مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (13)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (13) 2003

الرؤية بوضوح واجتماع المجموعات شبه النجمية في R^2

الدكتور عدنان ظريف*

(قبل للنشر في 2002/11/12)

□ الملخّص □

لتكن M مجموعة من نقاط الفضاء الإقليدي نوني البعد (R^n,d) ولتكن x نقطة من لصاقة M وy نقطة من M. نقول أن النقطة x ترى النقطة y ضمن M (النقطة y مرئية من النقطة x ضمن M) إذا وفقط إذا كانت القطعة المستقيمة $]x,y[$ محتواة في M ونقول ان النقطة x ترى بوضوح النقطة y ضمن M إذا وفقط إذا وجدت مجاورة مثل V للنقطة y بحيث أن النقطة x ترى ضمن M كل نقطة من نقاط المجموعة $V \cap M$. نسمي المجموعة M مجموعة شبه نجمية إذا وفقط إذا وجد في لصاقة M نقطة مثل x_0 بحيث تكون كل نقطة من نقاط المجموعة M مرئية ضمن M من النقطة x_0 بينما نسمي المجموعة M مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجد في M نقطة مثل x_0 بحيث تكون كل نقطة من نقاط M مرئية ضمن M من النقطة x_0.

في هذا البحث أبرهن النظرتين الآتيتين:

1–إذا كانت M مجموعة من نقاط الفضاء الإقليدي ثنائي البعد (R^2,d) عندئذ تكون كل ثلاث نقاط لاصقة بالمجموعة M في (R^2,d) مرئية بوضوح ضمن المجموعة M من نقطة مشتركة لاصقة بـ M إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية محدودة من M محتواة في مجموعة شبه نجمية جزئية من M.

2–إذا كانت M مجموعة من نقاط الفضاء الإقليدي ثنائي البعد (R^2,d) وكانت كل ثلاث نقاط لاصقة بـ M مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة لاصقة بـ M فإن المجموعة M تكون اجتماعاً لمجموعات شبه نجمية.

*مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (13)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (13) 2003

Clear Visibility and Unions of Starlike Sets In R^2

Dr. Adnan Zarif[*]

(Accepted 12/11/2002)

□ ABSTRACT □

Let M be a subset in R^n, and x be a point in closure of M (denoted $\overline{M}$) and y be a point in M. We say x sees y via M (y visible from x via M) if and only if the corresponding segment]x,y] lies in M. And we say y is clearly visible via M from x if and only if there is some neighbourhood V of y such that x sees via M each point of V Ç M . Finally, set M is called starlike if and only if there is some point x_0 in $\overline{M}$ such that x_0 sees via M each point of M. And set M is called starshaped if and only if there is some point x_0 in M such that x_0 sees via M each point of M.

In this paper I prove the following results:

1-Let M be a subset in (R^2,d). Every three points of closure M are clearly visible Via M from a common point of closure M if and only if each bounded subset of M lies in starlike set in M.

2- Let M be a subset in (R^2,d). Assume that every three points of $\overline{M}$ are clearly visible via M from a common point of $\overline{M}$. Then M is a union of starlike sets.

[*] **Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة:

يختلف مفهوم نجمية المجموعات عن مفهوم شبه نجمية المجموعات بشكل عام إذ أن المجموعة النجمية بمفهومها الخطي هي مجموعة M توجد فيها نقطة مثل x_0 ترى جميع نقاط المجموعة M ضمن المجموعة M (بكلام آخر المجموعة النجمية هي مجموعة M توجد فيها نقطة مثل x_0 (واحده على الأقل) بحيث تكون القطعة المستقيمة $[x_0, x]$ محتواة بكاملها في M وذلك من أجل كل نقطة $x \in M$ هذا يعني أن $([x_0, x] \subset M \ \forall x \in M)$.

أما المجموعة شبه النجمية فهي مجموعة M توجد نقطة لاصقة بها مثل x_0 بحيث أن النقطة x_0 ترى ضمن المجموعة M جميع نقاط المجموعة M (بكلام آخر المجموعة شبه النجمية هي مجموعة ما توجد في لصاقتها نقطة مثل x_0 بحيث تكون القطعة المستقيمة $]x_0, x]$ محتواة في M ما عدا النقطة x_0 وذلك أياً كان $x \in M$.

لكن مفهومي المجموعة النجمية والمجموعة شبه النجمية يتطابقان في حالة المجموعات المغلقة.

من المعلوم أن العالم الروسي ميخائيل كراسنسيلسكي وضع النظرية التالية:

إذا كانت M مجموعة متراصة في الفضاء الإقليدي نوني البعد فإن المجموعة M تكون نجمية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $(n+1)$ نقطة من M مثل $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, x_{n+1}$ توجد في M نقطة مثل x_0 بحيث يكون $[x_0, x_i] \subset M \ \forall i \in \{1, 2, \ldots\ldots, n+1\}$.

إن النظرية السابقة شغلت آلاف الباحثين وخلقت لهم مناخاً ملائماً لإيجاد وبرهان الكثير والكثير جداً من مرادفات وتعميمات نظرية كراسنسيلسكي وما زالت تستقطب اهتمام الباحثين حتى الآن ولا تكاد تخلو المجلات المتخصصة من أعمال تحوي نظريات من نمط نظرية كراسنسيلسكي ولكن بالرغم من الكم الهائل من مرادفات نظرية كراسنسيلسكي فإنها تبقى قاصرة عن مناقشة الحالات التي لا تكون فيها المجموعة المدروسة مجموعة متراصة.

لقد حاولت في هذا البحث دراسة أنماط من المجموعات غير المتراصة مستخدماً مفهوم شبه النجمية الذي هو أعم من مفهوم النجمية فحصلت على بعض النتائج التي تعد إضافة جديدة في أحد جوانب نظرية المجموعات النجمية هذا الجانب الذي لم تشمله نظرية كراسنسيلسكي ومرادفاتها وسوف أعرض في نهاية هذا البحث مسألة للبحث أملاً أن تستقطب اهتمام الباحثين لدراستها.

تعاريف ومصطلحات ونتائج مساعدة:

<u>تعريف 1</u>: انظر [1] أو [5] أو [6]

لتكن M مجموعة كيفية من نقاط R^n ولتكن y نقطة من M و x نقطة لاصقة بالمجموعة M. نقول أن النقطة x ترى النقطة y ضمن المجموعة M (أو أن النقطة y مرئية ضمن M من النقطة x) إذا وفقط إذا كانت القطعة المستقيمة $]x,y]$ محتواة بكاملها في M أي أن $]x, y] \subset M$.

تعريف 2: انظر [1] أو [3]

لتكن y,x نقطتين كيفيتين لاصقتين بالمجموعة M في R^n. نقول أن النقطة x ترى بوضوح النقطة y ضمن M إذا وفقط إذا وجد للنقطة y مجاورة مثل u بحيث تكون جميع نقاط المجموعة $M \cap u$ مرئية ضمن M من النقطة x.

وبشكل مشابه إذا كانت y,x نقطتين لاصقتين بـ M في R^n وكان $r > 0$ عدداً حقيقياً مفروضاً فإننا نقول أن النقطة y نقطة r − مرئية من النقطة x ضمن M إذاً وفقط إذا كانت كل نقطة من نقاط المجموعة $M \cap N_r(y)$ مرئية ضمن M من النقطة x حيث $N_r(y)=\{t \in R^n : d(y,t)<r\}$

تعريف 3: انظر [1] أو [5]

نقول عن مجموعة M من نقاط R^n إنها مجموعة شبه نجمية إذا وفقط إذا وجد في لصاقةM نقطة مثل x_0 (واحده على الأقل) بحيث أن النقطة x_0 ترى جميع نقاط المجموعة M ضمن M وفي هذه الحالة نسمي المجموعة M شبه نجمية بالنسبة للنقطة x_0.

تعريف 4:

إذا كانت M مجموعة من نقاط الفضاء (R^n,d) وكانت A مجموعة جزئية من M فإننا نقول أنه يمكننا تمديد المجموعة A في M إلى مجموعة شبه نجمية إذا وفقط إذا وجدت مجموعة شبه نجمية مثل B بحيث يكون $A \subseteq B \subseteq M$.

تعريف 5: انظر [1] أو [2] أو [3]

نقول عن مجموعة M إنها مجموعة نجمية في R^n إذا وفقط إذا وجد في M نقطة مثل x_0 (واحده على الأقل) بحيث ترى النقطة x_0 ضمن المجموعة M جميع نقاط M وفي هذه الحالة نقول إن المجموعة M مجموعة نجمية بالنسبة للنقطة x_0.

تعريف 6: انظر [2] أو [4]

نسمي مجموعة جميع نقاط المجموعة M والتي تكون المجموعة M نجمية بالنسبة لكل منها نواة المجموعة M ونرمز لها بالرمز Kern M.

–من الواضح أن كل مجموعة نجمية هي مجموعة شبه نجمية إلا أن العكس ليس بالضرورة أن يكون محققاً ويوضح ذلك المثال التالي:

مثال: لنأخذ في الفضاء العادي الحقيقي أي على المستقيم R المجموعة A بالشكل:

$$A = N_1(o)\setminus\{o\} =]-1,1[\setminus\{o\}$$

نلاحظ أن هذه المجموعة ليست نجمية لأنه لا توجد فيها نقطة ترى جميع نقاطها لكن المجموعة A مجموعة شبه نجمية لأن النقطة $x_0=0$ نقطة لاصقة بها تحقق العلاقة $\forall x \in A \quad]0,x] \subseteq A$.

–من الممكن أن نأخذ مثالاً آخر في الفضاء الاقليدي ثنائي البعد (R^2, d) نأخذ القرص الواحدي باستثناء المركز ويكون هذا القرص ما عدا مركزه مجموعة شبه نجمية لكنه ليس مجموعة نجمية.

نظرية مساعدة:

لتكن M مجموعة من نقاط الفضاء الاقليدي ثنائي البعد (R^2, d) ، بحيث ان كل ثلاث نقاط لاصقة بـ M في (R^2, d) مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة لاصقة بـ M عندئذ من أجل كل مجموعة جزئية محدودة من M مثل B يوجد عدد حقيقي موجب r_B متعلق بالمجموعة B بحيث تكون كل مجموعة منتهية من نقاط المجموعة B مجموعة r_B – مرئية ضمن المجموعة M من نقطة مشتركة لاصقة بـ M.

إن النظرية المساعدة السابقة مبرهنة في العمل [5].

سوف أستخدم في هذا البحث الرمز $\overline{M}$ الذي يعني لصاقة المجموعة M والرمز $N_r(x)$ ويعني الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها r .

نظرية 1: لتكن M مجموعة من نقاط الفضاء الاقليدي ثنائي البعد (R^2, d)). عندئذ تكون كل ثلاث نقاط من $\overline{M}$ مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة من $\overline{M}$ إذا وفقط إذا كان بالإمكان تمديد كل مجموعة محدودة من M إلى مجموعة شبه نجمية في M.

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض كل ثلاث نقاط لاصقة بـ M تكون مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة من $\overline{M}$ ولتكن A مجموعة كيفية محدودة من M ولنبرهن أنه يمكننا تمديد المجموعة A إلى مجموعة شبه نجمية.

بما أن A محدودة فإن $\overline{A}$ محدودة ولدينا $\overline{A} \subset \overline{M}$ لذلك فحسب النظرية المساعدة يوجد عدد حقيقي موجب تماماً متعلق بـ $\overline{A}$ مثل r_0 بحيث تكون كل مجموعة جزئية منتهية من نقاط $\overline{A}$ r_0 – مرئية ضمن المجموعة M من نقطة مشتركة من $\overline{M}$. لنأخذ من أجل كل $x \in \overline{A}$ الكرة المفتوحة $N_{r_0}(x)$ فنلاحظ أن $\overline{A} \subset \bigcup_{x \in \overline{A}} N_r(x)$ أي أن أسرة الكرات المفتوحة $\{N_{r_0}(x) : x \in \overline{A}\}$ تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة $\overline{A}$ في (R^2,d) وحيث أن $\overline{A}$ متراصة لأنها مغلقة ومحدودة في (R^2,d) فإنه بإمكاننا إيجاد عدد طبيعي مثل n_0 بحيث يكون

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} N_{r_0}(x_i) \qquad (1)$$

وبالإستفادة من النظرية المساعدة تكون كل مجموعة جزئية منتهية من $\overline{A}$ مرئية من نقطة مشتركة من $\overline{M}$ ضمن M هذا يعني وجود نقطة $x_0 \in \overline{M}$ بحيث تكون كل نقطة من نقاط المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ الجزئية من $\overline{A}$ نقطة r_0 – مرئية ضمن المجموعة M من النقطة x_0 هذا بدوره يعني أن النقطة x_0 ترى جميع نقاط كل من المجموعات التالية:

$$N_{r_0}(x_{n_0}) \cap M, \ldots\ldots, N_{r_0}(x_2) \cap M, N_{r_0}(x_1) \cap M$$

وبالتالي فالنقطة x_0 ترى ضمن المجموعة M جميع نقاط المجموعة $\bigcup_{i=1}^{n_0} N_{r_0}(x_i) \cap M$.

من ناحية ثانية لدينا $A \subset M$ لذا فإن $A \subset \overline{A} \cap M$ وبحسب العلاقة (1) نجد أن $A \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} N_{r_0}(x_i) \cap M$ لذلك فالنقطة x_0 ترى ضمن المجموعة M جميع نقاط المجموعة A وهذا يعني أن

المجموعة A محتواة في مجموعة شبه نجمية جزئية من M أي أنه أمكننا تمديد المجموعة A الكيفية المحدودة من M إلى مجموعة شبه نجمية.

$\Leftarrow$: لنفرض الآن أن كل مجموعة محدودة من M يمكن تمديدها في M إلى مجموعة شبه نجمية ولنفرض أن c,b,a ثلاث نقاط لاصقة بـ M عندئذ تكون المجموعة:

$A=\left(N_1(a)\cap M\right)\cup\left(N_1(b)\cap M\right)\cup\left(N_1(c)\cap M\right)$ مجموعة محدودة جزئية من M وبالتالي فحسب الفرض يمكن تمديدها في M إلى مجموعة شبه نجمية وهذا يعني وجود نقطة لاصقة بـ M مثل x_0 بحيث تكون جميع نقاط المجموعة A مرئية ضمن M من النقطة x_0 أي أن النقطة x_0 ترى ضمن المجموعة M جميع نقاط كل المجموعات $N_1(c)\cap M, N_1(b)\cap M, N_1(a)\cap M$ وهذا يعني أن النقطة x_0 ترى بوضوح كلاً من النقاط c,b,a ضمن M.

نتيجة: إذا كانت Mمجموعة مغلقة في الفضاء (R^2,d) عندئذ تكون كل ثلاث نقاط من M مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة من M إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية محدودة من M محتواة في مجموعة شبه نجمية جزئية من M.

البرهان:

ينتج مباشرة من النظرية 1 ومن تطابق مفهومي النجمية وشبه النجمية في حالة المجموعات المغلقة

نظرية 2:

إذا كانت M مجموعة من نقاط الفضاء الاقليدي ثنائي البعد (R^2,d) وكانت كل ثلاث نقاط من $\overline{M}$ مرئية بوضوح ضمن المجموعة M من نقطة مشتركة من $\overline{M}$ فإن المجموعة M تكون عبارة عن اجتماع لمجموعات شبه نجمية.

البرهان:

لتكن M مجموعة كيفية من نقاط (R^2,d) تحقق شرط النظرية ولنأخذ من أجل كل نقطة $x\in M$ الكرة المفتوحة $N_1(x)$ فنلاحظ أن المجموعة $M\cap N_1(x)\subset M \;\forall x\in M$ مجموعة محدودة وبما أنه حسب الفرض كل ثلاث نقاط لاصقة بـ M تكون مرئية بوضوح ضمن المجموعة M من نقطة مشتركة لاصقة بـ Mو أن المجموعة $M\cap N_1(x)\;\forall x\in M$مجموعة محدودة فبحسب النظرية 1 يمكن تمديد المجموعة $A_x=N_1(x)\cap M\;\forall x\in M$ إلىمجموعة شبه نجمية هذا يعني وجود نقطة لاصقة بـ M مثل x_0 بحيث تكون جميع نقاط المجموعة A_x مرئية ضمن M من النقطة x_0 لذلك نعرف المجموعة M_x من أجل كل $x\in M$ بالشكل:

$$M_x=\cup\{]x_0,a]: a\in A_x\}$$

نلاحظ أن $M_x\;\forall x\in M$ مجموعة شبه نجمية بحسب تعريفها ثم أن $M=\bigcup_{x\in M} M_x$

نظرية 3:

إذا كانت M مجموعة من نقاط الفضاء الاقليدي ثنائي البعد (R^2,d) وكانت كل ثلاث نقاط لاصقة بـ M مرئية بوضوح ضمن M من نقطة مشتركة لاصقة بـ M فإنه توجد متتالية متزايدة من المجموعات $(M_K)_{k\in N}$ بحيث أن $M_K \ \forall k \in N$ إما مجموعة شبه نجمية أو اجتماع لمجموعات شبه نجمية وبحيث يكون $M = \bigcup_{k=1} M_k$.

البرهان:

لنأخذ متتالية الكرات المفتوحة $(N_K)_{k\in N}$ المتمركزة في نقطة الأصل (0.0) ونقاطع كل منها مع M فنلاحظ أن:

بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن $N_1 \cap M \neq \emptyset$ لأنه في الحالة المعاكسة نبدأ من أول حد N_{k_1} يكون من أجله $N_{k_1} \cap M \neq \emptyset$ ونعتبره الحد الأول ونتابع.

بما أن $A_1 = N_1 \cap M \subset M$ مجموعة محدودة فإنه بحسب النظرية 1 يمكن أن تمدد في M إلى مجموعة شبه نجمية لذلك توجد $x_1 \in \overline{M}$ بحيث ترى النقطة x_1 ضمن M جميع نقاط المجموعة A_1 ولنعرف المجموعة M_1 بالشكل:

$$M_1 = \bigcup \{]x_1, a] : a \in A_1\}.$$

فنلاحظ أن المجموعة M_1 شبه نجمية ومحتواة في M.

إذا كانت $M \subseteq N_1$ نتوقف ونحصل على متتالية ثابتة من المجموعات شبه النجمية والتي اجتماعها يساوي M.

أما إذا كان $M \not\subset N_1$ فنأخذ المجموعة $A_2 = N_2 \cap M \subset M$ وهذه مجموعة محدودة أيضاً جزئية من M لذلك يمكن تمديدها في M إلى مجموعة شبه نجمية أي أنه يوجد $x_2 \in \overline{M}$ بحيث تكون جميع نقاط المجموعة A_2 مرئية ضمن M من النقطة x_2 ولنأخذ المجموعة:

$$M_2 = M_1 \cup \{]x_2, a] : a \in A_2\}$$

نلاحظ أنه إذا كانت جميع نقاط المجموعة M_1 مرئية ضمن M من النقطة x_2 تكون المجموعة M_2 شبه نجمية أما إذا لم يكن ذلك محققاً فتكون المجموعة M_2 اجتماعاً لمجموعتين هما M_1 و $\bigcup \{]x_2, a] : a \in A_1\}$ كل منهما مجموعة شبه نجمية الأولى بالنسبة لـ x_1 والثانية بالنسبة لـ x_2 ثم أن $M_1 \subset M_2$.

إذا كان $M \subset N_2$ نتوقف أما إذا لم يكن كذلك فنتابع بنفس الشكل السابق لنحصل على متتالية المجموعات $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ حيث أن $M_k \subset M_{k+1}$ وأن $M_k \ \forall k \in /N$ إما شبه نجمية أو اجتماع لمجموعات شبه نجمية ثم أن $M = \bigcup_{k=1} M_k$.

في نهاية بحثي هذا أطرح المسألة التالية والتي أستهلها بتعريف المجموعة شبه النجمية مترياً والتي تعد حالة عامة للمجموعة شبه النجمية:

إذا كان(E,d) فضاء مترياً وكانت A مجموعة ما من نقاطه فإننا نقول إن المجموعة A مجموعة شبه نجمية مترياً (أو مجموعة d – شبه نجمية) إذا وفقط إذا وجد في لصاقة A نقطة مثل x_0 بحيث تتحقق علاقة الاحتواء $M \subset \langle x_0, x\rangle \setminus \{x_0\}$ وذلك من أجل كل نقطة x من M حيث

$$\langle x_0, x\rangle = \{y \in E : d(x_0, x) = d(x_0, y) + d(y, x)\}$$

والسؤال المطروح هو هل النتائج المبرهنة في هذا البحث بالنسبة للمجموعات شبه النجمية تبقى صحيحة من أجل المجموعات شبه النجمية مترياً في (R^2, r) من أجل أي تابع مسافه r .

هذا السؤال ينتظر الإجابة إن لم يكن في حالته العامة فعلى الأقل في بعض الحالات الخاصة.

:المراجع

....

1.SOLTAN, V.P. 1984 Introdution to convexity theory (in Russian). Stinica. Kishinev. 225 p.

2.TABALE,A.E,ZARIF.A.1994.One theorem a starshaped sets. Ezvistia. Akad.Nauk.MSSR N14-P 16-20.

3.BOLTYANSKI. V.G,SOLTAN,P.S.1978,Combinotorial geometry of classes of convex sets, (in Russian). Stinica. Kishinev.279 P.

4.Kolodzeijczyk, k.On starshapedness of union of closed set in R^n Polska. Akademia Nauk, collog. Math. 1987. 53-N2-193-197.

5.BREEN,Marilyn ((clear visibility, starshaped sets, and finitely starlike sets))New Yourk Journal of Geometry 19 (1991), p 183-196.

6.BREEN, Marelyn ((points of local nonconvexity and sets which almost starshaped))Canada, Geometriae Dedicata 13 (1992). p 201-211.