مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (24) العدد (12)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (24) No (12) 2002

تقارب المجموع فوق/تحت-البياني
بالنسبة لمسافة r -هاوسدورف

الدكتور محمد سويقات*

(قبل للنشر في 2002/7/31)

□ الملخّص □

تلعب الدوال الحدية العليا M والدوال الحدية الدنيا m لدالة محدبة-مقعرة L دوراً هاماً في دراسة مسائل النقاط السرجية، إذ يتم تحويل المسألة ذات المتحولين إلى مسألتين كل منهما بمتحول واحد إحداهما محدبة والأخرى مقعرة. وهذا بدوره يسمح بدراسة معظم المسائل المطروحة على التحليل فوق/تحت-البياني. في هذا البحث، نعرف مسافة r -هاوسدورف على صف من الدوال التي ليست بالضرورة محدبة-مقعرة وذلك اعتماداً على الدوال الحدية العليا والدنيا الموافقة لها. وندرس استمرارية المجموع فوق/تحت- البياني والضرب فوق/تحت-البياني لدوال محدبة-مقعرة بالنسبة لهذه المسافة، وتدرس أيضاً استمرارية دالة مورو- يوشيدا $L_{l,m}$ بالنسبة لمسافة r -هاوسدورف.

* مدرس في قسم الرياضيات -كلية العلوم -جامعة تشرين -اللاذقية سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (24) العدد (12)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (24) No (12) 2002

La convergence de la somme epi/hypo-graphique Par rapport à la distance de r -Hausdorff

Dr. Mohamed Soueycatt*

(Accepted 31/7/2002)

□ Résumé □

Les fonctions marginales (supérieures M et inférieures m) d'une fonction convexe-concave L, jouent un rôle important dans l'étude des problèmes des points-selles. Elles permettent de transformer le problème à deux variables en deux problèmes en une seule variable: l'un convexe et l'autre concave. Ce qui nous permet d'étudier la plupart des problèmes rencontres dans l'analyse épi/hypo-graphique. Dans ce travail, on définit la distance de r -Hausdorff sur une classe de fonctions qui ne sont pas nécessairement convexes-concaves et ceci en utilisant les fonctions marginales supérieures et inférieures correspendantes. On étudie ensuite, la continuité de la somme épi/hypo-graphique et la multiplication épi/hypo-graphique des fonctions convexes-concaves par rapport à cette distance, ainsi que la continuité de la fonction Moreu-Yoshida $L_{l,m}$ par rapport à la distance de r -Hausdorff.

* **Enseignant, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Tichrine, Lattaquié, Syrie.**

مقدمة:

يلعب التحليل فوق البياني أهمية كبيرة في دراسة مسائل القيم الدنيا (problèmes de minimization) لدوال بمتحول واحد من خلال الخصائص التي يتمتع بها فوق البيان (epi-graphe) وذلك مقارنة بالتحليل الكلاسيكي حيث كان البيان (graphe) يلعب الدور الأساسي [2]،[1]. وبشكل متناظر كان للتحليل تحت البياني أهمية في دراسة مسائل القيم العليا (Problèmes de maximisation) من خلال خصائص تحت البيان (hypo-graphe) . ومن ثم ظهر التحليل فوق/تحت البياني ليشمل كلاً من التحليلين السابقين، ويعالج مسائل القيم الدنيا/العليا (Problèmes de minimization-maximisation) أو ما يسمى مسائل النقاط السرجية (Problèmes des points-selles) مما أدى إلى خلق مفاهيم جديدة مثل: التقارب فوق/تحت–البياني، التكامل فوق/تحت–البياني، التفاضل فوق/تحت–البياني، المشتق فوق/تحت–البياني، الجمع فوق/تحت–البياني، الضرب فوق/تحت–البياني... الخ. وقد تبنى هذه المفاهيم العديد من الباحثين في دراستهم لمسائل النقاط السرجية وكانت معظم هذه الدراسات ذات طبيعة توبولوجية [7]، [6]، [5]، [4]، [3].

تعد عمليتا الجمع فوق/تحت–البياني أو (infsup-convolution) والضرب فوق/تحت–البياني من أهم عناصر التحليل فوق/تحت–البياني لدوال محدبة–مقعرة، فمن أجل الدوال $L, L_1, L_2 : X \times Y \to \overline{R}$ تعرف:

$$(L_1 \underset{e/h}{+} L_2)(x, y) = \inf \operatorname{Sup}\{L_1(u,v) + L_2(x-u, y-v); u\in X, v\in Y\}$$
$$\lambda \underset{e/h}{*} L(x, y) = \lambda L(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y) \quad , \quad \forall \lambda > o.$$

وهما تعميمان لعمليتي الجمع فوق البياني أو (inf-convolution) والضرب فوق البياني، وتملكان خصائص هامة في نظرية min-max [7]، [5] ، بالإضافة إلى طرائق عددية في حل مسائل النقاط السرجية.

في هذا العمل، سندرس هذه العمليات من وجهة نظر مترية، وهنا تظهر صعوبات أساسية في دراسة مسائل النقاط السرجية وذلك لفقدان التقريب الهندسي (L'approche géometrique)، المتاح في مسائل القيم الدنيا وفي مسائل القيم العليا. فمن أجل التغلب على تلك الصعوبات كان لابد من العمل على الدوال الحدية العليا M والدوال الحدية الدنيا m، وتحويل المسألة ذات المتحولين إلى مسألتين، إحداهما تدخل ضمن التحليل فوق البياني والأخرى ضمن التحليل تحت البياني. فبعد إعطاء بعض التعاريف والمفاهيم المتعلقة بالتحليل فوق البياني وبالتحليل فوق/تحت–البياني في الفقرة الأولى. نذّكر في الفقرة الثانية، بمفهوم مسافة ρ –هاوسدورف على مجموعة الدوال المعرفة علىX وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ ، ومن ثم نعرف مسافة ρ –هاوسدورف على صف من الدوال المعرفة على $X \times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ ، ونبرهن إن هذه المسافة تحقق الشروط المترية على $X \times Y$. وفي الفقرة الثالثة، نحسب الدوال الحدية العليا والدنيا للمجموع فوق/تحت–البياني ونبرهن أن الدالة الحدية العليا والدالة الحدية الدنيا على الترتيب لمجموع فوق/تحت – البياني لدالتينL و K ليس إلا المجموع فوق البياني للدوال الحدية العليا والمجموع تحت البياني للدوال الحدية الدنيا على الترتيب للدالتين L وK، ونحسب أيضاً الدوال الحدية العليا والدنيا للضرب فوق/تحت –البياني.

في الفقرة الرابعة، ندرس استمرارية المجموع فوق/تحت–البياني بالنسبة لمسافة ρ –هاوسدورف ونبرهن أنه إذا كانت لدينا متتاليتان من الدوال المحدبة–المقعرة، كل منهما متقاربة بالنسبة لمسافة ρ –هاوسدورف فإن متتالية مجموعهما فوق/تحت–البياني تكون أيضا متقاربة بالنسبة لهذه المسافة (مبرهنة 4.2)، وتعالج أيضا استمرارية الضرب فوق/تحت–البياني (مبرهنة 4.4). وأخيراً في الفقرة الخامسة، ندرس دالة مورو–يوشيدا التي لها أهمية مميزة في دراسة مسائل النقاط السرجية، ونبرهن أنه إذا كانت متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة (L_n) متقاربة بالنسبة لمسافة ρ –هاوسدورف فإن متتالية دوال مورو–يوشيدا الموافقة لها $(L_n)_{\lambda,\mu}$ تكون متقاربة بالنسبة لهذه المسافة (مبرهنة 5.2).

1– تعاريف ومفاهيم أساسية:

تذكرة ببعض عناصر التحليل فوق البياني (Analyse epi-graphique) [1]،[8].

ليكن X و Y فضاءين منظمين ولتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

–نعرِّف فوق البيان (epi-graphe) للدالة f ويرمز له بـ epi f بالعلاقة:

$$\text{epi } f = \{(x,a) \in X \times R / f(x) \le a\}$$

- نقول إن f دالة محدبة إذا كانت epi f مجموعة محدبة، ونقول إن f دالة مغلقة إذا كانت epi f مجموعة مغلقة، يرمز لمجموعة الدوال المحدبة المغلقة المعرفة على X بالرمز $\Gamma(X)$.

– نقول إن f دالة خاصة (proper) إذا كان $\text{dom } f \ne \emptyset$

حيث :
$$\text{dom } f = \{ x \in X / f(x) < +\infty \}$$

أو نقول أن f دالة خاصة إذا كانت f لا تطابق $+\infty$ ولا تأخذ أبداً القيمة $-\infty$.

– نعرِّف المجموع فوق البياني $f \underset{e}{+} g$ (La Somme epi-graphique) للدالتن $f, g : X \to \overline{R}$ بالعلاقة:

$$(f \underset{e}{+} g)(x) = \inf\{ f(u) + g(x-u); u \in X\} \qquad (1)$$

– نعرِّف الضرب فوق البياني $\lambda \underset{e}{*} f$ (La multiplication-epigraphique) لدالة محدبة f بالعلاقة:

$$(\lambda \underset{e}{*} f)(x) = \lambda f(\lambda^{-1}x); \ \lambda > o \qquad (2)$$

وكان الرياضي Moreau [9] أول من عرَّف مفهوم المجموع فوق البياني الذي أطلق عليه سابقاً (inf-convolution) ومن ثم طوِّر واستخدِّم من قبل معظم رياضيي التحليل [10]،[2]،[1]، نظراً لأهميته الكبرى في نظرية القيم المثلى. ويبرهن هندسياً [13] ان:

$$\text{epi}_s(\lambda \underset{e}{*} f) = \lambda \, \text{epi}_s f \quad \text{و} \quad \text{epi}_s(f \underset{e}{+} g) = \text{epi}_s f + \text{epi}_s g$$

حيث : epi_s يدعى فوق البيان التام للدالة f ويعرف بالعلاقة :

$$\text{epi}_s f = \{(x,a) \in X \times R / f(x) < a\}$$

وبطريقة مشابهة يتم تعرِّيف المجموع تحت البياني $f \overset{h}{+} g$ (La somme hypo-graphique) للدالتين f,g بالعلاقة:

$$(f \overset{h}{+} g)(x) = \text{Sup}\{ f(u) + g(x-u); u \in X\} \qquad (3)$$
$$= -((-f) \underset{e}{+} (-g))(x)$$

وكذلك الضرب تحت البياني $\mu \overset{h}{*} g$ (La multiplication-hypographique) لدالة مقعرة g بالعلاقة:

$$(\mu \overset{h}{*} g)(x) = \mu g(\mu^{-1}x); \ \mu > o$$

ويبرهن هندسياً أيضاً أن:

$$\text{hypo}_s(\mu \overset{h}{*} g) = \mu \, \text{hypo}_s g \quad \text{و} \quad \text{hypo}_s(f \overset{h}{+} g) = \text{hypo}_s f + \text{hypo}_s g$$

حيث : $\text{hypo}_s \ g$ يدعى تحت البيان التام للدالة g ويعرف بالعلاقة :

$$\text{hypo}_s \ g = \{(x,b) \in X \times R / g(x) > b\}$$

–نقول عن $f : X \to \overline{R}$ بأنها قسرية (coercive) إذا وجد عدد حقيقي موجب تماماً k بحيث يكون:

$$f(x) \geq k(\|x\|) \;;\; \forall\, x \in X \qquad (4)$$

أو نقول أن f قسرية إذا تحقق الشرط: $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \infty$

الآن نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية المتعلقة بدوال ذوات متحولين [11]،[8].

- نقول عن الدالة $L : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ إنها محدبة–مقعرة (convexe-concave) إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني.
- نعرِّف الدالة الحدية العليا M (La fonction marginale supérieure) للدالة L بالعلاقة:

$$\begin{aligned} &M : X \to \overline{\mathbb{R}} \\ &M(x) = \sup_{y \in Y} L(x, y) \qquad (5) \end{aligned}$$

- نعرِّف الدالة الحدية الدنيا m (La fonction marginale inférieure) للدالة L بالعلاقة:

$$\begin{aligned} &m : Y \to \overline{\mathbb{R}} \\ &m(y) = \inf_{x \in X} L(x, y) \qquad (6) \end{aligned}$$

من الواضح أنه إذا كانت الدالة L محدبة–مقعرة فإن M تكون دالة محدبة علىX و m تكون دالة مقعرة علىY، ونقول عن دالتين إنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الدوال الحدية العليا ونفس الدوال الحدية الدنيا.

- نعرِّف المجموع فوق/تحت–البياني $L \underset{e/h}{+} K$ (La Somme epi/hypo-grahique) للدالتين $K, L : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ بالعلاقة التالية:

$$(L \underset{e/h}{+} K)(x, y) = \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \{L(u,v) + K(x - u, y - v)\} \qquad (7)$$

نعرِّف الضرب فوق/تحت–البياني $\lambda \underset{e/h}{*} L$ (La multiplication epi/hypo-grahique) للدالة L بالعلاقة:

$$\lambda \underset{e/h}{*} L(x, y) = \lambda L(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y) \;;\; \lambda > 0 \qquad (8)$$

ويبرهن بسهولة أنه إذا كانت كلاً من L,K دالة محدبة–مقعرة فإن كلا من $L \underset{e/h}{+} K$ و $\lambda \underset{e/h}{*} L$ تكون دالة محدبة–مقعرة أيضا [7].

أخيرا، نرمز بـ $\overline{\mathbb{R}}^{X}$ لمجموعة الدوال المعرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$ ونرمز بـ $\overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $X \times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$.

2– مسافة ρ –هاوسدورف

لتكن d دالة المسافة المولدة بالنظيم $\|\ \|$ المعرَّف على X. من أجل كل مجموعة جزئية C في X:

$$d(x,C) := \inf\{\|x - y\| \;;\; y \in C\} \quad ; \quad (d(x,C) = \infty \text{ إذا كانت } C = \emptyset)$$

من أجل كل $\rho \geq 0$ ، ρB يرمز للكرة المغلقة في X المتمركزة في المبدأ ونصف قطرها ρ، ولكل C في X نعرِّف: $C_\rho := C \cap \rho B$

من أجل أي مجموعتين C و D في X، نعرِّف مدى تجاوز هاوسدورف (L'excés de hausdorff) لـ C على D بالعلاقة:

$$e(C, D) := \sup\{d(x, D); x \in C\} \quad ; \quad (\text{باعتبار } e = 0 \text{ إذا كانت } C = \emptyset)$$

من أجل كل $r \geq 0$ ، نعرِّف مسافة r–هاوسدورف بين المجموعتين C و D بالعلاقة:

$$\text{haus}_r(D,C) = \text{Sup}\{e(C_r, D)\ ;\ e(D_r, C)\} \qquad (9)$$

ونقول عن أية متتالية من المجموعات $(D_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المجموعة D في X بالنسبة لمسافة r–هاوسدورف إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} \text{haus}_r(D_n, D) = 0\ ;\quad \forall\, r \geq 0$$

<u>تعريف 2.1</u> (مسافة r–هاوسدورف على $\overline{R}^X$):

نعرِّف مسافة r–هاوسدورف بين الدالتين f و g من $\overline{R}^X$ بالعلاقة:

$$h_r(f,g) = \text{haus}_r(\text{epi}\ f, \text{epi}\ g)\ ;\quad \forall\, r \geq 0 \qquad (10)$$

حيث epi f و epi g مجموعتين جزئيتين في $X \times R$ ، ويعرَّف rB في $X \times R$ بالعلاقة:

$$rB_{X\times R} = \{ (x,a) \in X \times R / \|x\| \leq r\ ;\ |a| \leq r \}$$

ونقول عن أية متتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة f في $\overline{R}^X$ بالنسبة لمسافة r–هاوسدورف إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} h_r(f_n, f) = 0\ ;\quad \forall\, r \geq 0$$

إن هذا المفهوم الذي سمي بمسافة r–فوق البياني كان قد عرِّف وطوِّر في [13]،[12] وتبنَّاه العديد من الرياضيين في دراسات مختلفة [17]،[16]،[15]،[14].

<u>تعريف 2.2</u> (مسافة r–هاوسدورف على $\overline{R}^{X\times Y}$)

لم يُعرف المفهوم فوق/تحت–البيان تعريفاً هندسياً دقيقاً مقارنةً بمفهومي فوق البيان وتحت البيان، مما أدى الى ظهور صعوبات بالتطبيق المباشر لمسافة r–هاوسدورف على الدوال ذوات المتحولين (محدبة–مقعرة). ولقد كان لاستخدام الدوال الحدية العليا والدنيا في حل بعض مسا ئل النقاط السرجية أهمية في إعطاء تعريف مسافة r–هاوسدورف على صفوف دوال ليست بالضرورة محدبة–مقعرة وذلك كما يلي:

من أجل كل $r \geq 0$ ، نعرِّف مسافة r – هاوسدورف بين الدالتين K,L من $\overline{R}^{X\times Y}$ بالعلاقة:

$$H_r(L,K) = h_r(M_1, M_2) + h_r(m_1, m_2) \qquad (11)$$

حيث: M_2,M_1 (m_2,m_1) هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) لكل من K,L على الترتيب.

نقول عن أية متتالية من الدوال $(L_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالةL في $\overline{R}^{X\times Y}$ بالنسبة لمسافة r–هاوسدورف إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} H_r(L_n, L) = 0\ ;\quad \forall\, r \geq 0$$

<u>مبرهنة 3.2</u>

لتكن $L_i : X \times Y \to \overline{R}\ ; i = 1,2,3$ ثلاثاً من الدوال المحدبة–المقعرة. عندئذ H_r في (11) تحقق الخواص الآتية:

1. H_r موجبة: $H_r(L_1, L_2) \geq 0$
2. H_r متناظرة: $H_r(L_1, L_2) = H_r(L_2, L_1)$
3. H_r تحقق متباينة المثلث: لكل: $r > \text{Max}\{d(0, \text{epi}\, M_i); d(0, \text{epi}(-m_i)); i = 1,2,3\}$

$$H_r(L_1, L_3) \leq H_{3r}(L_1, L_2) + H_{3r}(L_2, L_3)$$

4. من أجل $r \geq 0$: $H_r(L_1, L_2) = 0 \Leftrightarrow L_1$ يكافئ L_2

البرهان:

إن برهان الخواص 1، 2، 4 ينتج مباشرة من التعريف (11) وباعتبار أن أي دالتين محدبتين–مقعرتين تكونان متكافئتين إذا كان لهما نفس الدوال الحدية العليا ونفس الدوال الحدية الدنيا.

أما من أجل الخاصة 3: أيضا حسب تعريف H_r لدينا:

$$H_r(L_1, L_3) = h_r(M_1, M_3) + h_r(m_1, m_3)$$

بتطبيق المبرهنة 2.1 في [13] على كل من حدي الطرف الأيمن في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\begin{aligned} H_r(L_1, L_3) &\le h_{3r}(M_1, M_2) + h_{3r}(M_2, M_3) + h_{3r}(m_1, m_2) + h_{3r}(m_2, m_3) = \\ &= [h_{3r}(M_1, M_2) + h_{3r}(m_1, m_2)] + [h_{3r}(M_2, M_3) + h_{3r}(m_2, m_3)] = \\ &= H_{3r}(L_1, L_2) + H_{3r}(L_2, L_3). \end{aligned}$$

3– حساب الدوال الحدية العليا والدنيا للمجموع وللضرب فوق/تحت–البياني.

نُذكِّر أولا بنظرية "Inf sup = Sup inf" في [18]،[9].

مبرهنة 3.1

لتكن $L : X \times Y \to \overline{R}$ دالة محدبة–مقعرة محققة للشروط الآتية:

1) $L(., y) \in \Gamma(X)$ من أجل كل y من Y.

2) $L(., y_0)$ دالة قسرية على X من أجل y_0 من Y.

3) $L(., y_1)$ دالة خاصة على X من أجل y_1 من Y.

عندئذ:

$$\{\mathrm{Inf}\,\sup L(x, y) = \mathrm{Sup}\,\inf L(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

مبرهنة 3.2

لتكن $L, K : X \times Y \to \overline{R}$ دالتين محدبتين–مقعرتين ولنفرض انه:

1) من أجل كل $y \in Y$ فإن $L(., y) \in \Gamma(X)$ و $K(., y) \in \Gamma(X)$.

2) يوجد $y_1 \in Y$ بحيث تكون $L(., y_1)$ دالة قسرية.

3) يوجد $y_2 \in Y$ بحيث تكون $K(., y_2)$ دالة خاصة.

عندئذ:

$$M_{e/h} = M_1 \underset{e}{+} M_2$$

حيث: $M_{e/h}, M_2, M_1$ هي الدوال الحدية العليا للدوال $L \underset{e/h}{+} K, K, L$ على الترتيب.

إضافةً لذلك ; إذا كانت $K(., \tilde{y}_2)$ قسرية على X من أجل $\tilde{y}_2 \in Y$ فإن :

$$m_{e/h} = m_1 \overset{h}{+} m_2$$

حيث: $m_{e/h}, m_2, m_1$ هي الدوال الحدية الدنيا للدوال $L \underset{e/h}{+} K, K, L$ على الترتيب.

<u>البرهان</u>: حسب تعريف الدالة الحدية العليا في العلاقة (5) يكون:

$$
\begin{aligned}
M_{\varepsilon/\eta}(x) &= \sup_{y\in Y}\left\{(L \underset{\varepsilon/\eta}{+} K)(x,y)\right\}\\
&= \sup_{y\in Y}\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{(L(u,v)+K(x-u,y-v)\right\}\\
&= \sup_{y\in Y}\inf_{u\in X}\psi(u,y)
\end{aligned}
$$

حيث: $$\psi(u,y)=\sup_{v\in Y}\{L(u,v)+K(x-u,y-v)\}$$

اعتماداً على الفرض وعلى خواص الدوال الحدية المغلقة ، نلاحظ بسهولة ان $\psi(.,y)\in\Gamma(X)$ من أجل كل $y\in Y$. من جهة أخرى لدينا:

$$\psi(u,y)\geq L(u,v)+K(x-u,y-v)$$

بأخذ $y_1=v$ و $y_1+y_2=y$ نحصل على:

$$\psi(u,y_1+y_2)\geq L(u,y_1)+K(x-u,y_2)$$

بما أن K دالة خاصة حسب الفرض (3) فإنها لا تطابق $+\infty$ ولا تأخذ نهائياً القيمة $-\infty$ ، وكون L دالة قسرية على X حسب الفرض (2) فإنه حسب تعريف الدالة القسرية نستنتج أن:

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\psi(u,y_1+y_2)\geq+\infty$$

أي أن: $$\lim_{\|u\|\to\infty}\psi(u,y_1+y_2)=+\infty$$

وهذا يؤكد قسرية الدالة $\psi(.,y_1+y_2)$

ونلاحظ من جهة أخرى أن : $\psi(.,y_1+y_2)$ لا تطابق $+\infty$ ولا تأخذ نهائياً القيمة $-\infty$ إذا هي دالة خاصة وبالتالي بتطبيق المبرهنة 3.1 نحصل على:

$$
\begin{aligned}
M_{\varepsilon/\eta}(x) &= \inf_{u\in X}\sup_{y\in Y}\sup_{v\in Y}\left\{(L(u,v)+K(x-u,y-v)\right\}\\
&= \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{(L(u,v)+\sup_{z\in Y}K(x-u,z)\right\}\\
&= \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{(L(u,v)+M_2(x-u)\right\}\\
&= \inf_{u\in X}\left\{(M_1(u)+M_2(x-u)\right\}\\
&= (M_1 \underset{\varepsilon}{+} M_2)(x)
\end{aligned}
$$

أخيراً ، يبرهن الجزء الثاني بنفس الطريقة السابقة مستخدمين تعريف الدالة الحدية الدنيا وتطبيق المبرهنة 3.1 مرة أخرى فنحصل على :

$$m_{\varepsilon/\eta}(y)=(m_1 \overset{\eta}{+} m_2)(y)\ . \blacksquare$$

مبرهنة 3.3

من أجل كل دالة $L: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ محدبة–مقعرة ومن أجل كل $\lambda>0$ لدينا:

$$M^{\lambda}_{\varepsilon/\eta}=\lambda \underset{\varepsilon}{*} M^{L}$$

$$m^{\lambda}_{\varepsilon/\eta}=\lambda \overset{\eta}{*} m^{L}$$

حيث: $M^{\lambda}_{\varepsilon/\eta}, M^{L}$ $(m^{\lambda}_{\varepsilon/\eta}, m^{L})$ هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب لكل من الدوال L, L $\lambda \underset{\varepsilon/\eta}{*}$.

البرهان: اعتماداً على تعريف الدالة الحدية العليا في العلاقة (5) يكون:

$$\begin{aligned} M^{\lambda}_{e/h}(x) &= \sup_{y\in Y}\left\{(\lambda \underset{e/h}{\star} L)(x,y)\right\} \\ &= \sup_{y\in Y}\left\{(\lambda L)(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y)\right\} \\ &= \lambda M^{L}(\lambda^{-1}x) \\ &= \lambda \underset{e}{\star} M^{L}(x) \end{aligned}$$

نبرهن بطريقة مشابهة صحة العلاقة الأخرى:

$$m^{\lambda}_{e/h} = \lambda \overset{h}{\star} m^{L} \ . \quad \blacksquare$$

4- تقارب المجموع فوق/تحت-البياني (Convergence de la somme epi/hypo-graphique)

مبرهنة 4.1 [13]

ليكن X فضاءً منظماً ولتكن $f_i, g_i ; i=1,2$ دوالاً معرَّفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$، محدودة من الأسفل بالعدد $b\in\mathbb{R}$ وتحقق الشرط الآتي: من أجل كل $\rho\geq 0$ و $\theta\geq 0$ يوجد $\gamma=\gamma(\rho,\theta)$ بحيث يكون:

$$\{f_i(u)+g_i(v)\leq\theta, \|u+v\|\leq\rho ; i=1,2\} \Rightarrow (\|u\|\leq\gamma ; \|v\|\leq\gamma)$$

عندئذ: $h_\rho(f_1 \underset{e}{+} g_1, f_2 \underset{e}{+} g_2) \leq h_{\rho_1}(f_1,f_2)+h_{\rho_1}(g_1,g_2)$ حيث: $\rho_1=\rho_1(\rho,\theta)$ ثابت.

مبرهنة 4.2

لتكن $\{L_n, L : X\times Y\to\overline{\mathbb{R}} ; n\in\mathbb{N}\}$ و $\{K_n, K : X\times Y\to\overline{\mathbb{R}} ; n\in\mathbb{N}\}$ متتاليتين من الدوال المحدبة-المقعرة بحيث تكون :

1) كل من مجموعتي الدوال $\{L,K\}$ و $\{L_n, K_n ; n\in\mathbb{N}\}$ محققه لشروط المبرهنة 3.2.

2) الدوال الحدية العليا $M^{K_n}_n, M^K, M^{L_n}_n, M^L$ (على الترتيب. الدوال الحدية الدنيا $m^{K_n}_n, m^K, m^{L_n}_n, m^L$) محدودة من الأسفل بالعدد $b\in\mathbb{R}$ (على الترتيب محدودة من الأعلى بالعدد $a\in\mathbb{R}$).

3) $-m^{L_n}_n, -m^L$ دوالاً قسرية.

ولنفرض أنه من أجل كل $\rho\geq 0$ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} H_\rho(K_n,K)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} H_\rho(L_n,L)=0 \qquad (12)$$

عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} H_\rho(L_n \underset{e/h}{+} K_n, L \underset{e/h}{+} K)=0 \ ; \quad \forall\rho\geq 0 \qquad (13)$$

البرهان: قبل البدء بالبرهان نعرض التمهيدية الأتية:

تمهيدية 4.3

لتكن $\{f_n, f : X\to\overline{\mathbb{R}} ; n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال المحدودة من الأسفل بالعدد $b\in\mathbb{R}$ ولنفرض إن إحداها قسرية ولتكن الدالة f. عندئذ من أجل كل $\varepsilon>0$, $\rho>0$ يوجد $\gamma:=\gamma(\varepsilon,\rho)$ بحيث يتحقق الشرط التالي:

$$(f_n(x)+f(y)\leq\varepsilon, \|x+y\|\leq\rho) \Rightarrow \|x\|\leq\gamma, \|y\|\leq\gamma.$$

البرهان:

ليكن $\rho>0,\varepsilon>0$ بحيث يكون $\|x+y\|\le\rho$ ، $f_n(x)+f(y)\le\varepsilon$. بما أن f دالة قسرية إذاً يوجد عدد موجب تماماً k بحيث يكون $f(y)\ge k(\|y\|)$. ومنه من أجل كل $n\in N$ يكون $f_n(x)\le\varepsilon-k(\|y\|)$. ولما كانت f_n محدودة من الأسفل بالعدد $\beta\in R$ ، فإن $\beta\le f_n(x)$ ، وبالتالي $\beta\le f_n(x)\le\varepsilon-k(\|y\|)$

ومنه نستنتج أن: $\|y\|\le k^{-1}(\varepsilon-\beta)$.

من جهة أخرى لدينا: $\|x\|=\|x+y-y\|\le\rho+k^{-1}(\varepsilon-\beta)$

بأخذ $\gamma=\gamma(\varepsilon,\rho)=\rho+k^{-1}(\varepsilon-\beta)$ نحصل على المطلوب. ■

بالعودة إلى برهان المبرهنة 4.2 : من أجل كل $\rho\ge 0$ وحسب تعريف H_ρ يكون لدينا:

$$H_\rho(L_n\underset{\varepsilon/\eta}{+}K_n\ ,\ L\underset{\varepsilon/\eta}{+}K)=h_\rho(M_n,M)+h_\rho(m_n,m)\qquad(14)$$

حيث M_n,M (m_n,m) هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب لكل من $L_n\underset{\varepsilon/\eta}{+}K_n\ ,\ L\underset{\varepsilon/\eta}{+}K$ ، واعتمادا على المبرهنة 3.2 نستطيع أن نكتب

$$M_n=M_n^{L_n}\underset{\varepsilon}{+}M_n^{K_n}\qquad \text{و}\qquad M=M^L\underset{\varepsilon}{+}M^K$$

$$m_n=m_n^{L_n}\overset{\eta}{+}m_n^{K_n}\qquad \text{و}\qquad m=m^L\overset{\eta}{+}m^K$$

ومنه:

$$h_\rho(M_n,M)=h_\rho(M_n^{L_n}\underset{\varepsilon}{+}M_n^{K_n},M^L\underset{\varepsilon}{+}M^K)\qquad(15)$$

$$h_\rho(m_n,m)=h_\rho(m_n^{L_n}\overset{\eta}{+}m_n^{K_n},m^L\overset{\eta}{+}m^K)\qquad(16)$$

حسب الفرض (1) تكون الدوال $\{L_n,L;\ n\in N\}$ قسرية على X وبالتالي الدوال الحدية العليا الموافقة لها $M_n^{L_n},M^L$ هي أيضاً قسرية على X، وباستخدام الفرض (2) و (3) وحسب التمهيدية السابقة تكون شروط المبرهنة 4.1 محققة وبتطبيق هذه المبرهنة على العلاقتين (15) و (16) وبالاستفادة من العلاقة (3) نحصل على:

$$h_\rho(M_n,M)\le h_{\rho_1}(M_n^{L_n},M^L)+h_{\rho_1}(M_n^{K_n},M^K)\qquad(17)$$

$$h_\rho(m_n,m)\le h_{\rho_2}(m_n^{L_n},m^L)+h_{\rho_2}(m_n^{K_n},m^K)\qquad(18)$$

بتعويض (17) و (18) في (14) نحصل على:

$$\begin{aligned}H_\rho(L_n\underset{\varepsilon/\eta}{+}K_n,L\underset{\varepsilon/\eta}{+}K)&\le[h_{\rho_1}(M_n^{Ln},M^L)+h_{\rho_1}(M_n^{Kn},M^K)]+[h_{\rho_2}(m_n^{Ln},m^L)+h_{\rho_2}(m_n^{Kn},m^K)]\\&=[h_{\rho_1}(M_n^{Ln},M^L)+h_{\rho_2}(m_n^{Ln},m^L)]+[h_{\rho_1}(M_n^{Kn},M^K)+h_{\rho_2}(m_n^{Kn},m^K)]\\&\le H_\gamma(L_n,L)+H_\gamma(K_n,K)\qquad(19)\end{aligned}$$

حيث: $\rho_1=\rho_1(\rho,\beta)$ ، $\rho_2=\rho_2(\rho,\alpha)$ و $\gamma=\max(\rho_1,\rho_2)$، وبأخذ نهاية طرفي المتراجحة (19) عندما $n\to\infty$

وباستخدام الفرض (12) نحصل على المطلوب. ■

المبرهنة الآتية، تعطي تقارب الضرب فوق/تحت-البياني بالنسبة لمسافة ρ -هاوسدورف.

مبرهنة 4.4

لتكن $\{L_n, L : X\times Y \to \overline{R} \; ; \; n\in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة بحيث تكون الدوال الحدية العليا $M_n^{L_n}, M^L$ (على الترتيب الدوال الحدية الدنيا $m_n^{L_n}, m^L$) محدودة من الأسفل بالعدد $b\in R$ (على الترتيب محدودة من الأعلى بالعدد $a\in R$)، ولنفرض أنه من أجل كل $r\geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} H_r(L_n, L) = 0$$

عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} H_r(\lambda \underset{e/h}{*} L_n, \lambda \underset{e/h}{*} L) = 0 \; ; \; \forall r\geq 0, \lambda > 0 \qquad (20)$$

البرهان

حسب تعريف H_r يكون لدينا:

$$H_r(\lambda \underset{e/h}{*} L_n, \lambda \underset{e/h}{*} L) = h_r(M_n^\lambda, M^\lambda) + h_r(m_n^\lambda, m^\lambda) \qquad (21)$$

حيث: M_n^λ, M^λ (m_n^λ, m^λ) هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا)على الترتيب لكل من $\lambda \underset{e/h}{*} L_n, \lambda \underset{e/h}{*} L$ ، واعتمادا على المبرهنة 3.3 نستطيع أن نكتب:

$$M_n^\lambda = \lambda \underset{e}{*} M_n^{L_n} \quad \text{و} \quad M^\lambda = \lambda \underset{e}{*} M^L$$

$$m_n^\lambda = \lambda \overset{h}{*} m_n^{L_n} \quad \text{و} \quad m^\lambda = \lambda \overset{h}{*} m^L$$

وبالتعويض في العلاقة (21) نحصل على:

$$H_r(\lambda \underset{e/h}{*} L_n, \lambda \underset{e/h}{*} L) = h_r(\lambda \underset{e}{*} M_n^{L_n}, \lambda \underset{e}{*} M^L) + h_r(\lambda \overset{h}{*} m_n^{L_n}, \lambda \overset{h}{*} m^L)$$

بتطبيق المبرهنة 6.9 في [13] نستنتج أن:

$$\begin{aligned} H_r(\lambda \underset{e/h}{*} L_n, \lambda \underset{e/h}{*} L) &\leq h_{r'}(M_n^{L_n}, M^L) + h_{r'}(m_n^{L_n}, m^L) \\ &= H_{r'}(L_n, L) \qquad (22) \end{aligned}$$

حيث: $r' = r'(r, \lambda)$ ، بأخذ نهاية طرفي المتراجحة (22) عندما $n\to\infty$ وباستخدام الفرض نحصل على (20) . ■

5– دالة مورو–يوشيدا (fonction Moreau-yosida)

تُعَرَّف دالة مورو–يوشيدا f_λ ذات الدليل $\lambda > 0$ لدالة $f\in \overline{R}^X$ بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &:= \inf\left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 \; ; u\in X \right\} \\ &= (f \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2)(x) \qquad (23) \end{aligned}$$

تُعَرَّف دالة مورو–يوشيدا $L_{\lambda,\mu}$ ذات الدليلين $\lambda > o, \mu > 0$ [3] لدالة $L\in \overline{R}^{X\times Y}$ بالعلاقة:

$$L_{\lambda,\mu}(x,y) := \inf\sup\left\{ L(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2 \;;\; u\in X, v\in Y \right\}$$
$$= \left(L \underset{e/h}{+} \left(\frac{1}{2\lambda}\|.\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|.\|^2\right)\right)(x,y) \qquad (24)$$

نلاحظ من العلاقة (24) أن الدالة $L_{\lambda,\mu}$ ليست إلا المجموع فوق/تحت–البياني للدالة L والدالة:

$$K = \left(\frac{1}{2\lambda}\|.\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|.\|^2\right)$$

مبرهنة 5.1

لتكن $L: X\times Y \to \overline{R}$ دالة محدبة–مقعرة محققة لشروط المبرهنة 3.2 ،عندئذ من أجل كل $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ يكون:

$$M^{L_{\lambda,\mu}} = M^L \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2 \qquad (25)$$

$$m^{L_{\lambda,\mu}} = m^L \overset{h}{+} \left(-\frac{1}{2\mu}\|.\|^2\right) \qquad (26)$$

حيث: $M^{L_{\lambda,\mu}}, M^L$ ($m^{L_{\lambda,\mu}}, m^L$) هي الدوال الحدية العليا (الدوال الحدية الدنيا) على الترتيب لكل من الدوال $L_{\lambda,\mu}, L$

البرهان:

حسب العلاقة (24) وبالاعتماد على المبرهنة 3.2 يكون لدينا

$$M^{L_{\lambda,\mu}} = M^L \underset{e}{+} M^K \quad \text{و} \quad m^{L_{\lambda,\mu}} = m^L \overset{h}{+} m^K$$

حيث: $K = \left(\frac{1}{2\lambda}\|.\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|.\|^2\right)$

بحسابات بسيطة للدالتين الحديتين للدالة K نجد أن: $M^K = \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2$ و $m^K = -\frac{1}{2\mu}\|.\|^2$ وبالتعويض في العلاقات السابقة نحصل على العلاقتين (25) و (26) . ■

مبرهنة 5.2

لتكن $\{L_n, L: X\times Y \to \overline{R}; n\in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة المحققة لشروط المبرهنة 3.2 وبحيث تكون الدوال الحدية العليا $M_n^{L_n}, M^L$ (على الترتيب الدوال الحدية الدنيا $m_n^{L_n}, m^L$) محدودة من الأسفل بالعدد $b\in R$ (على الترتيب محدودة من الأعلى بالعدد $a\in R$)، ولنفرض أيضاً أن كلاً من $-m^L$, $-m_n^{L_n}$ دالة قسرية وإنه من أجل كل $r \ge 0$:

$$\lim_{n\to\infty} H_r(L_n, L) = 0 \qquad (27)$$

عندئذ من أجل كل $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ تكون:

$$\lim_{n\to\infty} H_\rho\,((L_n)_{\lambda,\mu}, L_{\lambda,\mu}) = 0 \qquad (28)$$

البرهان:

حسب تعريف مسافة ρ –هاوسدورف في (11) يكون لدينا:

$$H_\rho\,((Ln)_{\lambda,\mu}, L_{\lambda,\mu}) = h_\rho\,(M_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, M^{L_{\lambda,\mu}}) + h_\rho\,(m_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, m^{L_{\lambda,\mu}}) \qquad (29)$$

وحسب المبرهنة 5.1 يكون:

$$M_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}} = M_n^{L_n} \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2 \qquad M^{L_{\lambda,\mu}} = M^{L} \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2$$

$$m_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}} = m_n^{L_n} \overset{h}{+} (-\frac{1}{2\mu}\|.\|^2) \qquad m^{L_{\lambda,\mu}} = m^{L} \overset{h}{+} (-\frac{1}{2\mu}\|.\|^2)$$

ومنه:

$$h_\rho\,(M_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, M^{L_{\lambda,\mu}}) = h_\rho\,(M_n^{L_n} \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2, M^{L} \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^2) \qquad (30)$$

$$h_\rho\,(m_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, m^{L_{\lambda,\mu}}) = h_\rho\,(m_n^{L_n} \overset{h}{+} (-\frac{1}{2\mu}\|.\|^2), m^{L} \overset{h}{+} (-\frac{1}{2\mu}\|.\|^2)) \qquad (31)$$

بما أن الدوال $\{L_n, L; n \in N\}$ محققة لشروط المبرهنة 3.2 فإن كل منها دالة قسرية على X وبالتالي الدوال الحدية العليا الموافقة لها M_n^{Ln}, M^{L} هي أيضاً قسرية على X . من جهة أخرى لدينا حسب الفرض أن كل من $-m_n^{L_n}, -m^{L}$ دوال قسرية وبالتالي حسب التمهيدية 4.3 تكون شروط المبرهنة 4.1 محققة وبتطبيقها على كل من العلاقتين (30) و (31) نحصل على:

$$h_\rho\,(M_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, M^{L_{\lambda,\mu}}) \le h_{\rho_1}(M_n^{L_n}, M^{L}) \qquad (32)$$

$$h_\rho\,(m_n^{(L_n)_{\lambda,\mu}}, m^{L_{\lambda,\mu}}) \le h_{\rho_2}(m_n^{L_n}, m^{L}) \qquad (33)$$

حيث: $\rho_1 = \rho_1(\rho, \beta, \lambda)$ و $\rho_2 = \rho_2(\rho, \alpha, \mu)$

بتعويض (32) و (33) في (29) نحصل على:

$$\begin{aligned} H_\rho\,((L_n)_{\lambda,\mu}, L_{\lambda,\mu}) &\le h_{\rho_1}(M_n^{L_n}, M^{L}) + h_{\rho_2}(m_n^{L_n}, m^{L}) \le \\ &\le h_\gamma(M_n^{L_n}, M^{L}) + h_\gamma(m_n^{L_n}, m^{L}) = \\ &= H_\gamma(L_n, L) \end{aligned}$$

حيث: $\gamma = \max(\rho_1, \rho_2)$. بأخذ نهاية طرفي العلاقة السابقة عندما $n \to +\infty$ وباستخدام الفرض (27) نحصل على (28) ■

.

المراجع:

....

[1] H. Attouch: Variational convergence for functions and operators, Pitman, London, (1984).

[2] H. Attouch: Viscosity solutions of minimizations problems, SIAM, J. Optim. 6 (3), 551-561, (1996).

[3] H. Attouch, R. Wets: Convergence Theory of saddle functions, Trans. Amaer Math. Soc., 280, n°1, 1-14, (1983).

[4] H. Attouch, D. Azé, R, Wets: Convergence of convex-concave saddle functions, Ann, Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire, 5, 532-572, (1988).

[5] K. Mouallif: convergence variationnelle et méthods perturbeés pour les problèmes d'optimisation et point-selles, "Thése", universitéde liege, (1989).

[6] R. Rockafellar: Generalized second derivatives of convex functions and saddle functions, preprint.

[7] M. Soueycatt: Analyse epi/hypo-graphique. J. Convex Analysis, vol. II, (13), 1-55, (1991).

[8] R. Rockafellar: convx Analysis Princeton University Press, Princeton N. J (1970)

[9] J. J. Moreau: Théoréme "inf-sup" C. R. A. S, T. 285, 2720-2722, (1964).

[10] K. Torralba: convergence epigraphique et changements d'echelle en analyse variationelle et optimization. "Thése", Université de Monpellier II, (1996).

[11] M. Soueycatt: Epi-convergence et convergence des sections. Application à la stabilité des e – points-selles. A. V. A. M. C. vol. II, (1987).

[12] H. Attouch, R. Wets: Epigraphic analysis, analyse non linéaire, Gauthiers-villars, paris, 74-99, (1989).

[13] H. Attouch, R. Wets: Quantitative stability of varational systems: I. The epigraphical distance. Tran. Amer. Soc. 328 (2), 695-729, (1991).

[14] D. Azé, J. Penot: Operations on convergent families of sets and functions. A. V. A. M. C. vol. I, (1987).

[15] G. Beer: Conjugate convex function, and the epi-distance topology, Proc. Amer. Soc. 108, 117-126, (1991).

[16] G. Beer, R. Lucchetti: Coninuity results for the epi-distance topology with applications to convex optimization problems, (preprint).

[17] H. Riahi: Stability results for optimization problems relativey to epigraphic distance. Applications to non linear programming. A. V. M. A. C. vol. II, (1987).

[18] J. Aubin, P. Ekland: Applied nonlinear analysis. J. Wiley intersciences, New York, (1984).