مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

تعيين الاهتزازات الطولانية اللاخطية لقضيب من مادة مرنة لزجة فعالة

الدكتور حسن محمد خليفة*

(تاريخ الإيداع 24 / 3 / 2013. قُبِل للنشر في 29 / 5 /2013)

ملخّص

إن الهدف من البحث المقدم في هذا العمل هو إيجاد طريقة موحدة لحل مسائل الاهتزازات الطولانية في الأوساط المرنة اللزجة اللاخطية بوجود العامل البيولوجي. وحل هذه المسألة بالنسبة لقضيب منتهي الطول.

الكلمات المفتاحية: مرونة، لزوجة ، لاخطية، اهتزاز، رد فعل، بيولوجي

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

Specification of Longitudinal Nonlinear Vibration of Viscoelastic Affective bar.

Dr. Hasan Mohammad Khalifeh*

(Received 24 / 3 / 2013. Accepted 29 / 5 /2013)

□ ABSTRACT □

The main goal of the presented research in this paper is to find a unified way to solve longitudinal vibration problems in nonlinear viscoelastic media with a biological factor.

and solve the problem in a bar of finite length.

Key Words: Elastic, viscid, Nonlinear, vibration, Reaction, Biological.

***Assistant Professor, Department of mathematics Faculty of science, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

إن النسيج البيولوجي بناء معقد التركيب إنه يتكون من عناصر مرنة ولزجة وعناصر تربط فيما بينها. تظهر في المنظومات البيولوجية عند تعرضها لمؤثرات ميكانيكية (صناعية أو طبيعية) حركات ميكانيكية "انتشار أمواج، ظهور تشوهات، إجهاد،....." وتتعلق ردود الأفعال على هذه المؤثرات بالخواص الميكانيكية للنسيج البيولوجي. إنّ مسألة الاهتزازات من أهم التأثيرات الميكانيكية التي يتعرض لها الإنسان، حيث يعتبر الجسم البشري من وجهة نظر الميكانيك البيولوجي جسماً قابلاً للتشوه يخضع لتأثيرات ميكانيكية وغير ميكانيكية.

أهمية البحث وأهدافه:

إن مسألة دراسة العمليات الاهتزازية لمجموعات مختلفة مهمة عملياً وعلمياً، ونكتفي بالإشارة هنا إلى الجانب المهم لهذه المسألة والذي يتركز على البحث عن طرق حماية المنشآت والمخلوقات الحية، بينما الهدف الرئيسي لهذه الدراسة هو توضيح العمليات الاهتزازية.

طرائق البحث وموارده:

تم بالاعتماد على طريقة نشر تابع الإزاحة الطولانية في سلسلة قوى وطريقة تحليل فورييه إيجاد طريقة لحل المسألة المدروسة.

تختلف هذه الدراسة للمنظومات المشار إليها في أنها فضلاً على التأثيرات الكلاسيكية وإلى أن الخواص الميكانيكية الموروثة للمواد لاخطية [10,9] تأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي [8, 6].

يقدم هذا العمل حل لمسألة الاهتزازات الطولانية لقضيب منتهي الطول بوجود الخواص المذكورة أعلاه بالاعتماد على النموذج الموجود في العمل [4] وعلى المعادلة اللاخطية للأوساط المرنة الوراثية (عند الكائنات الحية) [2]:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + K^{*}\sigma$$

$\varphi(\varepsilon)$ – معادلة منحني التشوه اللحظي.

K^{*} – معامل التسلق للأنواع الوراثية.

I – المعادلة الأحادية البعد للأوساط اللاخطية المرنة اللزجة الوراثية بوجود العامل البيولوجي [4] لها الشكل:

$$(1-A)\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\Gamma^{*})\varphi(\varepsilon)\right] + A\,\tau\frac{\partial^{2}}{\partial x\,\partial t}\left[(1-\Gamma^{*})\varphi(\varepsilon)\right] = \rho\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}} \qquad (1.1)$$

هنا A و τ ثوابت فضلاً على أن τ – بارامتر يصف تأخر رد فعل الوسط. Γ^{*} – عامل الحل لتسلق مادة القضيب.

إذا اعتبارنا أنّ نواة عامل الحل Γ^{*} نظامية فتأخذ المعادلة (1.1) الشكل:

$$\begin{aligned}&(1-A)\varphi'_{\varepsilon}(\varepsilon)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + A\,\tau\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi'_{\varepsilon}(\varepsilon)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\right] - (1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\varphi'_{\varepsilon}(\varepsilon)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\,ds - \\ &- A\,\tau\,\Gamma(0)\varphi'_{\varepsilon}(\varepsilon)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} - A\,\tau\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\Gamma(t-s)}{\partial t}\varphi'_{\varepsilon}(\varepsilon)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\,ds = \rho\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\end{aligned} \qquad (1.2)$$

والاشتقاق هنا يتم حسب المتغير المستقل الموافق.

سنعتمد على معادلة الحركة (1.2) في دراسة مسألة انتشار الأمواج التوافقية في قضيب محدود الطول ويملك خاصية رد الفعل على التأثيرات الخارجية (يملك صفة بيولوجية) بالإضافة إلى أن مادة القضيب مرنة لزجة لاخطية.

نأخذ في المعادلة (1.2) الدالة $\varphi(\varepsilon)$ اللاخطية للتشوه اللحظي بالصيغة المعطاة في [3]:

$$\varphi(\varepsilon)=a\ln(1+b\varepsilon) \tag{1.3}$$

حيث a , b أعداد ثابتة فضلاً على أن b بارامتر فيزيائي صغير جداً 0<b<<1. كذلك ندخل المقادير الديلونية (مقادير مجردة من وحدات القياس) التالية:

$$\tilde{x}=\frac{x}{\ell}\ ,\ \tilde{u}=\frac{u}{\ell}\ ,\ \tilde{\tau}=\frac{\tau}{T_o}\ ,\ \tilde{t}=\frac{t}{T_o}\ ,\ \tilde{\varepsilon}=\varepsilon\ ,\ \tilde{\omega}=\omega T_o\ ,\ \tilde{a}=\frac{aT_o^2}{\rho\ell^2}$$

هنا: $c_o=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}\ ,\ T_o=\dfrac{\ell}{c_o}$

بالأخذ بعين الاعتبار المقادير الديلونية ومنشور الدالة (1.3) في المعادلة (1.2) نحصل بعد أن أهملنا فيها الإشارة فوق المقادير الديلونية للسهولة لاحقاً على المعادلة الآتية:

$$\begin{aligned}&\left[(1-A)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k+\\&+A\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+1)\lambda^{k+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k\right)-\\&-(1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k\right)ds-\\&-A\tau\Gamma(0)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\\&-A\tau\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\Gamma(t-s)}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k\right)ds=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{1.4}$$

حيث $\lambda\equiv b$ بارامتر صغير، $ab=E$ ، $E-$ معامل المرونة اللحظي ليونغ و $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon$ علاقة كوشي للتشوه الطولاني.

تحوي المعادلات (1.4) على بارامترين صغيرين غير مقاسين هما $\lambda-$ بارامتر لاخطية منحني التشوه اللحظي، $\tau-$ بارامتر تأخر رد الفعل (العامل البيوجي)

ننشر االدالة المراد تعيينها $u(x,t)$ في سلسلة بقوى البارامترين λ و τ فتأخذ الشكل:

$$u(x,t)=\sum_{m,n}\lambda^m\tau^n u_{m,n}(x,t) \tag{1.5}$$

نأخذ بعين الاعتبار أن معادلة النموذج البيولوجي [4] التي اعتمدنا عليها قد تم الحصول عليها بدقة حتى الدرجة الأولى للبارامتر τ و من أجل دقة النشر (1.5) نأخذ العلاقة بين البارامترين λ و τ على الشكل: $\lambda\sim\tau^{\frac{1}{2}}$ عندئذٍ نقتصر فيها على الحدود التي توافق الأزواج $(m,n)=(0,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (2,0)$.

سيتم في هذا العمل الحصول على حلول المعادلات الموافقة للأزواج الثلاثة الأولى.

نعوض النشر (1.5) في المعادلة (1.4) ونقارن الحدود المتساوية المراتب في الصغر فنحصل على جملة معادلات تكاملية تفاضلية مترابطة تسمح بتعيين الدوال $u_{1.0}(x,t)$, $u_{0.1}(x,t)$, $u_{0.0}(x,t)$.

$$(1-A)\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial t^2}-(1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}ds=0 \qquad (1.6)$$

$$\begin{aligned}(1-A)\frac{\partial^2 u_{0,1}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{0,1}}{\partial t^2}-(1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u_{0,1}}{\partial x^2}ds= \\ =A\left(\Gamma(0)\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 u_{0,0}}{\partial x^2\partial t}\right)+A\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\Gamma(t-s)}{\partial t}\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}ds\end{aligned} \qquad (1.7)$$

$$\begin{aligned}(1-A)\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial t^2}-(1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x^2}ds= \\ =(1-A)\left(\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}-\frac{\partial u_{0,0}}{\partial x}\right)-(1-A)\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}\frac{\partial u_{0,0}}{\partial x}ds\end{aligned} \qquad (1.8)$$

والتي تعين بدورها الحل العام لـ (1.5).

II – إذا فرضنا أن الطرف الأيسر للقضيب ذو الطول غير المقاس $\ell=1$ يخضع لاهتزاز مطاله u_0 وتردده ω والطرف الأيمن حر من أي تأثير. فتأخذ الشروط الحدية الشكل الآتي:

$$u(x,t)=u_0\cos\omega t \quad ; \; x=0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \quad ; \; x=\ell \qquad (2.2)$$

تسمح هذه الشروط بصياغة الشروط الحدية للدوال $u_{m,n}(x,t)$ وتحديد المنحنيات الموافقة للمسألة وتبيان أثر الاهتزازات الصغيرة [7] في هذه الحالة، علماً أن نواة معامل الارتخاء لها الشكل النظامي [2]: $\Gamma(t-s)=\eta\, e^{-\mu(t-s)} \; ; \; \eta,\mu-const$ في المعادلات (1.6) – (1.8).

حيث: μ بارامتر يصف قدرة المادة على تذكر التأثيرات التي تخضع لها و η بارامتر يصف لزوجة المادة.

تعد المعادلة (1.6) معادلة حركة كلاسيكية لوسط مرن لزج آحادي البعد. لذلك سنبحث وفق [5] عن حل المعادلة (1.6) في شكل سلسلة:

$$u_{0,0}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x,\gamma_k)e^{-i\gamma_k t} \qquad (2.3)$$

هنا γ_k – ثوابت غير معلومة البارامترات حالياً.

إذا عوضنا (2.3) في (1.6) نحصل من أجل $U_k(x,\gamma_k)$ على معادلة تفاضلية من الشكل:

$$U_k''+\frac{\gamma_k^2/(1-A)}{1-\eta/(\mu-i\gamma_k)}U_k=0 \qquad (2.4)$$

إذ الاشتقاق يتم بالنسبة للإحداثي x. البحث عن حل المعادلة (2.4) في شكل $U=e^{\lambda_k x}$ يقود إلى المعادلة المميزة الآتية:

$$\lambda_k^2+\frac{\gamma_k^2/(f_k+ig_k)}{(1-A)/\left[(\mu-\eta)^2+\gamma_k^2\right]}=0 \qquad (2.5)$$

هنا: $f_k=\mu^2-\mu\eta+\gamma_k^2$ و $g_k=\eta\gamma_k$

إذ للمعادلة المميزة حلول من الشكل: $\lambda_k=A_k\pm B_k$ وحيث:

$$A_k=\frac{|\gamma_k|}{\sqrt{2}(1-A)^{1/2}}\left[\frac{(f_k+ig_k)^{1/2}-f_k}{(\mu-\eta)^2+\gamma_k^2}\right]^{1/2}$$

$$B_k=\frac{|\gamma_k|}{\sqrt{2}(1-A)^{1/2}}\left[\frac{(f_k+ig_k)^{1/2}+f_k}{(\mu-\eta)^2+\gamma_k^2}\right]^{1/2} \qquad (2.6)$$

بهذا الشكل فإن حل المعادلة (2.4) يأخذ الشكل:

$$(2.7)\ U_k(x,\gamma_k)=C_{k1}e^{\lambda_k x}+C_{k2}e^{-\lambda_k x}$$

تعين الثوابت C_{k1}, C_{k2} من الشروط الحدية.

انطلاقاً من الشروط المفروضة على طرفي القضيب (2.1) و (2.2) يصبح لدينا:

$$(2.8)\ U_k(0)=u_k^0$$

$$(2.9)\ \left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=\ell}=0$$

ومن (2.8) و (2.9) نحصل على:

$$C_{k2}=C_{k1}e^{2\lambda_k\ell} \quad ; \quad C_{k1}=\frac{u_k^0}{1+e^{2\lambda_k\ell}} \qquad (2.10)$$

وبالتالي تأخذ الدالة $U_k(x,\gamma_k)$ الشكل التالي:

$$(2.11)\ U_k(x,\gamma_k)=\frac{u_k^0\,e^{\lambda_k x}}{1+e^{2\lambda_k\ell}}\left[1+e^{2\lambda_k(\ell-x)}\right]$$

إن تحقق الشروط الحدية (2.9) يؤدي بدوره إلى تحقق الشروط (2.2) ومن أجل تحقق الشروط الحدية (2.1) نفرض $u_1^0=u_2^0=\frac{u_0}{2}$ و $u_k^0=0\ ;\ k\geq 3$ وكذلك $\gamma_1=-\gamma_2=\omega$. عندئذٍ فإن الحل (2.3) للمسألة (1.6) ، (2.1) ، (2.2) سيأخذ الشكل:

$$(2.12)\ \frac{u_{0,0}(x,t)}{u_0}=R(x,\omega)\cos[\omega t-\varphi(x,\omega)]$$

إذ السعة غير المقاسة تعين من العلاقة:

$$(2.13)\ R(x,\omega)=\left[\frac{\cos 2B_1(\ell-x)+ch2A_1(\ell-x)}{\cos 2B_1\ell+ch2A_1\ell}\right]^{1/2}$$

أما الطور الابتدائي للاهتزاز فيعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\varphi(x,\omega)=&-\arctan\left[\frac{shA_1x\sin B_1(2\ell-x)+shA_1(2\ell-x)\sin B_1x}{chA_1x\cos B_1(2\ell-x)+chA_1(2\ell-x)\cos B_1x}\right]+\\&+\begin{cases}0\ ;\ (chA_1x\cos B_1(2\ell-x)+chA_1(2\ell-x)\cos B_1x)>0\\ \pi\ ;\ (chA_1x\cos B_1(2\ell-x)+chA_1(2\ell-x)\cos B_1x)<0\end{cases}\end{aligned} \qquad (2.14)$$

– ننتقل الآن لحل المعادلة (1.7) من أجل تعيين الدالة $u_{0,1}(x,t)$. انطلاقاً من أن الدالة $u_{0,0}(x,t)$ تكتب بالصيغة:

$$(2.15)\ u_{0,0}(x,t)=U_1(x,\omega)e^{-i\omega t}+\overline{U_1(x,\omega)}e^{i\omega t}$$

سنبحث عن حل للمعادلة (1.7) من الشكل:

$$(2.16)\ u_{0,1}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k(x,\gamma_k)e^{-i\gamma_k t}+\overline{V_k(x,\gamma_k)}e^{i\gamma_k t}\right]$$

نعوض (2.15) و (2.16) في (1.7) فنجد:

$$(2.17)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k''+\frac{\gamma_k^2/(1-A)}{1-\eta/(\mu-i\gamma_k)}V_k\right]e^{-i\gamma_k t}=B^*U_k''e^{-i\omega t}$$

إذ: $B^*=\dfrac{iA\,\omega}{1-A}$.

نضع: $\gamma_k=\omega k$ في (2.17) ونطابق حسب قوى $\cos\omega t$ [1] فنحصل على:

$$(2.18)\ V_1''+\frac{\omega^2\left(\mu^2-\mu\eta+\omega^2+i\omega\eta\right)}{(1-A)\left[(\mu-\eta)^2+\omega^2\right]}V_1=B^*\lambda_1^2\left(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{-\lambda_1 x}\right)$$

هنا C_1 , C_2 يحددان من العلاقة (2.10) و λ_1 من العلاقة (2.6). أما من أجل بقية قيم k فإننا نحصل على سلسلة من المعادلات التفاضلية المتجانسة التي تملك الحل الصفري من أجل الشروط الحدية المتجانسة.

يعطى حل المعادلة (2.18) بالصيغة:

$$(2.19)\ V_1=Ne^{\lambda_1 x}+Me^{-\lambda_1 x}+\frac{B^*\lambda_1^2}{2}x\left(C_1e^{\lambda_1 x}-C_2e^{-\lambda_1 x}\right)$$

إذ N و M ثوابت تعين من الشروط الحدية التي ستأخذ انطلاقاً من (2.1) و (2.2) و(2.8) و(2.9) الشكل الآتي:

$$u_{0,1}\Big|_{x=0}=\frac{\partial u_{0,1}}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0 \qquad (2.20)$$

وهذا بدوره يعطي:

$$V_1\Big|_{x=0}=\frac{\partial V_1}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0 \qquad (2.21)$$

عندئذٍ من أجل N و M نحصل على:

$$N=-M=-\frac{B^*\lambda_1\ell u_0 e^{\ell_1 x}}{2\left(e^{\lambda_1\ell}+e^{-\lambda_1\ell}\right)\left(1+e^{2\lambda_1\ell}\right)}$$

نعوض قيم N و M في (2.19) فيأخذ حل المعادلة (2.18) الشكل الآتي:

$$(2.22)\ V_1=f_2(x)+ig_2(x)$$

هنا:

$$f_2(x)=f_1(x)+2\left[\Gamma_3 sh\,A_1x\ \cos B_1x-\Gamma_4 ch\,A_1x\ \sin B_1x\right]$$
$$g_2(x)=g_1(x)+2\left[\Gamma_3 ch\,A_1x\ \sin B_1x-\Gamma_4 sh\,A_1x\ \cos B_1x\right]$$

وبدوره:

$$f_1(x)=\mathrm{Re}\left\{\frac{B^*\lambda_1}{2}x\left(C_1e^{\lambda_1 x}-C_2e^{-\lambda_1 x}\right)\right\}$$

$$g_1(x)=\mathrm{Im}\left\{\frac{B^*\lambda_1}{2}x\left(C_1e^{\lambda_1 x}-C_2e^{-\lambda_1 x}\right)\right\}$$

$$\Gamma_3=\mathrm{Re}\{N\} \qquad , \quad \Gamma_4=\mathrm{Im}\{N\}$$

نعوض (2.22) في (2.16) فنحصل على الشكل النهائي لحل المعادلة (1.7) في الصيغة الآتية:

$$(2.23)\; u_{0,1}(x,t)=2\left[f_2^2(x)+g_2^2(x)\right]^{1/2}\cos(\omega t-\psi(x,\omega))$$

حيث:

$$(2.24)\; \psi(x,\omega)=\arctan\frac{g_2(x)}{f_2(x)}+\begin{cases}0\ ; & f_2(x)>0\\ \pi\ ; & f_2(x)<0\end{cases}$$

- ننتقل لحل المعادلة (1.8) من أجل تعيين الدالة $u_{1,0}(x,t)$.

نعوض $u_{0,0}(x,t)$ من (2.15) في (1.8) فنحصل على المعادلة:

$$(2.25)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x^2}-\frac{1}{(1-A)}\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial t^2}-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)\frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x^2}ds=\\ &=Q_1(x)\cos 2\omega t+Q_2(x)\sin 2\omega t+Q_3(x)\end{aligned}$$

إذ:

$$\begin{aligned}Q_1(x)=&\,2a\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^{2A_1x}\cos 2B_1(x-\varphi)-\sqrt{k_3^2+k_4^2}\,e^{-2A_1x}\cos 2B_1(x-\psi)\right)-\\ &-2b\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^{2A_1x}\sin 2B_1(x-\varphi)+\sqrt{k_3^2+k_4^2}\,e^{-2A_1x}\sin 2B_1(x-\psi)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2(x)=&\,2b\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^{2A_1x}\cos 2B_1(x-\varphi)-\sqrt{k_3^2+k_4^2}\,e^{-2A_1x}\cos 2B_1(x-\psi)\right)+\\ &+2a\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^{2A_1x}\sin 2B_1(x-\varphi)+\sqrt{k_3^2+k_4^2}\,e^{-2A_1x}\sin 2B_1(x-\psi)\right)\end{aligned}$$

$$Q_3(x)=2\left[a^*\left(e^{2A_1x}-e^{2A_1(2\ell-x)}\right)+2b^*e^{2A_1\ell}\sin 2B_1(x-\ell)\right]$$

وبدوره فإن: $k_1=\mathrm{Re}\,C_1^2$ ، $k_2=\mathrm{Im}\,C_1^2$ ، $k_3=\mathrm{Re}\,C_2^2$ ، $k_4=\mathrm{Im}\,C_2^2$ و C_2,C_1 معينة بالعلاقة (2.10). وكذلك:

$$a=\mathrm{Re}\left[\frac{\mu^2-\mu\eta+4\omega^2-2i\omega\eta}{\eta^2+4\omega^2}(A_1+iB_1)^3\right]$$

$$b=\mathrm{Im}\left[\frac{\mu^2-\mu\eta+4\omega^2-2i\omega\eta}{\eta^2+4\omega^2}(A_1+iB_1)^3\right]$$

$$a^*=\mathrm{Re}\left[\frac{(\mu-\eta)\left(A_1^2+B_1^2\right)u_0^2}{8\eta\,e^{2A_1\ell}}(A_1+iB_1)\right]$$

$$b^*=\mathrm{Im}\left[\frac{(\mu-\eta)\left(A_1^2+B_1^2\right)u_0^2}{8\eta\,e^{2A_1\ell}}(A_1+iB_1)\right]$$

$$\varphi = \arctan\frac{k_2}{k_1}\ , \qquad \psi = \arctan\frac{k_4}{k_2}$$

سنبحث عن حل المعادلة (2.25) بالصيغة:

$$(2.26)\ u_{1,0}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[W_k(x,\gamma_k)e^{-2i\gamma_k t} + \overline{W_k(x,\gamma_k)}e^{2i\gamma_k t}\right] + f(x)$$

لنضع $\gamma_k = \omega k$ في المعادلة (2.26) عندئذٍ نجد:

$$(2.27)\ u_{1,0}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[W_k(x,\omega k)e^{-2i\omega k t} + \overline{W_k(x,\omega k)}e^{2i\omega k t}\right] + f(x)$$

إذ: $W_k(x,\omega k)$ دوال يجب تعيينها.نعوض (2.27) في (2.25) فنحصل على المعادلات التفاضلية الآتية من أجل الدوال $W_k(x,\omega k)$ وفقاً لقيم k:

I – من أجل k=0 نجد:

$$(2.28)\ \frac{\mu-\eta}{\mu}\operatorname{Re}W_0'' = a^*\left(e^{2A_1 x} - e^{2A_1(2\ell - x)}\right) + 2b^* e^{2A_1\ell}\sin 2B_1(x-\ell)$$

انطلاقاً من الشروط الحدية (2.1) و (2.2) نجد:

$$(2.29)\ u_{1,0}\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_{1,0}}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0$$

وهذا بدوره يعين الشروط الحدية الآتية من أجل الدالة $W_0(x)$:

$$(2.30)\ \left.\frac{\partial W_0}{\partial x}\right|_{x=\ell} = W_0(0) = 0$$

عندئذٍ الحل النهائي لـ (2.28) سيأخذ الشكل الآتي:

$$(2.31)\quad \begin{aligned}\operatorname{Re}W_0 &= \frac{\mu e^{2A_1\ell}}{2(\mu-\eta)}\frac{a^*}{A_1^2}\left[sh2A_1(x-\ell) + sh2A_1\ell\right] - \\ &- \frac{\mu e^{2A_1\ell}}{2(\mu-\eta)}\left\{\frac{b^*}{B_1^2}\left[\sin 2B_1(x-\ell) + \sin 2B_1\ell\right] + 2x\left(\frac{b^*}{B_1} - \frac{a^*}{A_1}\right)\right\}\end{aligned}$$

II – من أجل k=1 نجد:

$$(2.32)\ mg''(x) + np''(x) + rg(x) = Q_1(x)$$

$$(2.33)\ mp''(x) - ng''(x) + rp(x) = Q_2(x)$$

حيث:

$$g(x) = \operatorname{Re}W_1(x)\ , \quad p(x) = \operatorname{Im}W_1(x)$$

أما $m\,,\,n\,,\,r$ فهي:

$$m = \frac{\mu^2 + 4\omega^2 - \mu\eta}{\mu^2 + 4\omega^2}\ , \quad n = \frac{2\omega\eta}{\mu^2 + 4\omega^2}\ , \quad r = \frac{4\omega^2}{1-A}$$

من (2.32) و (2.33) نحصل على:

$$(2.34)\ g(x) = \frac{1}{nr}\left[-\left(m^2 + n\right)^2 p''(x) - m\,r\,p(x) + n\,Q_1(x) + m\,Q_2(x)\right]$$

نعوض (2.34) في (2.33) فنجد:

$$\left(m^2+n^2\right)p^{(4)}(x)+2mr\,p''(x)+r^2p(x)= \tag{2.35}$$
$$=Ne^{2A_1x}\cos 2B_1(x-\varphi)+Me^{2A_1x}\sin 2B_1(x-\varphi)$$
$$+N^*e^{-2A_1x}\cos 2B_1(x-\psi)+M^*e^{-2A_1x}\sin 2B_1(x-\psi)$$

إذ:

$$N^*=-q_1\sqrt{k_3^2+k_4^2}\;\; N=q_1\sqrt{k_1^2+k_2^2}\quad ,$$
$$M^*=q_2\sqrt{k_3^2+k_4^2}\;\; M=q_2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\quad ,$$
$$q_1=rb+4\left(A_1^2-B_1^2\right)(an+bm)+8A_1B_1(am-bn)$$
$$q_2=ra+4\left(A_1^2-B_1^2\right)(am-bn)-8A_1B_1(an+bm)$$

نعبر عن حل المعادلة (2.35) بالشكل:

$$p(x)=\left[d_1ch\,n_1x+d_2sh\,n_1x\right]\cos m_1x+ \tag{2.36}$$
$$+\left[d_3ch\,n_1x+d_4sh\,n_1x\right]\sin m_1x+p^*(x)$$

هنا: d_1,d_2,d_3,d_4 ثوابت تعين من الشروط الحدية. أما $m_1\,,\,n_1$:

$$n_1=\left[\frac{r\left(\sqrt{m^2+n^2}-n\right)}{2\left(m^2+n^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\quad ,\quad m_1=\left[\frac{r\left(\sqrt{m^2+n^2}+n\right)}{2\left(m^2+n^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

وبدوره $p^*(x)$ حل خاص للمعادلة (2.35) له الشكل:

$$p^*(x)=e^{2A_1x}\sqrt{(N_1+M_2)^2+(N_2+M_1)^2}\cos 2B_1\left(x-\varphi^*\right)+ \tag{2.37}$$
$$+e^{-2A_1x}\sqrt{(N_3+M_4)^2+(N_4+M_3)^2}\cos 2B_1\left(x-\psi^*\right)$$

حيث:

$$\varphi^*=\varphi_1+\varphi,\qquad \psi^*=\psi_1+\psi$$
$$\varphi_1=\arctan\frac{N_2+M_1}{N_1+M_2},\qquad \psi_1=\arctan\frac{N_4+M_3}{N_3+M_4}$$

أما الرموز الجديدة N_1,N_2,N_3,N_4 و M_1,M_2,M_3,M_4 و $q_3\,,\,q_4$ فهي:

$$N_1=\mathrm{Re}\frac{N}{q_3},\quad N_2=-\mathrm{Im}\frac{N}{q_3}\;,\; N_3=\mathrm{Re}\frac{N^*}{q_4},\quad N_4=-\mathrm{Im}\frac{N^*}{q_4}$$
$$M_1=\mathrm{Re}\frac{M}{q_3},\quad N_2=\mathrm{Im}\frac{M}{q_3}\;,\; N_3=\mathrm{Re}\frac{M^*}{q_4},\quad M_4=\mathrm{Im}\frac{M^*}{q_4}$$
$$q_3=16\left(m^2+n^2\right)(A_1+iB_1)^4+8(A_1+iB_1)mr+r^2$$
$$q_4=16\left(m^2+n^2\right)(-A_1+iB_1)^4+8(-A_1+iB_1)mr+r^2$$

انطلاقاً من (2.1) و (2.2) و (2.29) و (2.34) نجد الشروط الحدية الآتية:

$$p(x)=g(x)=0\quad ,\quad x=0 \tag{2.38}$$
$$\frac{\partial p(x)}{\partial x}=\frac{\partial g(x)}{\partial x}=0\quad ,\quad x=\ell \tag{2.39}$$

$$(2.40)\ p''(0)=F\ ,\quad p'''(\ell)=F_1$$

حيث الاشتقاق هنا بالنسبة للإحداثي السيني x و:

$$F=\frac{1}{m^2+n^2}\left[nQ_1(0)+mQ_2(0)\right]$$

$$F_1=\frac{1}{m^2+n^2}\left[nQ_1'(\ell)+mQ_2'(\ell)\right]$$

بعد أن نحسب d_1, d_2, d_3, d_4 فإن حل المعادلة (2.35) سيأخذ الشكل:

$$(2.41)\quad \begin{aligned} p(x)=&F_2 ch\, n_1x\cos m_1x+\\ &+\left[F_3 ch\, n_1x+F_4 sh\, n_1x\right]\sin m_1x+p^*(x)\end{aligned}$$

إذ:

$$F_4=\frac{F-p^{*''}(0)}{2m_1n_1}$$

$$F_3=\frac{1}{\alpha_1}\left\{\begin{aligned}&F-\left(n_1^3-3m_1^2n_1\right)ch\,n_1\ell\left[G(\ell)\cos m_1\ell+\frac{F-p^{*''}(0)}{2m_1n_1}\sin m_1\ell\right]+\\ &+\left(3n_1^2m_1-m_1^3\right)sh\,n_1\ell\left[G(\ell)\sin m_1\ell+\frac{F-p^{*''}(0)}{2m_1n_1}\cos m_1\ell\right]-p^{*'''}(\ell)\end{aligned}\right\}$$

$$F_2=G(\ell)+\alpha F_3$$

$$G(\ell)=-\frac{p^{*'}(\ell)+\dfrac{F-p^{*''}(0)}{2n_1}\cos m_1\ell-\dfrac{F-p^{*''}(0)}{2m_1}\sin m_1\ell}{n_1ch\,n_1\ell\cos m_1\ell-m_1\,sh\,n_1\ell\sin m_1\ell}$$

$$\alpha=-\frac{m_1ch\,n_1\ell\cos m_1\ell+n_1\,sh\,n_1\ell\sin m_1\ell}{n_1ch\,n_1\ell\cos m_1\ell-m_1\,sh\,n_1\ell\sin m_1\ell}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1=&\left[\left(3n_1^2m_1-m_1^3\right)+\alpha\left(n_1^3-3m_1^2n_1\right)\right]ch\,n_1\ell\cos m_1\ell+\\ &+\left[\left(n_1^3-3m_1^2n_1\right)-\alpha\left(3n_1^2m_1-m_1^3\right)\right]sh\,n_1\ell\sin m_1\ell\end{aligned}$$

من أجل تعيين الدالة g(x) نعوض (2.41) في (2.34) فنحصل على:

$$(2.42)\quad \begin{aligned}g(x)=&\left(h_1\,sh\,n_1x+h_2\,ch\,n_1x\right)\cos m_1x+\left(h_3\,ch\,n_1x+h_4\,sh\,n_1x\right)\sin m_1x-\\ &-\frac{m^2+n^2}{n\,r}p^{*''}(x)-\frac{m}{n}p^*(x)+\frac{1}{r}Q_1(x)+\frac{m}{n\,r}Q_2(x)\end{aligned}$$

حيث:

$$h_1=-\frac{m^2+n^2}{n\,r}\left[\left(n_1^2+m_1^2\right)F_2+2m_1n_1F_3\right]-\frac{m}{n}F_2$$

$$h_2=-\frac{m^2+n^2}{n\,r}\left[2m_1n_1F_4\right]$$

$$h_3 = -\frac{m^2+n^2}{n\,r}\left[\left(n_1^2+m_1^2\right)F_3 - 2m_1n_1F_2\right] - \frac{m}{n}F_3$$

$$h_4 = -\left[\frac{m^2+n^2}{n\,r}\left(n_1^2+m_1^2\right) + \frac{m}{n}\right]F_4$$

من (2.41) و (2.42) نحصل على العبارة النهائية للتابع $W_1(x,\omega)$ في الصيغة الآتية:

$$(2.43)\quad W_1(x,\omega) = g(x) + i\,p(x)$$

III– عندما k=2,3,4,........ نحصل على سلسلة معادلات تفاضلية متجانسة لها الحل الصفري من أجل الشروط الحدية المتجانسة (2.30).

بتعويض (2.31) و (2.42) في (2.27) نحصل على الحل النهائي لـ (1.8) في الصيغة:

$$(2.44)\quad u_{1,0}(x,t) = R(x,\omega)\cos(2\omega t - \theta(x,\omega)) + f(x)$$

حيث السعة غير المقاسة $R(x,\omega)$ تتعين بالعلاقة:

$$(2.45)\; R(x,\omega) = 2\left[g^2(x) + p^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

أما الطور الابتدائي للاهتزاز فله الصيغة الآتية:

$$(2.46)\; \theta(x,\omega) = \arctan\frac{p(x)}{g(x)} + \begin{cases} 0 \;;\; g(x) > 0 \\ \pi \;;\; g(x) < 0 \end{cases}$$

والحد الحر : $f(x) = \operatorname{Re} W_0$

بالانتقال الحدي $\eta \to 0$ فإن الحلول التي حصلنا عليها ستتوافق مع حلول المعادلات من أجل قضيب من مادة بيولوجية مرنة لاخطية [11]. وهكذا فإن العبارات التحليلية التي حصلنا عليها للتابع $u_{m,n}(x,t)$ تعين تابع الإزاحة للقضيب المدروس.

النتائج والمناقشة:

–تم بالاعتماد على معادلات الحركة الطولانية لقضيب من مادة مرنة لزجة لاخطية حل مسائل الاهتزازات الطولانية مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي

–تم بالاعتماد على طريقة النشر وفق قوى بارامتري اللاخطية والعامل البيولوجي وطريقة تحليل فورييه، وضع طريقة موحدة لحل المسألة المدروسة. حيث تم تشكيل مجموعة من المعادلات التكاملية التفاضلية وذلك بالنسبة لتوابع الإزاحة الطولانية $u_{m,n}(x,t)$ وتم الحصول من أجل بعض التقريبات الأولى من السلسلة على الحلول في صيغ موحدة. و يعد هذا مهماً عند وضع برنامج على الحاسوب وإجراء الحسابات العددية.

الاستنتاجات والتوصيات:

إن وضع برنامج على الحاسوب وإجراء الحساب العددي وتحليل المعطيات يسمح بالوقوف عند دور العامل البيولوجي والخواص الأخرى للوسط الدروس.

المراجع:

1. Functions theory method for complex variables. Lavrintel M. V., Chbat V. V. Moscow. Since, 1973. 736 P
2. Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanic in solid media. Moscow. Since, 1977. 382P.
3. Suvorova Yu. V. "Nonlinear effects in hereditary deformed media". Mechanic polymers - 1977. N˚6 P, 976-980.
4. Akuhundov M. B., Rabotnov Yu. N., Suvorova Yu. V. A deformable body model with reaction and application in dynamic problems of biological mechanic, IZV .AH CCCP, MTT- 1985. N˚6 P, 96-100
5. Vibration systems of elastic and viscoelastic Elements with reaction.
Mamemov C. A. CCCP, Baku 1989. 133 P
6. Hasan Khalifeh,. One-dimensional wave propagation in viscoelastic media with reaction. CCCP, Baku 1993. 164 P
7. G.A.Koloweski., A.P. Chokanova Modern Problems in Mathematics "Nonlinear Small Amplitude Waves in Elastic Media" P, 19-32 , MIAN, Moscow 2007.
8. Biomechanics principles and applications. Edited by Donald R. Peterson, Joseph D. Bronzino , 2008 by Taylor and Francis Group, LLC, London
9. Golikov C. H., Linear and nonlinear problems solution of viscoelastic theory. Moscow. Since, 2009. 21 P
10. Archinov G. A. longitudinal nonlinear waves in viscoelastic bars, tabulars and cylindrical incrustation . Since, KUBGAU, N81 , 2012. 15 P
11. Propagation of longitudinal waves in biological media. **.** Hasan khalifeh**.** Journal of university Tishreen, to appear.