مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (24) العدد (12)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (24) No (12) 2002

أثر بعض التحويلات المحافظة على منحنيات ريس وعلى معامل الاستمرار

الدكتور محمد سليم علي *

(قبل للنشر في 2002/9/18)

□ الملخّص □

نعالج في هذا البحث مسألة تأثير بعض التحويلات المحافظة (الخطي،المقلوب و جوكوفسكي) على مفهومين من مفاهيم نظرية تقريب التوابع وهما أسرة منحنيات ريس ومعامل الاستمرار حيث بينا أن هذه التحويلات تنقل منحنيات ريس إلى منحنيات من الأسرة نفسها.

كما برهنا على أن التحويل الخطي والتحويل المقلوب يحققان التكافؤ بين معامل الاستمرار وصورته وفق هذين التحويلين.

الكلمات المفتاح:منحنيات ريس– تحويل محافظ–معامل الاستمرار.

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سوريا.

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (24) العدد (12)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (24) No (12) 2002

the Effect of Some Conformal Mapping on Riesz Curvs and on Modulus of Continuity

Dr. Mohammad Ali *

(Accepted 18/9/2002)

□ ABSTRACT □

In this paper we study the effect of some conformal mappings (linear , inversion and Joukowski) on two terms from approximation theory of complex functions. We find that these functions transform the curves from Riesz class into curves from the same class.

Moreover we prove that the modulus of continuity and it`s image by linear and inversion transforms are equivalents.

Key words : Riesz curves, conformal mappings, modulus of continuity

* **Lecturer, Department of mathematics. Faculty of science, Tishreen university, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن[2] تعريف أسرة منحنيات ريس يعطى من خلال وجود تكامل كوشي الشاذ ومحدوديته في فضاء التوابع القابلة للمكامله L_p . انطلاقا من أهمية هذا التعريف درسنا في هذا البحث تأثير بعض التحويلات المحافظة (الخطي، المقلوب، جوكوفسكي) على أسرة منحنيات ريس وقد وجدنا أن هذه التحويلات تحافظ على الخاصة التي تتمتع بها أسرة منحنيات ريس أي أن صورة منحنيات ريس وفق هذه التوابع هي أيضاً منحنيات من الأسرة نفسها.

إن هذا العمل بشكل عام مستقل بحد ذاته كما أنه مساعد في الكثير من فروع الرياضيات وبشكل خاص في نظرية تقريب التوابع العقدية، لذلك فقد درسنا تأثير التحويل الخطي والتحويل المقلوب على مفهوم أساسي من مفاهيم نظرية تقريب التوابع العقدية وهو معامل الاستمرار[1] و[6] وقد بينا أن معامل الاستمرار وصورته وفق هذين التابعين متكافئان.

تعريف:[2] فضاء التوابع العقدية L_P الموزن :

ليكن $B(z)$ تابعا مختلفا عن الصفر و محدودا في كل مكان تقريبا على المنحني Γ ومقيسا على Γ ،إذا كان التابع العقدي f المعرف على Γ مقيسا على Γ وكان $|Bf|^P$ قابلا للمكاملة حسب ليبغ على طول المنحني Γ عندئذ يكون f تابعا من الفضاء الموزن L_P ،الذي يرمز له بالرمز $L_p(\Gamma,B)$ ،أما التابع $B(z)$ فيسمى تابع الوزن.

ومن المعلوم أن الفضاء الموزن $L_p(\Gamma,B)$ مع النظيم المعرف بالشكل التالي:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma,B)}=\left(\int_\Gamma |f(z)B(z)|^P|dz|\right)^{1/P}$$ هو فضاء باناخ

في الحالة الخاصة التي يكون فيها: $B(z)=1$ يكون: $L_P(\Gamma)=L_p(\Gamma,B)$.

ويكون النظيم في الفضاء $L_P(\Gamma)$ معطى بالعلاقة التالية:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)}=\left(\int_\Gamma |f(z)|^P|dz|\right)^{1/P}$$

تعريف: ليكن A و B مقدارين موجبين .نقول أن A تكافئ B ونكتب $A\approx B$ إذا وجد ثابتان $C_1>0$ و $C_2>0$ بحيث يكون

$$C_1B\le A\le C_2B$$

ونقول أن A مقارن مع B إذا وجد ثابت $C>0$ بحيث يكون: $A\le CB$ ونكتب عندئذ $A\prec B$

ليكن لدينا المنحني Γ الذي يقبل الانتقال بشكل محافظ إلى المنحني Γ_* عندئذ يكون:

مبرهنه: 1:

ليكن $t=\gamma(z)$ تحويلا محافظا من المستوي z في المستوي t بحيث ينقل المنحني Γ إلى المنحني Γ_* وليكن $z=\varphi(t)$ تابعه العكسي(الفرع المناسب) ويحقق الشرط $|\varphi'(t)|\approx 1$ ($|\varphi'(t)|$ محدود) عندئذ يكون:

$$f\in L_p(\Gamma)\Leftrightarrow f_*\in L_p(\Gamma_*)$$

مع العلم أن: $f_*(t)=f(\varphi(t))$ و $t\in C$

البرهان: لدينا

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)}=\left(\int_\Gamma |f(z)|^P|dz|\right)^{\frac{1}{P}}=$$

$$= \left(\int_{\Gamma_*} |f(\sigma(t))|^p |\sigma'(t)| |dt|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\approx \left(\int_{\Gamma_*} |f_*(t)|^p |dt|\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_*\|_{L_p(\Gamma_*)}$$

ومنه يكون

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} \approx \|f_*\|_{L_p(\Gamma_*)} \qquad (1)$$

أي أن

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \|f_*\|_{L_p(\Gamma_*)} < \infty$$

<u>تعريف: يعرف تكامل كوشي الشاذ بواسطة العلاقة[2] :</u>

$$S_\Gamma f = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-t}dz \qquad ; \qquad t\in \Gamma$$

ويرمز له بالرمز $S_\Gamma f$

تعريف أسرة منحنيات R_p :[2]

يرمز عادة لاسرة منحنيات ريس بالرمز R_p وهي عبارة عن مجموعة المنحنيات ذات الطول المحدود والتي من اجلها يكون :

$$\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma)} \le c(p)\|f\|_{L_p(\Gamma)} \quad ;\forall\ p>1$$

وسوف نرمز بـ R_p $R = \bigcap_{p>1} R_p$.

<u>مبرهنه 2 :</u>

ليكن Γ منحن صورته وفق التحويل الخطي $t=\gamma(z)=az+b$

$(a\neq 0)$ هي Γ_* عندئذ يكون :

$$\Gamma\in R \Leftrightarrow \Gamma_*\in R$$

البرهان: ليكن $f(z)\in L_p(\Gamma)$ ولنعتمد الرمز $f_*(t)=f\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ، $(a\neq 0)$ و $t\in C$ عندئذ:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma_*} \left|\left(S_{\Gamma_*} f_*\right)(t)\right|^p \frac{|dt|}{|a|}\right)^{\frac{1}{p}} \approx \|S_{\Gamma_*} f_*\|_{L_p(\Gamma_*)}$$

أي أن :

$$\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma)} \approx \|S_{\Gamma_*} f_*\|_{L_p(\Gamma_*)} \qquad (2)$$

نأخذ الآن : $\Gamma\in R$ ولنبرهن أن $\Gamma_*\in R$ أيضا.

لدينا:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma)} \prec \|f\|_{L_p(\Gamma)}$$

من العلاقة (2) والعلاقة (1) يكون :

$$\left\| S_{\Gamma_*} f_* \right\|_{L_p(\Gamma_*)} \le \left\| S_{\Gamma} f \right\|_{L_p(\Gamma)} \le \left\| f \right\|_{L_p(\Gamma)} \le \left\| f_* \right\|_{L_p(\Gamma_*)}$$

أي أن $\Gamma_* \in R$

بنفس الطريقة نأخذ $\Gamma_* \in R$ ونبرهن أن $\Gamma \in R$.

سوف نورد الآن تعريف بعض التحويلات الشهيرة والتي تعرف عادة باسم تحويلات ريمان لأنها تعرف من خلال نظرية ريمان الشهيرة في التحويلات المحافظه ومن خلال شروط نظرية التحويلات المحافظة الواجب توفرها في الساحة (المنحني) المراد تحويلها (تحويله) .(انظر [3] و [4]):

سنرمز بـ $w=\varphi(z)$ للتحويل المحافظ الذي يحوّل خارج المنحني المغلق Γ إلى خارج الدائرة الواحدية $\gamma_0=\{w; |w|=1\}$

،وليكن $Z=\Psi(w)$ – تابعه العكسي وبحيث يكون: $\varphi'(\infty)>0; \varphi(\infty)=\infty$

ولنضع $z_{\pm\eta}=\Psi\left[\varphi(z)e^{\pm i\eta}\right]$.

وسوف نرمز بـ $w=\varphi_*(t)$ للتحويل المحافظ الذي يحوّل خارج Γ_* إلى خارج الدائرة الواحدية γ_0 و Ψ_* هو التابع العكسي له .

$$t_{\pm\eta}=\Psi_*\left(\varphi_*(t)e^{\pm i\eta}\right) \quad \forall \eta \in [-\pi, \pi]$$

أود أن أنوه الى أن تعريف تحويلات ريمان بنفس الطريقة السابقة ورد في[2]

نعرف الآن معامل الاستمرار من المرتبة الثانية للتابع $f \in L_p(\Gamma)$ بواسطة العلاقة :

$$\omega_p^2(f,\delta)=\sup_{|\eta|\le\delta}\left\| f(z_\eta)+f(z_{-\eta})-2f(z)\right\|_{L_p(\Gamma)} = \sup_{|\eta|\le\delta} J_1(\eta) \qquad (3)$$

وأيضاً للتابع $f_* \in L_p(\Gamma_*)$ (Γ_* صورة Γ وفق $t=\alpha z+\beta$) بواسطة العلاقة :

$$\omega_p^2(f_*,\delta)=\sup_{|\eta|\le\delta}\left\| f_*(t_\eta)+f_*(t_{-\eta})-2f_*(t)\right\|_{L_p(\Gamma_*)} = \sup_{|\eta|\le\delta} J_2(\eta) \qquad (4)$$

مبرهنة 3 : مهما تكن $\eta \in [-\pi, \pi]$ يكون :

$$J_1(\eta) \approx J_2(\eta) \qquad (5)$$

البرهان : نلاحظ أنه يمكن أن نحول المنحني Γ إلى الدائرة γ_0 بطريقتين :

الأولى : بشكل مباشر وفق $w=\varphi(z)$

الثانية : من خلال تحويله أولاً إلى Γ_* وفق $t=\alpha z+\beta$ ومن ثم إلى الدائرة γ_0 من خلال $w=\varphi_*(z)$ مما سبق نستنتج أن:

$$\varphi(z)=\varphi_*(\alpha z+\beta) \qquad (6)$$

ويكون :

$$\Psi(w)=\frac{1}{\alpha}\left(\Psi_*(w)-\beta\right) \qquad (7)$$

من (6) و (7) ومن كون $f_*(t)=f(z)$ ينتج أن :

أي أن $f_*(t_{\pm h})=f(z_{\pm h})$:

$$J_1(h)=\| f(z_h)+f(z_{-h})-2f(z)\|_{L_p(\Gamma)} =$$

$$=\left(\int_{\Gamma} |f(z_h)+f(z_{-h})-2f(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left(\int_{\Gamma_*} |f_*(t_h)+f_*(t_{-h})-2f_*(t)|^p\left|\frac{dt}{a}\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\approx \| f_*(t_h)+f_*(t_{-h})-2f_*(t)\|_{L_p(\Gamma_*)}$$

وبالتالي : $J_1(h)\approx J_2(h)$

من هذه المبرهنة نلاحظ التكافؤ بين معامل الاستمرار على المنحني Γ ومعامل الاستمرار على المنحني Γ_* .

لنرمز بـ Γ_1 لصورة المنحني Γ من خلال التحويل $z_1=\frac{1}{z}$ حيث أن $z=0$ نقطة واقعة داخل المنحني Γ. عندها و بنفس طريقة برهان المبرهنة 2 تكون صحيحة المبرهنة التالية:

مبرهنة4 :

$$\Gamma\in R \Leftrightarrow \Gamma_1\in R \qquad (8)$$

لنرمز بـ $u=\varphi_1(z_1)$ للتحويل المحافظ الذي يحوّل داخل المنحني Γ_1 إلى داخل الدائرة الواحدية $\gamma_1=\{u:|u|=1\}$, $z_1=\Psi_1(u)$ تابعه العكسي حيث أن $\varphi_1(0)=0$ و $\varphi_1'(0)>0$ وليكن أيضا $f_1(z_1)=f(\varphi_1(z_1))$ ولنعرف معامل الاستمرار من المرتبة الثانية لهذا التابع بالشكل التالي:

$$\omega_p^2(f_1,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\| f_1(z_1)_h+f_1(z_1)_{-h}-2f_1(z_1)\|_{L_p(\Gamma_1)}$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} J_3(h) \qquad (9)$$

حيث أن :

$$h\in[-\pi,\pi]\quad ,\quad (z_1)_{\pm h}=\Psi_1\left(\varphi_1(z_1)e^{\pm ih}\right)$$

مبرهنة5 :

مهما يكن $h\in[-\pi,\pi]$ يكون :

$$J_1(h)\approx J_3(h) \qquad (10)$$

البرهان : نلاحظ أن المنحني Γ يمكن تحويله إلى الدائرة $\gamma_0=\{w:|w|=1\}$ بطريقتين :

الأولى : بشكل مباشر من خلال التحويل $w=\varphi(z)$.

الثانية من خلال تركيب التحويل $z_1=\frac{1}{z}$ إلى Γ_1 و $u=\varphi_1(z_1)$ إلى الدائرة γ_1 ومن ثم $w=\frac{1}{u}$ إلى الدائرة γ_0 أي أن :

$$w=\frac{1}{u}=\frac{1}{\varphi_1(z_1)}=\frac{1}{\varphi_1(\frac{1}{z})}$$

مما سبق نستنتج أن:

$$\varphi(z)=\varphi_1^{-1}(\frac{1}{z}) \qquad (11)$$

ويكون:

$$\Psi(w)=\Psi_1^{-1}(\frac{1}{w}) \qquad (12)$$

من العلاقتين(11)و(12) ومن كون $z=\frac{1}{z_1}$ نجد أن $z_{\pm h}=\left(\frac{1}{z_1}\right)_{\pm h}$. وبذلك نحصل على العلاقة(10)

ندخل الآن في دراستنا تحويل جوكوفسكي $z=V+\frac{1}{V}$ وتابعه العكسي $V=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$

__مبرهنة مساعدة__ [5]: ليكن $\Gamma\in R$ عندئذ يكون تكامل كوشي الشاذ $S_\Gamma f$ محدوداً في الفضاء الموّزن $L_p(\Gamma,B)$ حيث أن:

$$B(z)=\prod_1^n |z-z_K|^{\alpha_k}$$

$$-\frac{1}{p}<\alpha_k<\frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

أي أن :

$$\| S_\Gamma f \|_{L_p(\Gamma,B)} \leq \| f \|_{L_p(\Gamma,B)}$$

نعطي الآن المبرهنة الرئيسية في هذا العمل مع العلم أن هذه النظرية تخص الأسرة R_P وذلك في حالة $P=2$.

__مبرهنة 6__ : لتكن C صورة المنحني $\Gamma\in R_2$ وفق تحويل جوكوفسكي عندئذ:

إذا كان $\Gamma\in R_2$ فإن $C\in R_2$

البرهان :

سوف نبرهن على أن تكامل كوشي الشاذ على المنحني C محدود في الفضاء $L_2(C)$ انطلاقاً من كونه محدودا في الفضاء $L_2(\Gamma)$.

لنأخذ $F(V)\in L_2(C)$ ولندخل الرمز:

$$F\left(\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)\right)\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right)^{\frac{1}{2}}=f(z)$$

من الواضح أن: $f(z)\in L_2(\Gamma)$

وذلك لأن :

$$\left[\int_{\Gamma}\left|F\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2|dz|\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\int_{C}\left|F(V)\right|^2|dV|\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

ومنه نستطيع أن نكتب :

$$F(V)\in L_2(C)\Leftrightarrow f(z)\in L_2(\Gamma)\Leftrightarrow F_*(z)\in L_2(\Gamma,\beta) \qquad (13)$$

حيث أن :

$$F_*(z)=F\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)$$

$$\beta(z)=\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right|^{\frac{1}{2}}$$

لنأخذ الآن :

$$V=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\quad ,t=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$I=\int_{C}\frac{F(V)}{V-t}dv=\int_{\Gamma}\frac{F\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}}{\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}-\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}}dz$$

$$=\int_{\Gamma}\frac{F_*(z)\times\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{\sqrt{z^2-4}}}{z+\sqrt{z^2-4}-t-\sqrt{t^2-4}}dz=$$

$$=\int_{\Gamma}\frac{F_*(z)\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{\sqrt{Z^2-4}}\left(z+\sqrt{z^2-4}-t+\sqrt{t^2-4}\right)}{\left(z+\sqrt{z^2-4}-t-\sqrt{t^2-4}\right)\left(z+\sqrt{z^2-4}-t+\sqrt{t^2-4}\right)}dz$$

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام نجد أن:

$$I=\int_{\Gamma}\frac{F_*(z)\left(z+\sqrt{z^2-4}-t+\sqrt{t^2-4}\right)}{2(z-t)\sqrt{z^2-4}}dz$$

$$=\int_{\Gamma}\frac{\frac{1}{2}F_*(z)\left(z-t+\sqrt{z^2-4}\right)}{(z-t)\sqrt{z^2-4}}dz+\int_{\Gamma}\frac{\frac{1}{2}F_*(z)\left(t^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}{(z-t)\sqrt{z^2-4}}dz$$

ومنه يكون :

$$\int_C \frac{F(V)}{V-t}\,dv = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{2}F_*(z)}{z-t}\,dz + \int_\Gamma \frac{\frac{1}{2}F_*(z)}{\left(z^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}\,dz + \frac{1}{2}\left(t^2-4\right)^{\frac{1}{2}} \int_\Gamma \frac{F_*(z)\left(z^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}}{z-t}\,dz \tag{14}$$

نأخذ نظيم الطرفين في الفضاء $L_2(c)$ فيكون :

$$\| S_C\, F \|_{L_2(C)} = \left[\int_c \left|\int_c \frac{F(V)}{V-t}\,dv\right|^2 |\,dt\,|\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_c \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{z-t}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\int_c \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{\left(z^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\int_c \left| t^2-4\right|^{\frac{1}{2}} \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)\left(z^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}}{z-t}\,dz\right|^2 |dt|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma \left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2\sqrt{t^2-4}}\right| \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{z-t}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma \left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2\sqrt{t^2-4}}\right| \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{(Z^2-4)^{\frac{1}{2}}}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma \left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right| \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)\left(Z^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}}{Z-t}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}} = N_1 + N_2 + N_3 \tag{15}$$

نقوم الآن بتقدير المقادير N_3, N_2, N_1 كما يلي :

لدينا : $F_* \in L_2(\Gamma, b)$ حيث أن $b(z) = \left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right|^{\frac{1}{2}}$ ومنه وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة يكون:

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma \left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2\sqrt{t^2-4}}\right| \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{z-t}\,dz\right|^2 |\,dt\,|\right)^{\frac{1}{2}} \prec$$

$$\prec \left(\int_\Gamma \left| F_*(z) \cdot \left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2 |\,dz\,|\right)^{\frac{1}{2}} = \| f \|_{L_2(\Gamma)}$$

وبالتالي من العلاقة (13) ينتج أن :

$$N_1 \prec \| F \|_{L_2(C)} \tag{16}$$

نأخذ الآن N_3 ونرمز بـ $f_*(z) = F_*(z) \cdot \left(Z^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}$

من الواضح أن $f_*(z) \in L_2(\Gamma, b_1)$

حيث أن : $b_1(z) = \frac{1}{2}\left|z+\sqrt{z^2-4}\right|$

منه وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة وعلى العلاقة (13) يكون :

$$\left(\int_\Gamma \left| b_1(t)\int_\Gamma \frac{f_*(z)}{z-t}\,dz\right|^2 |dt|\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_\Gamma \left|f_*(z)\, b_1(z)\right|^2 |dz|\right)^{\frac{1}{2}}$$

أي أن :

$$N_3 \le \left(\int_\Gamma \left|F_*(z)\cdot\left(z^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left|z+\sqrt{z^2-4}\right|^{\frac{1}{2}}\right|^2 |dz|\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_\Gamma \left|F_*(z)\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}}\right|^2 |dz|\right)^{\frac{1}{2}} = \| f \|_{L_2(\Gamma)} \le \| F \|_{L_2(C)} \qquad (17)$$

نأخذ الآن N_2 ونعتمد في تقديرها على كون $\left|z+\sqrt{z^2-4}\right| \approx 1$. بما أن النقطة $Z=0$ تقع داخل المنحني المغلق C فإن :

$$\int_\Gamma \frac{|dz|}{\left|z^2-4\right|^{\frac{1}{2}}} \le 1 \Rightarrow \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{\left(z^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}\,dz\right|^2 = \left|\int_\Gamma \frac{\sqrt{2}\, f(z)dz}{\left(z^2-4\right)^{\frac{1}{4}}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|^2 \le$$

$$\le \sqrt{2}\int_\Gamma |f(z)|^2 |dz| \int_\Gamma \frac{|dz|}{\left|\left(\sqrt{z^2-4}\right)\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)\right|} \le \int_\Gamma |f(z)|^2 |dz| \, . \qquad (18)$$

مما سبق ومن العلاقتين (18) و (13) يكون :

$$N_2 = \left(\int_\Gamma \left|\int_\Gamma \frac{F_*(z)}{\left(z^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}\,dz\right|^2 \left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2\sqrt{t^2-4}}\right| |dt|\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \| f \|_{L_2(\Gamma)} \le \| F \|_{L_2(C)} \qquad (19)$$

وبالتالي، من العلاقات (15) و (16) و (17) و (19) يكون :

$$\| S_C F \|_{L_2(C)} \le \| F \|_{L_2(C)}$$

أي أن $C \in R_2$ وهو المطلوب .

المراجع:

....

1-Kerneichuk,N. (1991) Exact Constants in approximation Theory. Cambridge University Press, Cambridge .

2-Ali,M. (1990) Problems in the Theory of approximation of Functions in Complex Plane. Ph.D dissertation ,University Of Baku .

3-Ziadik ,B.K (1997) Introduction To The Theory Of regular polynomiol approximation of functions .Nauka,Moscow .

4-Hair , D. (1986) lectures in the theory approximation in complex plane. Mir, Moscow .

5-Mamedhanov ,G.(1980) . Weighted polynomial approximation in complex plane, Modern problems in function theory, Material of conferenc in function theory, Baku .

6-Jeeresy, A, (1992). Complex Analysis and approximation CRC press, inc ,London