا نحصل على صف سميرنوف (الكلاسيكي).

<u>تعريف 5</u> الصف $P_{DL}(\Gamma)$: نرمز بالرمز $P_{DL}(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال القيوسة $p(.):\Gamma\longrightarrow(1,\infty)$ التي تحقق العلاقتين التاليتين:

1. $1<p_-\le p_+<\infty$

2. $\sup_{z_1,z_2\in\Gamma}\{|p(z_1)-p(z_2)| : |z_1-z_2|\le\delta\}\ln\frac{1}{\delta}\le c_1 \;;\; 0<\delta<1$

تعريف 6 منحني ديني الأملس [1]: لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$ معامل استمراريتها معرّف بالعلاقة:

$$w(h,t)=\sup_{|t_1-t_2|\le t}|h(t_1)-h(t_2)|$$

يُقال عن الدالة h إنها دالة ديني− مستمرة إذا حققت الشرط الآتي: $\int_0^{\pi}\frac{w(h,t)}{t}\,dt<\infty$

ويُقال عن المنحني Γ إنه منحني ديني أملس إذا كان له التمثيل $z=z(\tau)\;;\;0\le\tau\le 2\pi$، وكانت الدالة $z'(\tau)$ دالة ديني− مستمرة وتحقق الشرط $z'(\tau)\ne 0$ لكل $\tau\in[0,2\pi]$.

تعريف 7 تكامل كوشي الشاذ Cauchy singular integral [8]:يُعرف تكامل كوشي الشاذ للدالة القيوسة $f:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ بالعلاقة الآتية: $S_\Gamma f(z):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\;;\;z\in\Gamma$

حيث $\Gamma(z,\varepsilon):=\{\xi\in\Gamma:|\xi-z|<\varepsilon\}$.

تعريف 8 كثيرات حدود فابير [1]: تُعرّف كثيرات حدود فابير $F_k(z)$ من الدرجة k: بأنها مجموع الحدود ذات القوى غير السالبة في منشور لوران للدالة $\varphi^k(z)$ في جوار اللانهاية $z=\infty$.

ومن المعلوم أنه يمكن تمثيل كثيرات حدود فابير بالشكل التكاملي الآتي [8]:

$$F_k(z)=\varphi^k(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi^k(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\;;z\in G^- \quad (1)$$

$$\widetilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi_1^k(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_1^k(\xi)}{\xi-z}\,d\xi;z\in G \quad (2)$$

مبرهنة مساعدة 1[11]: إذا كانت $p(.),q(.):\Gamma\longrightarrow[1,\infty)$ دالتان قيوستان (قيم كل منها أعداد حقيقية) تحققان العلاقة التالية:

$$1\le p_-\le p(z)\le q(z)\le q_+<\infty$$

فإن:

$$L^{q_+}(\Gamma)\subset L^{q(.)}(\Gamma)\subset L^{p(.)}(\Gamma)\subset L^{p_-}(\Gamma)\subset L^1(\Gamma)$$

مبرهنة مساعدة 2 [10]: إذا كان Γ منحني ديني أملس و $p(.)\in P_{DL}(\Gamma)$، فإن تكامل كوشي الشاذ محدود في الفضاء $L^{P(.)}(\Gamma)$. أي يوجد ثابت موجب c_2 بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$\|S_\Gamma f\|_{L^{P(.)}(\Gamma)}\le c_2\,\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \qquad \forall f\in L^{p(.)}(\Gamma) \quad (3)$$

مبرهنة مساعدة 3 [1]: إذا كانت $f\in L^1(\Gamma)$، عندئذ لتكامل نوع كوشي قيمتين حدوديتين من جهتي المنحنيΓ نرمز لهما بالرمز f^+،f^- وهما تحليليتان في G و G^- على الترتيب ومستمرتان علىΓ. كما وترتبطان مع الدالة f على المنحني Γ من خلال علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\left.\begin{aligned} f^+(z) &:= S_\Gamma f(z)+\frac{1}{2}f(z)\\ f^-(z) &:= S_\Gamma f(z)-\frac{1}{2}f(z)\\ f(z) &:= f^+(z)-f^-(z)\end{aligned}\right\}\;\ldots..(4)$$

مبرهنة مساعدة 4 [8]: ليكن Γ منحني ديني أملس. إذا كانت $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.)\in P_{DL}(\Gamma)$ فإن: $f^+\in E^{p(.)}(G)$ و $f^-\in E^{p(.)}(G^-)$.

مبرهنة مساعدة 5 [8]: إذا كان Γ منحني ديني أملس، عندئذ فإن:

1. $p(z)\in P_{DL}(\Gamma)\Leftrightarrow p_0(w)=p(\psi(w))\in P_{DL}(T)\Leftrightarrow p_1(w)=p(\psi_1(w))\in P_{DL}(T)$
2. $f(z)\in L^{p(.)}(\Gamma)\Leftrightarrow$ $f_0(w)=f(\psi(w))\in L^{p_0(.)}(T)\Leftrightarrow f_1(w)=f(\psi_1(w))\in L^{p_1(.)}(T)$

تعريف 9: مؤثر ستيكلوف Steklov's mean operator [2]: لتكن $f \in L^{p(.)}(T)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(T)$.يعرّف مؤثر ستيكلوف بالعلاقة التالية [2]:

$$\sigma_h f(w) = \frac{1}{h}\int_0^h f(we^{it})\,dt \quad ; 0 < h < \pi, w \in T$$

عرّف الباحث Akgun المؤثر $\sigma_h^\alpha f(w)$ حيث $0 \le \alpha < 1$ بالعلاقة التالية [2]:

$$\sigma_h^\alpha f(w) = (I - \sigma_h)^\alpha f(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k} \sigma_h^k f(w)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{1}{h^k}\int_0^h \dots \int_0^h f\left(we^{i(t_1+t_2+\dots+t_k)}\right) dt_1\, dt_2 \dots dt_k$$

حيث I المؤثر المطابق و $k > 1$ $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ و $\binom{\alpha}{0} = 1$ و $\binom{\alpha}{1} = \alpha$.

إن المؤثر $\sigma_h^\alpha f$ محدود في الفضاء $L^{p(.)}(T)$ أي يوجد ثابت موجب c_3 بحيث تتحقق المتراجحة التالية [2]:

$$\|\sigma_h^\alpha f\|_{L^{p(.)}(T)} \le c_3 \|f\|_{L^{p(.)}(T)}$$

تعريف 10: معامل الملوسة الكسري في الفضاء $L^{p(.)}(T)$ [2]: لتكن $r \in \mathbb{R}^+$. عرّف الباحث Akgun معامل الملوسة الكسري للدالة $f \in L^{p(.)}(T)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(T)$، بالعلاقة التالية:

$$\Omega_{r,p(.)}(f,\delta) = \sup_{0\le h_i, h\le\delta}\left\|\prod_{i=1}^{[r]}(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right\|_{L^{p(.)}(T)} ; \delta \ge 0$$

حيث $\Omega_{0,p(.)}(f,\delta) = \|f\|_{L^{p(.)}(T)}$ و $\prod_{i=1}^{0}(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^r f = \sigma_h^r(f) \quad ; 0 < r < 1$ و

$$[r] = \max\{y \in \mathbb{Z}: y \le r\}$$

و من أجل كل $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ فإننا نعرف معاملات الملوسة الكسرية في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$ بالعلاقتين التاليتين:

$$\omega_{r,p(.)}(f,\delta) = \Omega_{r,p_0(.)}(f_0,\delta) \quad (5)$$

$$\widetilde{\omega}_{r,p(.)}(f,\delta) = \Omega_{r,p_1(.)}(f_1,\delta) \quad (6)$$

يتمتع معامل الملوسة الكسري $\Omega_{r,p(.)}(f,\delta)$ حيث $r \in \mathbb{R}^+$ بالخواص التالية [2]:

1. $\Omega_{r,p(.)}(f,.)$ دالة غير سالبة وغير متناقصة على المجال $[0,\infty[$.
2. $\Omega_{r,p(.)}(f_1 + f_2,.) \le \Omega_{r,p(.)}(f_1,.) + \Omega_{r,p(.)}(f_2,.)$.
3. $\lim_{\delta\to 0}\Omega_{r,p(.)}(f,\delta) = 0$.
4. $\Omega_{r,p(.)}(f,\delta) \le c_4 \|f\|_{L^{p(.)}(T)}$.
5. لتكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$، إذا كانت $0 < \alpha < \beta$ فإنّ: $\Omega_{\beta,p(.)}(f,.) \le c_5\ \Omega_{\alpha,p(.)}(f,.)$.

مبرهنة مساعدة 6 [2]: لتكن $f \in E^{p(.)}(D)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(T)$. إذا كان $\sum_{k=0}^{n} a_k w^k$ مجموع أول n حد من سلسلة ماك لوران للدالة f فإن:

$$\left\|f(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right\|_{L^{p(.)}(T)} \le c_8\ \Omega_{r,p(.)}\left(f,\frac{c}{n+1}\right)$$

النتائج والمناقشة:

تبين المبرهنتان التاليتان بعض خواص معامل الملوسة الكسري في الفضاء $L^{p(.)}(T)$.

مبرهنة 1: إذا كانت $f \in L^{p(.)}(T)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(T)$ و $r \in \mathbb{R}^+$ فإن:

$$\Omega_{r,p(.)}(S_T f,.) \le c_6\, \Omega_{r,p(.)}(f,.)$$

البرهان: لتكن $w \in T$ و $0 < h < \pi$ لنبرهن بالاستقراء الرياضي أن:

$$\sigma_h^k(S_T f)(w) = S_T\big(\sigma_h^k f\big)(w) \quad ; k = 1,2,\dots \quad (7)$$

لدينا من أجل $k = 1$ [8]:

$$\sigma_h(S_T f)(w) = S_T(\sigma_h f)(w) \quad (8)$$

لنفرض أن العلاقة (8) صحيحة من أجل $k = m$، أي:

$$\sigma_h^m(S_T f)(w) = S_T(\sigma_h^m f)(w) \quad (9)$$

ولنبرهن على صحتها من أجل $k = m + 1$ وذلك اعتماداً على العلاقتين (8) و (9)

$$\sigma_h^{m+1}(S_T f)(w) = \sigma_h\big(\sigma_h^m(S_T f)\big)(w) = \sigma_h\big(S_T(\sigma_h^m f)\big)(w)$$
$$= S_T\big(\sigma_h(\sigma_h^m f)\big)(w) = S_T\big(\sigma_h^{m+1} f\big)(w)$$

لتكن $0 \le \alpha < 1$، وبالاستفادة من (7) نجد:

$$\sigma_h^\alpha(S_T f)(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k}\sigma_h^k(S_T f)(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k} S_T\big(\sigma_h^k f\big)(w)$$
$$= S_T\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k}\sigma_h^k f\right)(w) = S_T(\sigma_h^\alpha f)(w)$$

ومنه نجد: $\sigma_h^\alpha(S_T f)(w) = S_T(\sigma_h^\alpha f)(w) \quad ; 0 \le \alpha < 1$

وبالتالي انطلاقاً من العلاقة السابقة ينتج لدينا:

$$\prod_{i=1}^{[r]}(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]}(S_T f)(w) = \prod_{i=1}^{[r]}\left(\sigma_h^{r-[r]}(S_T f)(w) - \sigma_{h_i}\left(\sigma_h^{r-[r]}(S_T f)\right)(w)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{[r]}\left(S_T\left(\sigma_h^{r-[r]} f\right)(w) - \sigma_{h_i}\left(S_T\left(\sigma_h^{r-[r]} f\right)\right)(w)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{[r]}\left(S_T\left(\sigma_h^{r-[r]} f\right)(w) - S_T\left(\sigma_{h_i}\left(\sigma_h^{r-[r]} f\right)\right)(w)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{[r]} S_T\left(\sigma_h^{r-[r]} f - \sigma_{h_i}\left(\sigma_h^{r-[r]} f\right)\right)(w) = \prod_{i=1}^{[r]} S_T\left((I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right)(w)$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L^{p(.)}(T)$ لطرفي العلاقة السابقة وبالاستفادة من محدودية مؤثر كوشي الشاذ في الفضاء $L^{p(.)}(T)$ نحصل على:

$$\left\|\prod_{i=1}^{[r]}(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]}(S_T f)\right\|_{L^{p(.)}(T)} = \left\|\prod_{i=1}^{[r]} S_T\left((I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right)\right\|_{L^{p(.)}(T)}$$
$$= \prod_{i=1}^{[r]}\left\|S_T\left((I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right)\right\|_{L^{p(.)}(T)} \le c_2^{[r]}\prod_{i=1}^{[r]}\left\|(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right\|_{L^{p(.)}(T)}$$
$$= c_2^{[r]}\left\|\prod_{i=1}^{[r]}(I - \sigma_{h_i})\sigma_h^{r-[r]} f\right\|_{L^{p(.)}(T)}$$

وبالتالي: $\Omega_{r,p(.)}(S_T f,.) \le c_6\, \Omega_{r,p(.)}(f,.)$ ■

مبرهنة 2: إذا كانت $f \in L^{p(.)}(T)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(T)$ و $r \in \mathbb{R}^+$ فإن:

$$\Omega_{r,p(.)}(f^+,.) \le c_7\, \Omega_{r,p(.)}(f,.)$$

البرهان: بما أن $f \in L^{p(.)}(T)$ وبالتالي حسب المبرهنة 1 فإن $f \in L^1(T)$ ومن العلاقة 4 نجد:

$$f^+(z) = S_T f(z) + \frac{1}{2} f(z)$$

$$\Omega_{r,p(.)}(f^+,.) = \Omega_{r,p(.)}\left(S_T f(z) + \tfrac{1}{2} f(z),.\right) \le \Omega_{r,p(.)}(S_T f(z),.) + \Omega_{r,p(.)}\left(\tfrac{1}{2} f(z),.\right)$$

وبالاعتماد على المبرهنة 1 نحصل على:

$$\Omega_{r,p(.)}(f^+,.) \le c_6\, \Omega_{r,p(.)}(f,.) + \frac{1}{2^{[r]}}\, \Omega_{r,p(.)}(f,.) \le c_7\, \Omega_{r,p(.)}(f,.) \quad \blacksquare$$

ملاحظة: من علاقات سوخوتسكي وجدنا أنَّ $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ وبالتالي يكفي من أجل تقريب الدالة f على المنحنيΓ أن يتم تقريب الدالتين f^+ و f^- على G و G^- على الترتيب.

نقوم في المبرهنة التالية بتقريب الدالة f^+ إلى كثيرة حدود جبرية بقوى z ولتكن $\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$.

مبرهنة 3: إذا كان Γ منحني ديني أملس فإنه من أجل كل دالة $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$ ومن أجل كل عدد_طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_{10} بحيث:

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) \right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{10}\, \omega_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right)$$

حيث $F_k(z)$ كثيرات حدود فابير، والأمثال a_k تعطى بالعلاقة التالية:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(w)}{w^{k+1}} dw$$

البرهان: بما أن $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ وبالتالي حسب المبرهنة المساعدة 5 فإن $f_0 \in L^{p_0(.)}(T)$ ومنه $f_0 \in L^1(T)$

وذلك حسب المبرهنة المساعدة 1 وبالاعتماد على علاقات سوخوتسكي: $f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w)$

وبتعويض $z = \psi(w)$ في العلاقة السابقة نجد:

$$f(z) = f_0^+(\varphi(z)) - f_0^-(\varphi(z)) \quad (10)$$

لتكن $\alpha \in G^-$ نقطة كيفية، وباستخدام العلاقتين (1) و (10) ينتج:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_0^+(\varphi(\xi)) - f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - \alpha} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi - \alpha} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - \alpha} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi \quad (11)$$

وبما أن $f_0^-(\varphi(\xi))$ دالة تحليلية في G^- و $\alpha \in G^-$ فإن:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - \alpha} d\xi = -f_0^-(\varphi(\alpha)) \quad (12)$$

وبما أن f^+ و f^- دالتين تحليليتين في G و G^- على الترتيب و $\alpha \in G^-$، فإن:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f^-(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi = 0 + f^-(\alpha) = f^-(\alpha) \qquad (13)$$

وبتعويض العلاقتين (12) و (13) في العلاقة (11) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi - \alpha} d\xi - f_0^-(\varphi(\alpha)) + f^-(\alpha)$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $\alpha \to z \in \Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من العلاقة (4) نجد

أن:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right) - f_0^-(\varphi(z)) + f^-(z)$$

من العلاقة السابقة وبالاستفادة من العلاقتين (4) و(10) يكون:

$$f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right) + f_0^-(\varphi(z)) - f^-(z)$$
$$= f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right) + f_0^-(\varphi(z))$$
$$= f_0^+(\varphi(z)) - f_0^-(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right) + f_0^-(\varphi(z))$$
$$f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \frac{1}{2}\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right) + S_\Gamma\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right)$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ لطرفي العلاقة السابقة وبالاستفادة من العلاقة (3) يصبح لدينا:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le \frac{1}{2}\left\|f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} + \left\|S_\Gamma\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + c_2\right)\left\|f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

بالتعويض $w = \varphi(z)$ في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_9 \left\|f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right\|_{L^{p_0(.)}(T)}$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة 6 والمبرهنة 2 ينتج:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_9\, c_8\, \Omega_{r,p_0(.)}\left(f_0^+, \frac{c}{n+1}\right)$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_9\, c_8\, c_7\, \Omega_{r,p_0(.)}\left(f_0, \frac{c}{n+1}\right)$$

بالاعتماد على العلاقة (5) وبوضع $c_{10} = \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_9\, c_8\, c_7$ نحصل على:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{10}\, \omega_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right) \quad \blacksquare$$

نقوم في المبرهنة التالية بتقريب الدالة f^- إلى كثيرة حدود جبرية بقوى $\frac{1}{z}$ ولتكن $\sum_{k=1}^{n} -\tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$.

<u>مبرهنة 4</u>: إذا كانΓ منحني ديني أملس فإنه من أجل كل دالة $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$، ومن أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_{12} بحيث:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{12}\,\tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f,\frac{c}{n+1}\right)$$

حيث $\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ كثيرات حدود فابير بقوى $\frac{1}{z}$ ، والأمثال $\tilde{a}_k$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{a}_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw$$

البرهان: بما أن $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$ وبالتالي حسب المبرهنة المساعدة 5 فإن $f_1\in L^{p_1(.)}(T)$ ومنه $f_1\in L^{1}(T)$

وذلك حسب المبرهنة المساعدة 1 وبالاعتماد على علاقات سوخوتسكي: $f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)$

وبتعويض $z=\psi_1(w)$ في العلاقة السابقة نجد:

$$f(z)=f_1^{+}(\varphi_1(z))-f_1^{-}(\varphi_1(z)) \quad (14)$$

لتكن $\beta\in G$ نقطة كيفية، وباستخدام العلاقتين (2) و(14) ينتج:

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{\beta}\right)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\beta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\xi)}{\xi-\beta}\,d\xi$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\beta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\xi)}{\xi-\beta}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^{+}(\varphi_1(\xi))-f_1^{-}(\varphi_1(\xi))}{\xi-\beta}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-\beta}d\xi$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\beta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^{+}(\varphi_1(\xi))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\xi)}{\xi-\beta}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^{-}(\varphi_1(\xi))}{\xi-\beta}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-\beta}d\xi \quad (15)$$

وبما أن $f_1^{-}(\varphi_1(\xi))$ دالة تحليلية في G و$\beta\in G$ فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^{-}(\varphi_1(\xi))}{\xi-\beta}d\xi=f_1^{-}(\varphi_1(\beta)) \quad (16)$$

وبما أن f^{+} و f^{-} دالتين تحليليتين في G و G^{-} على الترتيب و$\beta\in G$، فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-\beta}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f^{+}(\xi)}{\xi-\beta}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f^{-}(\xi)}{\xi-\beta}d\xi=f^{+}(\beta)-0=f^{+}(\beta) \qquad (17)$$

وبتعويض العلاقتين (16) و(17) في العلاقة (15) نحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{\beta}\right)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\beta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^{+}(\varphi_1(\xi))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(\xi)}{\xi-\beta}\,d\xi-f_1^{-}\left(\varphi_1(\beta)\right)-f^{+}(\beta)$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $\beta\to z\in\Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من العلاقة (4) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)+S_{\Gamma}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)-f_1^{-}(\varphi_1(z))-f^{+}(z)$$

من العلاقة السابقة وبالاستفادة من العلاقتين (4) و (14) يكون:

$$f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)+S_{\Gamma}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)-f_1^{-}(\varphi_1(z))-f^{+}(z)$$
$$=-f(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)+S_{\Gamma}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_1^{+}(\varphi_1(z))-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\,\varphi_1^{k}(z)\right)-f_1^{-}(\varphi_1(z))$$

$$= -\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - f_1^-(\varphi_1(z))\right) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z) + S_\Gamma\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right) - f_1^-(\varphi_1(z))$$
$$f^-(z) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right) + S_\Gamma\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right)$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ لطرفي العلاقة السابقة وبالاستفادة من العلاقة (3) يصبح لدينا:

$$\left\|f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le \frac{1}{2}\left\|f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} + \left\|S_\Gamma\left(f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + c_2\right)\left\|f_1^+(\varphi_1(z)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, \varphi_1^k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

بالتعويض $w = \varphi_1(z)$ في العلاقة الآخيرة نجد:

$$\left\|f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_{11}\left\|f_1^+(w) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\, w^k\right\|_{L^{p_1(.)}(T)}$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة 6 والمبرهنة 2 ينتج:

$$\left\|f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p_+}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_{11} c_8\ \Omega_{r,p_1(.)}\left(f_1^+, \frac{c}{n+1}\right)$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_{11} c_8\, c_7\, \Omega_{r,p_1(.)}\left(f_1, \frac{c}{n+1}\right)$$

بالاعتماد على العلاقة (6) وبوضع $c_{12} = \left(\frac{1}{2} + c_2\right) c_{11}\, c_8\, c_7$ نحصل على:

$$\left\|f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{12}\, \tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right) \quad \blacksquare$$

سنعرض الآن المبرهنة الرئيسة في هذا البحث التي تختص بتقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير إلى دوال كسرية على منحنيات ديني الملساء باستخدام معامل الملوسة الكسري.

مبرهنة 5: إذا كان Γ منحني ديني أملس فإنه من أجل كل دالة $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$، ومن أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_{13} ودالة كسرية $R_n(z,f)$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\|f - R_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{13}\left(\omega_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right) + \tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right)\right)$$

البرهان: بوضع $R_n(z,f) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$، وباستخدام العلاقة:

$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ ، وبالاستفادة من المبرهنتين 3 و 4 ينتج لدينا:

$$\|f - R_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le \left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, F_k(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} + \left\|f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le c_{10}\, \omega_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right) + c_{12}\, \tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right)$$

بوضع $c_{13} = \max\{c_{10}, c_{12}\}$ نجد:

$$\|f - R_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_{13}\left(\omega_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right) + \tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f, \frac{c}{n+1}\right)\right) \blacksquare$$

سنعرض فيما يلي أهم نتائج المبرهنة الرئيسة 5 في تقريب دوال الفضائين $E^{p(.)}(G)$ و $E^{p(.)}(G^-)$ على الترتيب.

مبرهنة 6: إذا كان Γ منحني ديني أملس فإنه من أجل كل دالة $f \in E^{p(.)}(G)$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$، ومن أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_{10} بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\left\|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k\, F_k(z)\right\|_{E^{p(.)}(G)} \leq c_{10}\, \omega_{r,p(.)}\left(f,\frac{c}{n+1}\right)$$

البرهان: بما أن $f \in E^{p(.)}(G)$، ومن تعريف الصف $E^{p(.)}(G)$ فإن $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$، ومنه $f \in L^{1}(\Gamma)$ وذلك حسب المبرهنة المساعدة1. من علاقات سوخوتسكي: $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$.

وبما أن f تحليلي في G و $z \in G^{-}$ يكون: $f^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0$

أي أن $f(z)=f^{+}(z)$ وبالتالي حسب المبرهنة 3 نحصل على المطلوب.■

مبرهنة 7: إذا كان Γ منحني ديني أملس فإنه من أجل كل دالة $f \in E^{p(.)}(G^{-})$ حيث $p(.) \in P_{DL}(\Gamma)$، ومن أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_{12} بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\left\|f(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{E^{p(.)}(G^{-})} \leq c_{12}\, \tilde{\omega}_{r,p(.)}\left(f,\frac{c}{n+1}\right)$$

البرهان: بما أن $f \in E^{p(.)}(G^{-})$، ومن تعريف الصف $E^{p(.)}(G)$ يكون $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ ومنه $f \in L^{1}(\Gamma)$ وذلك حسب المبرهنة المساعدة1 .من علاقات سوخوتسكي: $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$.

وبما أن f تحليلي في G^{-} و $z \in G$ ينتج: $f^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0$

أي أن $f(z)=-f^{-}(z)$ وبالتالي حسب المبرهنة 4 نحصل على المطلوب.■

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى تقريب الدوال العقدية في فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ على أسرة منحنيات ديني الملساء باستخدام معامل الملوسة الكسري. ونوصي بدراسة تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير على أسرة منحنيات كارلسون وكذلك دراسة تقريب دوال فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير الموزن $L_{w}^{p(.)}(\Gamma)$ على منحنيات كارلسون أو على منحنيات ديني الملساء.

المراجع:

[1] علي، محمد؛ سويقات، محمد؛ كنج، أحمد. *تقريب الدوال العقدية على أسرة جزئية من منحنيات كارلسون*. مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية– سلسلة العلوم الأساسية، سورية، المجلد (36)، العدد (4)، 2014، 145– 154.

[2] AKGUN, R. *Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent*. Ukr. Mat. Zh, Turkey, Vol. 63, No. 1,2011, 3-23.

[3] ALI, M; MAHMOUD, S; KINJ, A. *Approximation by rational functions in Smirnov classes with variable exponent*. Arab. J. Math. Vol. 6, 2017, 79–86.

[4] ALI, M; MAHMOUD, S; KINJ, A. *Approximation properties of de la Vallée-Poussin sums in Morrey spaces*. SQU Journal for Science, Vol. 22, No. 2, 2017, 89-95.

[5] ALI, M; MAHMOUD, S; KINJ, A. *Approximation by rational functions in Morrey-Smirnov classes*. Kuwait J. Sci. Vol. 45,No. 2, 2018, 1-7.

[6] CRUZ-URIBE, D. V; FIORENZA, A. *Variable Lebesgue spaces foundations and harmonic analysis*, Birkhäsuser, Basel-Switzerland, 2013, 312.
[7] GUVEN, A; ISRAFILOV, D. M. *Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces*. J. Korean Math. Soc. Vol. 45, No. 6, 2008, 1535-1548.
[8] ISRAFILOV, D.M; TESTICI, A. *Approximation by Faber-Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent*. Indagationes Mathematicae, Vol. 27, No. 4, 2016, 914-922.
[9] JAFAROV, S. Z. *Approximation of the functions in weighted Lebesgue spaces with variable exponent.* Complex Variables and Elliptic Equations, 22 Sep 2017, 1- 15.
[10] KOKILASHVILI, V; SAMKO, S. *Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves*. Proc. A. Razmadze Math. Inst. Vol. 138, 2005, 106–110.
[11] SHARAPUDINOV, I. I. *Some problems in approximation theory in the spaces* $L^{p(.)}$. Analysis Mathematica, Russian, Vol. 33, 2007, 135–153.