مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (13)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (13) 2003

الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية في IR^2

الدكتور عدنان ظريف*
الدكتور غياث أحمد*
نجود حسن**

(قبل للنشر في 2002/11/20)

الملخّص

لتكن A مجموعة كيفية في الفضاء الخطي IR^n. نقول عن A إنها مجموعة نجمية إذا وجدت نقطة $x_0 \in A$ بحيث تكون القطعة المستقيمة $[x, x_0]$ محتواة في A وذلك من أجل كل $x \in A$.

وعندئذ نقول إن النقطة x_0 ترى النقطة x ضمن A (أو x مرئية من x_0 ضمن A).

نثبت في هذا البحث النتيجتين التاليتين:

1- لتكن A مجموعة متراصة بسيطة الترابط في (IR^2, d). عندئذ تكون A اجتماعاً لمجموعتين نجميتين إذا وجدت نقطتان في A مثل b,a بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

2- لتكن A مجموعة متراصة بسيطة الترابط في (IR^2, d). عندئذ تكون A اجتماعاً لثلاث مجموعات نجمية إذا وجدت ثلاث نقاط في A مثل a,b,c بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقاط الثلاث a,b,c (على الأقل).

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (13)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (13) 2003

The Finite Union of the Star Shaped Sets in IR^2

Dr. Adnan Zarif [*]
Dr.Gaiath Ahmad*
Nijod Hassan**

(Accepted 20/11/2002)

ABSTRACT

Let A be a subset of the linear space IR^n. We say that A is a star shaped set if a point $x_0 \in A$ is existed so that the segment $[x, x_0]$ lies in A for all $x \in A$In this case we say that a point x_0 sees x via A (or x is seen from x_0 via A).

In this article we prove the following results:

1- let A be a simply connected, compact set in IR^2, then A is a star shaped set if and only if there are two points a, b in A, so that all points $x \in bdr(A)$ will be seen via A at least from one of the existed points a, b.

2- let A be a simply connected, compact set in IR^2, then A is a star shaped set if and only if there are three points a, b, c in A, so that all points $x \in bdr(A)$ will be seen via A at least from one of the existed points a, b, c.

[*] **Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**] **Master Student at Mathematics Department, Faculty of Sciences, Tishreen University. Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعد نظرية كراسنسيلسكي Krasnosel'skii أول معيار لنجمية مجموعة متراصة ما في الفضاء الإقليدي نوني البعد IR^n ، والتي تنص على أنه إذا كانت A مجموعة متراصة في (IR^n,d) ، فإن هذه المجموعة تكون نجمية إذا وفقط إذا كان من أجل كل n+1 نقطة من نقاط المجموعة A مثل..... $x_1,x_2,\ ....x_n,x_{n+1}$ توجد نقطة في A مثل a بحيث تكون القطعة المستقيمة $[a,x_i]$ محتواه في A وذلك من أجل كل $1\le i\le n+1$.

إن النظرية السابقة كانت تربة خصبة لآلاف الباحثين، الذين توصلوا إلى إيجاد الكثير جداً من المرادفات والتعميمات لنظرية كراسنسيلسكي، سواء في المفهوم الخطي للنجمية أو في حالة المفهوم المتري لها.

ثمة سؤالاً آخر في غاية الأهمية يطرح نفسه بإلحاح، وهو إذا لم تكن المجموعة المتراصة A نجمية فهل يمكن كتابتها على شكل اجتماع منته لمجموعات نجمية. إن العمل [1] يناقش المسألة في IR^2 في حالة المفهوم المتري للنجمية من أجل تابع مسافة محدد، والعمل [2] يناقشها أيضاً في IR^2 في حالة المفهوم المتري للنجمية من أجل أي تابع مسافة ، ولكن بعد إضافة شرط الرؤية المترية بوضوح. أما العملين [6] ،[7] فيناقشان المسألة المطروحة في حالة المفهوم الخطي للنجمية بعد إضافة شرط الرؤية الخطية بوضوح أيضاً.

أما بحثنا هذا فيناقشها بمفهومها الخطي بشكل عام في الفضاء الإقليدي ثنائي البعد.

أهم التعاريف والنتائج اللازمة للبحث: [2] ، [3] ، [4]، [5] و[6]

<u>تعريف (1):</u>

لتكن M مجموعة كيفية من فضاء خطي L ، نقول عن M أنها مجموعة محدبة إذا تحقق من أجل كل نقطتين $x, y\in M$ الشرط التالي:

$$[x, y]:=\{z\in L: z=\lambda x+(1-\lambda)y, 0\le\lambda\le 1\}\subset M$$

<u>تعريف (2):</u>

نقول عن M أنها مجموعة نجمية في فضاء خطي L ، إذا وجد في M نقطة x_0

بحيث: $$[x, x_o]\subset M, \forall x\in M$$

ونسمي M في هذه الحالة مجموعة نجمية بالنسبة لـ x_o.

نتيجة (1): كل مجموعة محدبة مجموعة نجمية لكن العكس ليس صحيحاً بشكل عام.

<u>تعريف (3):</u>

نسمي مجموعة جميع النقاط من M ، والتي تكون M بالنسبة لها مجموعة نجمية نواة M ، ونرمز لها بالرمز Ker M. أي أن:

$$\mathrm{Ker}M=\{x\in M:[x, y]\subset M, \forall y\in M\}$$

تعريف (4):

لتكن M مجموعة كيفية من فضاء متري (X,d) ، نقول عن M أنها مجموعة d –محدبة (محدبة مترياً)إذا تحققت من اجل كل $x, y \in M$ العلاقة:

$$\langle x, y\rangle := \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\} \subset M$$

تعريف (5):

نقول عن مجموعة M أنها d – نجمية (نجمية مترياً) في الفضاء المتري (X,d) ، إذا وجد في M نقطة مثل x_o بحيث يكون:

$$< x, x_o > \subset M, \forall x \in M$$

تعريف (6):

نسمي مجموعة جميع النقاط من M ، والتي تكون M مجموعة d – نجمية بالنسبة لها d – نواة ، ونرمز لها بالرمز d-kernM أي أن:

$$d - KernM = \{x \in M :< x, y > \subset M, \forall y \in M\}$$

نتيجة (2): M مجموعة d – محدبة إذا وفقط إذا كان d-KernM=M.

نتيجة (3): كل مجموعة d – محدبة مجموعة d – نجمية، لكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

نتيجة (4): المجموعات d – محدبة مجموعات محدبة، إنما العكس ليس صحيحاً بشكل عام.

نتيجة (5): كل مجموعة d– نجمية هي مجموعة نجمية، ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

تعريف (7):

ليكن (IR^n,d) الفضاء الإقليدي نوني البعد ، ولتكن $A \subseteq IR^n$ مجموعة ما ، وx,y نقطتين من نقاط A. نقول إن النقطة x ترى النقطة y ضمن A (أو y مرئية من x ضمن A) إذا كان $[x,y] \subset A$.

تعريف (8):

لتكن $A \subseteq IR^n$ مجموعة ما ، وx نقطة ما من نقاط A ، ولتكن $B \subseteq A$ مجموعة ما. نقول إن النقطة x ترى المجموعة B ضمن A ، إذا كانت النقطة x ترى ضمن A كل نقطة من نقاط B.

تعريف (9):

نقول إن النقطة x ترى النقطة y بوضوح ضمن A في (IR^n, d) ، إذا وجدت مجاورة لـ y في IR^n مثل N ، بحيث ترى النقطة x ضمن A المجموعة $A \cap N$.

تعريف (10):

لتكن $A \subset IR^n$ مجموعة ما. نقول عن A أنها بسيطة الترابط إذا كانت متممتها في IR^n تملك مركبة مترابطة واحدة. ونقول عنها إنها منتهية الترابط إذا كانت متممتها في IR^n تملك عدة مركبات مترابطة.

تعريف (11):

لتكن $A \subset IR^n$ مجموعة ما. نسمي الغلاف المحدب لـ A أصغر مجموعة محدبة تحوي A ، ونرمز لها بالرمز Conv(A).

سوف نستخدم الرموز التالية خلال دراستنا هذه:

ex(A), int(A), bdr(A) وتعني جبهية A وداخلية A وخارجية A على الترتيب.

L(x,y) وتعني المستقيم المار من النقطتين y, x.

Nr(x) وتعني كرة مفتوحة في (IR^2, d) مركزها x ونصف قطرها r>o.

نظرية (1):

لتكن A مجموعة متراصة بسيطة الترابط من نقاط الفضاء الإقليدي ثنائي البعد (IR^2, d). عندئذ تكون A اجتماعاً لمجموعتين نجميتين إذا وفقط إذا وجدت نقطتان في A مثل b,a بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

البرهان:

لزوم الشرط:

لنفرض أن $A=A_1 \cup A_2$ حيث A_2,A_1 مجموعتين نجميتين.

لتكن $x \in bdr(A)$ نقطة كيفية عندئذ $x \in A$ وذلك لأن A مجموعة متراصة في (IR^2, d) فهي مغلقة في هذا الفضاء وبالتالي $bdr(A) \subset A$.

وهكذا تكون $x \in A_1 \cup A_2$ وينتج عن ذلك:

إما $x \in A_1$ و A_1 مجموعة نجمية عندئذ: $\exists a \in A_1 : [a, x] \subset A_1 \subset A$

أو $x \in A_2$ و A_2 مجموعة نجمية عندئذ: $\exists b \in A_2 : [b, x] \subset A_2 \subset A$

أو $x \in A_1 \cap A_2$ و A_1,A_2 مجموعتين نجميتين عندئذ:

$$\exists a \in A_1 \ \& \ \exists b \in A_2 : [a, x] \subset A_1 \ \& \ [b, x] \subset A_2$$

أي أنه توجد نقطتان b,a في المجموعة A تحققان أيا كانت $x \in bdr(A)$ فإن x مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الاقل).

كفاية الشرط:

بفرض أنه توجد نقطتان في A مثل b,a بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

لنضع:

$$A_1 = \{x \in A : [a,x] \subseteq A\}$$
$$A_2 = \{x \in A : [b,x] \subseteq A\}$$

ولنثبت أن A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a:

إذن:

$$\forall x \in A_1 \ \& \ \forall z \in [a,x] \Rightarrow [a,z] \subseteq [a,x] \subseteq A$$
$$z \in A \ \& \ [a,z] \subseteq A \Rightarrow z \in A_1$$

بما أن z كيفية من [a,x] فإن $[a,x] \subseteq A_1$ أيا كانت $x \in A_1$. إذن A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a ،وبنفس الطريقة نثبت أن A_2 مجموعة نجمية بالنسبة لـ b.

لنبرهن أن: $A=A_1 \cup A_2$

من تعريف المجموعتين A_2,A_1 نجد:

$$A_1 \subseteq A \ \& \ A_2 \subseteq A \Rightarrow A_1 \cup A_2 \subseteq A \qquad (1)$$

وعندما يكون الاحتواء الثاني صحيحاً لدينا من أجل جميع النقاط $x \in A$ إما $x \in bdr(A)$ أو $x \in int(A)$

1– *عندما* $x \in bdr(A)$

عندئذ تكون x حسب الفرض مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

إذ كما نعلم:

$$[a,x] \subseteq A \Rightarrow x \in A_1 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2$$
$$[b,x] \subseteq A \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2$$
$$[a,x] \subseteq A \ \& \ [b,x] \subseteq A \Rightarrow x \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2$$

الامر الذي يقتضي صحة مايلي:

$$(\forall x \in bdr(A) \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2) \Rightarrow bdr(A) \subseteq A_1 \cup A_2 \qquad (1)'$$

2– *أما عندما* $x \in int(A)$

يكفي أن نثبت أن x مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

نلاحظ أنه إذا كانت a=b و a لا ترى x ضمن A فإن $[a,x] \not\subseteq A$ وبالتالي:

$$\exists y : y \in bdr(A) \cap [a,x] \ \& \ [y,x] \subseteq A$$

بينما $[a, y] \not\subset A$ لذلك فإن a لا ترى النقطة الجبهية y ، وهذا يتناقض مع الفرض.

وإذا كان a=x (أو b=x) فإن $x \in A_1$ (أو $x \in A_2$)، وبالتالي $x \in A_1 \cup A_2$.

بشكل عام نفرض أن $x \neq a,b$ & $a \neq b$ وأن النقطة $x \in A$ غير مرئية ضمن A من أي من النقطتين b,a ، وذلك من أجل الحصول على تناقض.

بما أن $x \in int(A)$ فإنه توجد قطعة مستقيمة $[a_1,a_2]$ مارة من x ومحتواة في المجموعة $A \cap L(a,x)$ بحيث يكون طولها أعظمياً مع $a<a_1<x<a_2$ ،الشكل (1). وبالتالي تكون كل من a_2,a_1 نقطة جبهية لـ A (لأن طول القطعة المستقيمة $[a_1,a_2]$ أعظمي) ، كما أن النقطة a لا ترى ضمن A أيا من النقطتين a_2,a_1 ، ولبرهان ذلك نفرض أن النقطة a ترى النقطة a_1 ضمن A أي أن $[a,a_1] \subseteq A$ ولدينا $[a_1,x] \subseteq A$ وينتج عن ذلك:

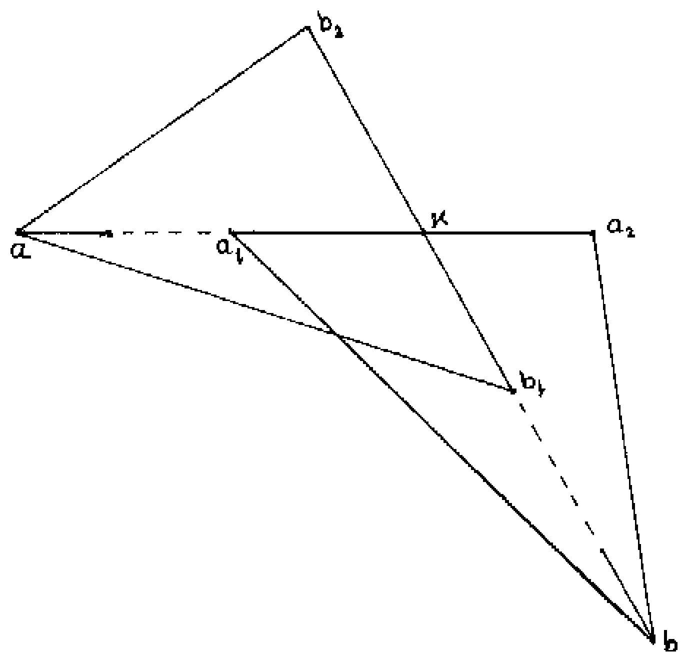
$$[a,x]=[a,a_1]\cup[a_1,x] \subseteq A$$

وهذا يعني أن النقطة a ترى x ضمن A مما يناقض فرضنا، وبذلك النقطة a لا ترى النقطة a_1 ضمن A.

ولدينا $[a,x] \not\subset A$ & $[a,x] \subseteq [a,a_2]$ الذي ينتج عنه $[a,a_2] \not\subset A$ أي أن a لا ترى a_2 ضمن A.

وبمناقشة مماثلة بالنسبة للنقطة b توجد قطعة مستقيمة $[b_1,b_2]$ مارة من x ومحتواة في المجموعة $A \cap L(b,x)$ بحيث يكون طولها أعظمياً مع $b<b_1<x<b_2$ ،الشكل (1). نلاحظ أن كلا من b_1,b_2 نقطة جبهية لـ A ، كما أن النقطة b لا ترى ضمن A أيا من النقطتين b_2,b_1.

إن $x \notin L(a,b)$ وإلا فإن النقاط a ، a_2 ، x ، b_2 ، b تقع على المستقيم L(a,b) ، وحيث أن: $[b,a_1] \subset A$ و $[b,x] \subset [b,a_1]$ يكون $[b,x] \subset A$ وهذا يتناقض مع الفرض.



الشكل (1)

بما أن النقطة a لا ترى ضمن A أيا من النقطتين الجبهيتين a_2,a_1 فحسب فرض النظرية تكون النقطة b ترى ضمن A كلتا النقطتين a_2,a_1 وبكون A مجموعة بسيطة الترابط فإن:

$$conv\{b,a_1,a_2\}\subseteq A \Rightarrow [b,x]\subseteq A$$

أي أن النقطة b ترى النقطة x ضمن A وهذا تناقض.

بما أن النقطة b لا ترى ضمن A أيا من النقطتين الجبهيتين b_2,b_1 فحسب فرض النظرية تكون النقطة a ترى ضمن A هاتين النقطتين ، وبكون A مجموعة بسيطة الترابط فإن:

$$conv\{a,b_1,b_2\}\subseteq A \Rightarrow [a,x]\subseteq A$$

أي أن النقطة a ترى النقطة x ضمن A وهذا تناقض.

نستنتج حسب المناقشة السابقة أن النقطة x مرئية ضمن A من إحدى النقطتين b,a (على الأقل).

إذا كانت:

$$[a,x]\subseteq A \Rightarrow x\in A_1 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$$
$$[b,x]\subseteq A \Rightarrow x\in A_2 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$$
$$[a,x]\subseteq A \,\&\, [b,x]\subseteq A \Rightarrow x\in A_1\cap A_2 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$$

فإن:

$$(\forall x\in int(A) \Rightarrow x\in A_1\cup A_2) \Rightarrow int(A)\subseteq A_1\cup A_2 \qquad (2)'$$

من الاحتوائيين $(1)'$ و$(2)'$ نجد:

$$\forall x\in A \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$$

ومنه: $A\subseteq A_1 \cup A_2 \qquad (2)$

من (1) و(2) نجد:

$$A=A_1\cup A_2$$

أي أن المجموعة A عبارة عن اجتماع مجموعتين نجميتين A_2,A_1 مع:

$$a\in KernA_1 \,\&\, b\in KernA_2$$

نظرية (2):

لتكن A مجموعة متراصة بسيطة الترابط من نقاط الفضاء الإقليدي ثنائي البعد (IR^2,d). عندئذ تكون A اجتماعاً لثلاث مجموعات نجمية إذا وفقط إذا وجدت ثلاث نقاط في A مثل c,b,a بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقاط الثلاث c,b,a (على الأقل).

البرهان:

لزوم الشرط:

لنفرض أن $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$ حيث A_3,A_2,A_1 مجموعات نجمية.

ولتكن $x \in bdr(A)$ نقطة كيفية. عندئذ $x \in A$ ، إذ كما نعلم A مجموعة متراصة في (IR^2,d) وبالتالي مغلقة فيه ، أي $bdr(A) \subseteq A$ ، الامر الذي يقتضي صحة الانتماء: $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$

والذي ينتج منه:

إما $x \in A_1$ و A_1 مجموعة نجمية عندئذ: $\exists a \in A_1 : [a,x] \subseteq A_1 \subseteq A$

أو $x \in A_2$ و A_2 مجموعة نجمية عندئذ: $\exists b \in A_2 : [b,x] \subseteq A_2 \subseteq A$

أو $x \in A_3$ و A_3 مجموعة نجمية عندئذ: $\exists c \in A_3 : [c,x] \subseteq A_3 \subseteq A$

أو $x \in A_1 \cap A_2$ و A_1,A_2 مجموعتين نجميتين عندئذ:

$$\exists a \in A_1 \ \& \ \exists b \in A_2 : [a,x] \subseteq A_1 \ \& \ [b,x] \subseteq A_2$$

أو $x \in A_1 \cap A_3$ و A_1,A_3 مجموعتين نجميتين عندئذ:

$$\exists a \in A_1 \ \& \ \exists c \in A_3 : [a,x] \subseteq A_1 \ \& \ [c,x] \subseteq A_3$$

أو $x \in A_2 \cap A_3$ و A_2,A_3 مجموعتين نجميتين عندئذ:

$$\exists b \in A_2 \ \& \ \exists c \in A_3 : [b,x] \subseteq A_2 \ \& \ [c,x] \subseteq A_3$$

أو $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$ و A_1,A_2,A_3 مجموعات نجمية عندئذ:

$$\exists a \in A_1 \ \& \ \exists b \in A_2 \ \& \ \exists c \in A_3 : [a,x] \subseteq A_1 \ \& \ [b.x] \subseteq A_2 \ \& \ [c,x] \subseteq A_3$$

أي أنه توجد ثلاث نقاط c,b,a في A تحقق أيا كانت $x \in bdr(A)$ فإن x مرئية ضمن a من إحدى النقاط الثلاث b,a أو c (على الاقل).

كفاية الشرط:

بفرض أنه توجد ثلاث نقاط في A مثل c,b,a بحيث تكون كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية ضمن A من إحدى النقاط الثلاث b,a أو c(على الأقل) ، ولنثبت أن A اجتماع لثلاث مجموعات نجمية.

لنضع:

$$A_1 = \{x \in A : [a,x] \subseteq A\}$$

$$A_2 = \{x \in A : [b,x] \subseteq A\}$$

$$A_3 = \{x \in A : [c,x] \subseteq A\}$$

لنثبت أن A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a:

$$\forall x \in A_1 \ \& \ \forall z \in [a,x] \Rightarrow [a,z] \subseteq [a,x] \subseteq A$$

إذن: $z\in A \;\&\; [a,z]\subseteq A \Rightarrow z\in A_1$

بما أن z كيفية من [a,x] فإن $[a,x]\subseteq A_1$ أيا كانت $x\in A_1$ ، إذن A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a ، وبنفس الطريقة نثبت أن A_2 مجموعة نجمية بالنسبة لـ b و A_3 مجموعة نجمية بالنسبة لـ c.

لنبرهن أن: $A=A_1 U A_2 U A_3$

من تعريف المجموعات A_3,A_2,A_1 نجد:

$$A_1\subseteq A \;\&\; A_2\subseteq A \;\&\; A_3\subseteq A \Rightarrow A_1\cup A_2\cup A_3\subseteq A \qquad (1)$$

ومن أجل الاحتواء الثاني نفرض العكس من أجل الحصول على تناقض.

لنفرض وجود: $x\notin A_1UA_2UA_3 \;\&\; x\in A$

أي إما أن تكون x. نقطة جبهية لـ A أو داخلية:

إذا كانت $x\notin A_1\cup A_2\cup A_3 \;\&\; x\in bdr(A)$ فهذا يعني أن x غير مرئية ضمنA من أي من النقاط c,b,a ، وهي نقطة جبهية لـ A مما يناقض فرض النظرية.

أما في حال $x\in int(A)$ سنفترض: بدون المساس بعمومية المسألة أن $x\neq a,b,c \;\&\; a\neq b\neq c$ وإلا عدنا للنظرية (1).

طالما أن $x\notin A_1\cup A_2\cup A_3$ فإن x غير مرئية ضمن A من أي من النقاط c,b,a ، أي:

$$[a,x]\not\subseteq A \Rightarrow \exists y_1 : y_1\in [a,x] \,\&\, y_1\notin A$$

$$[b,x]\not\subseteq A \Rightarrow \exists y_2 : y_2\in [b,x] \,\&\, y_2\notin A$$

$$[c,x]\not\subseteq A \Rightarrow \exists y_3 : y_3\in [c,x] \,\&\, y_3\notin A$$

وهذا بدوره يقتضي:

$$\exists a_1,a_2\in bdr(A)\cap[a,x]\,;\,[a,a_1]\subseteq A \;\&\; [a_2,x]\subseteq A$$

$$\exists b_1,b_2\in bdr(A)\cap[b,x];[b,b_1]\subseteq A \;\&\; [b_2,x]\subseteq A$$

$$\exists c_1,c_2\in bdr(A)\cap[c,x];\,[c,c_1]\subseteq A \;\&\; [c_2,x]\subseteq A$$

وعندئذ $[a,a_2]\not\subseteq A$ لأنه لو كانت $[a,a_2]\subset A$ لكان:

$$[a,x]=[a,a_2]\cup[a_2,x]\subseteq A$$

والذي يعني أن النقطة a ترى النقطة x ضمن A وهذا تناقض.

وبنفس الطريقة نثبت أنَّ: $[b,b_2]\not\subseteq A \quad \& \quad [c,c_2]\not\subseteq A$

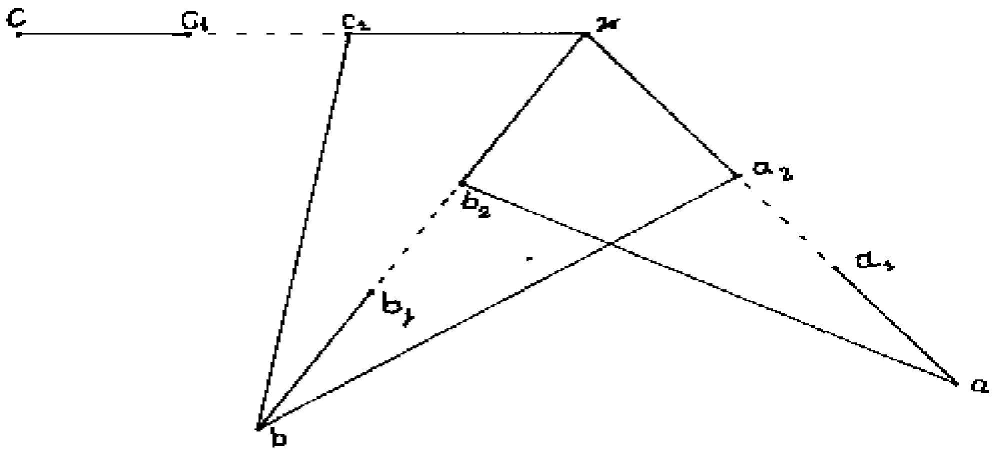
نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $x \notin \operatorname{conv}\{a,b,c\}$

ويكون لدينا:

1- إحدى النقاط c,b,a ترى ضمن A نقطتين من النقاط c_2, b_2, a_2.

لنفرض أن: $[b,a_2] \subseteq A$ و $[b,c_2] \subseteq A$ و $[a,b_2] \subseteq A$ الشكل (2)



الشكل (2)

إن النقطة x لا تنتمي إلى أي من المستقيمات $L(b,c)$ أو $L(a,b)$ ولإثبات ذلك نفرض العكس، أي بفرض أن النقطة x تقع على المستقيم $L(a,b)$ يكون لدينا ما يلي:

النقاط b,b_2,x,a_2,a تنتمي للمستقيم $L(a,b)$ ، وحيث أن: $[b,a_2] \subseteq A$ و $[b,x] \subset [b,a_2]$

يكون: $[b,x] \subset A$ تناقض مع أن b لا ترى ضمن A النقطة x إذاً $x \notin L(a,b)$.

وبنفس الطريقة نثبت أن النقطة x لا تنتمي إلى المستقيم $L(b,c)$.

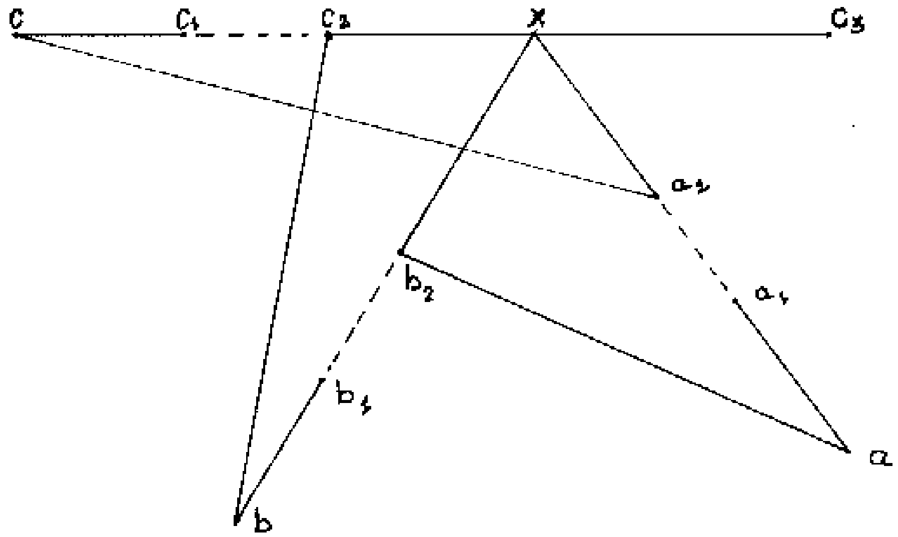
ينتج من الفرض أن محيط الشكل الرباعي ba_2xc_2 واقعاً ضمن A ،وبما إن A مجموعة بسيطة الترابط فإن هذا الرباعي يقع ضمن A بأكمله ،وينتج عن ذلك أن $[b,x] \subseteq A$ وهذا يتناقض مع x غير مرئية ضمن a من b.

2- كل نقطة من النقاط c,b,a ترى ضمن A نقطة من النقاط c_2, b_2, a_2.

لتكن: $[a,b_2] \subseteq A$ و $[b,c_2] \subseteq A$ و $[c,a_2] \subseteq A$ الشكل (3).

إن النقطة x لا تقع على أي من المستقيمات $L(a,b)$ أو $L(b,c)$ أو $L(a,c)$ ونثبت ذلك بطريقة مشابهة للمناقشة في (1).

بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نأخذ على امتداد القطعة المستقيمة $[c,x]$ من جهة x أول نقطة جبهية لـ A ولتكن c_3. وعندئذ فإن $[c,c_3] \not\subset A$ لأن $[c,x] \not\subset A$.



الشكل(3)

إذا كانـــت $[a,c_3]\subset A$ فـــإن $\mathrm{conv}\{a,c_3,x,b_2\}\subset A$ ، لأن A مجموعـــة بســـيطة التـــرابط $A \Rightarrow [a,x]\subset A$ وهذا يتناقض مع أن النقطة a لا ترى ضمن A النقطة x.

إذا كانت $[b,c_3]\subset A$ فإن $\mathrm{conv}\{b,c_3,c_2\}\subset A \Rightarrow [b,x]\subset A$ وهذا يتناقض مع أن النقطة b لا ترى ضمن Aالنقطة x.

من المناقشة السابقة نجد أن النقطة الجبهية c_3 لـ A غير مرئية ضمن A من أي من النقاط c,b,a مما يتناقض مع أن كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c(على الأقل).

- الحالة الثانية: $x\in \mathrm{conv}\{a,b,c\}$

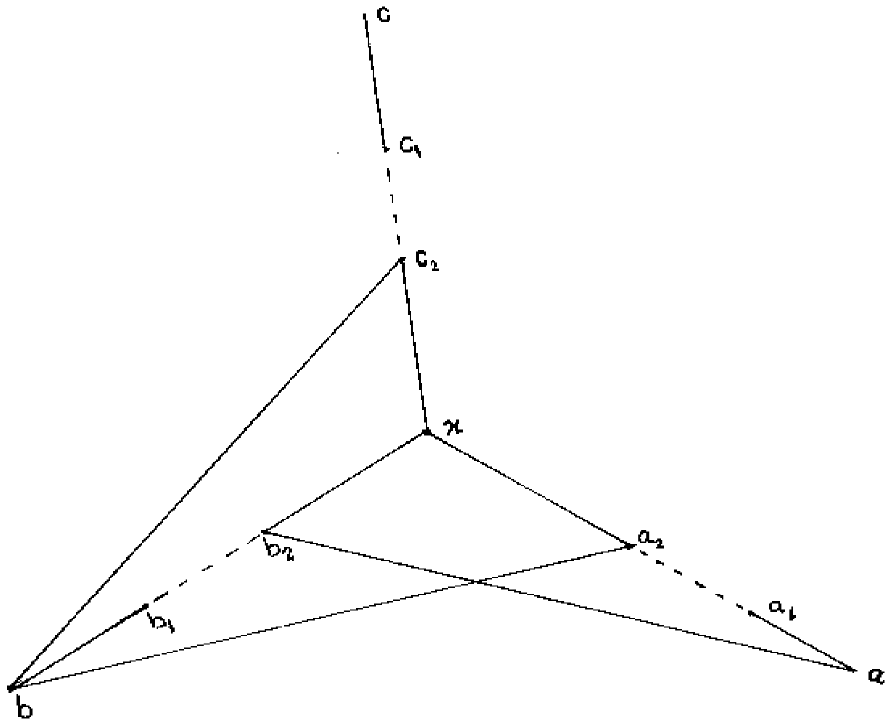
يكون لدينا:

1–إحدى النقاط c,b,a ترى ضمن A نقطتين من النقاط c_2,b_2,a_2.

لنفرض أن $[b,a_2]\subset A$ و $[b,c_2]\subset A$ و $[a,b_2]\subset A$ الشكل (4).

إن النقطة x لا تقع على أي من المستقيمات $L(b,c)$, $L(a,b)$ ولتبيان صحة ذلك نجري مناقشة مشابهة للمناقشة في (1) من الحالة الأولى.

إن الرباعي ba_2xc_2 محتوى في A وذلك لأن القطع المستقيمة المشكلة له محتواة في A ،و A مجموعة بسيطة الترابط ، مما يعني أن $[b,x]\subset A$ وهذا يتناقض مع x غير مرئية ضمن Aمن b.

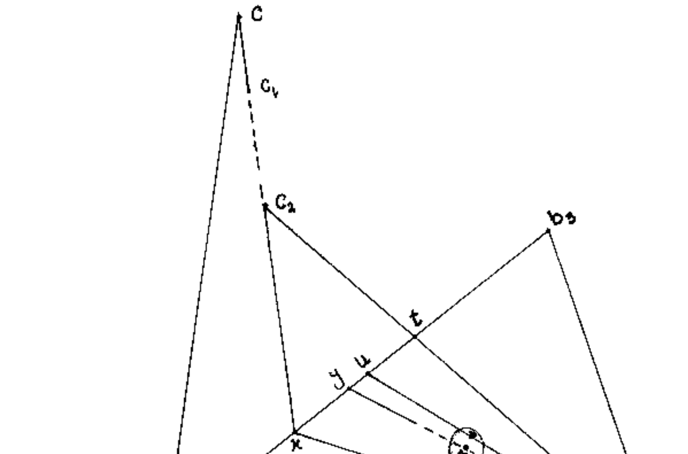


الشكل(4)

2–كل نقطة من النقاط c,b,a ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط c_2,b_2,a_2.

لنفرض أن A أ $[a,c_2]$ و A أ $[b,a_2]$ و A أ $[c,b_2]$ الشكل (5).

إن النقطة x لا تنتمي إلى أي من المستقيمات L(b,c), L(a,c), L(a,b) ولتبيان صحة ذلك نجري مناقشة مشابهة للمناقشة في(1) من الحالة الأولى.



الشكل(5)

بما أن $x \in int(A)$ نأخذ على امتداد القطعة المستقيمة $[b,x]$ من جهة x أول نقطة جبهية لـ A ولتكن b_3.

إذا كانت $[b,b_3] \subseteq A$ فإن $[b,x] \subseteq A$ وهذا يتناقض مع x غير مرئية ضمن A من b.

إذا كانت $[c,b_3] \subset A$ فإن $conv\{c,b_2,b_3\} \subseteq A \Rightarrow [c,x] \subseteq A$ وهذا يتناقض مع x غير مرئية ضمن A من c.

وبذلك فإن $[a,b_3] \subseteq A$ أي أن النقطة a ترى النقطة b_3 ضمن A.

لتكن t نقطة تقاطع $[a,c_2]$ مع $[x,b_3]$.

إن: $\quad (*) \quad conv\{a,t,b_3\} \subseteq A$

بما أن $conv\{a,x,b_3\} \not\subset A$ لأن النقطة a لا ترى النقطة x ضمن A ،فإنه توجد نقاط على القطعة المستقيمة $[x,t]$ تحقق علاقة احتواء كالعلاقة (*) ونقاط لا تحقق ذلك.

لتكن $y \in [x,t]$ أقرب نقطة لـ t تحقق $conv\{a,y,b_3\} \not\subset A$ ، وعندئذ توجد نقطة $z \in [y,a] \cap ex(A)$.

بما أن A مغلقة في IR^2 فإن $IR^2 \backslash A$ مجموعة مفتوحة في IR^2، وبذلك توجد كرة مفتوحة $N_r(z)$ في IR^2 بحيث:

$$0 < r \in IR \quad \& \quad N_r(z) \subseteq IR^2 \setminus A$$

من ناحية ثانية لدينا: $Nr(z) \cap conv\{a,y,b_3\} \neq \phi$

لتكن: $s \in Nr(z) \cap conv\{a,y,b_3\}$ مع $s \notin [a,y]$ وبذلك تكون $[a,s] \not\subset A$.

لتكن u نقطة تقاطع المستقيم المار من a,s مع $[x,b_3]$ وعندئذ فإن:

$[a,u] \not\subset A \Rightarrow conv\{a,u,b_3\} \not\subset A$ وهذا تناقض مع كون y هي النقطة الأقرب لـ t التي تحقق $conv\{a,y,b_3\} \not\subset A$. وينتج عن هذا التناقض أن النقطة a لا ترى النقطة b_3 ضمن A.

في كلتا الحالتين السابقتين وصلنا إلى تناقض، سببه الفرض الخاطئ بوجود x حيث $x \in A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ ، لذلك فإن x غير موجودة ، وبالتالي فإن $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

وهكذا تكون المجموعة A عبارة عن اجتماع ثلاث مجموعات نجمية، نواها تحوي النقاط c,b,a حيث:

$$a \in ker\,n\,A_1 \quad \& \quad b \in ker\,n\,A_2 \quad \& \quad c \in ker\,n\,A_3$$

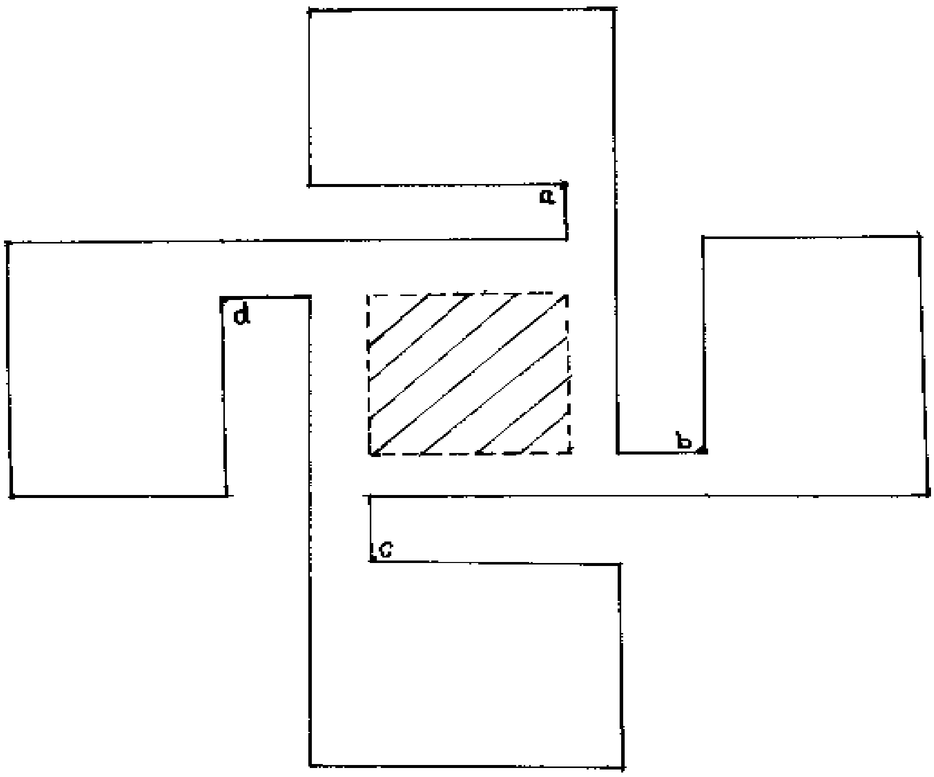
ملاحظة:

يتبادر إلى الذهن سؤال مرتبط بالنظريتين السابقتين، وهو هل تكون المجموعة المتراصة في IR^2 اجتماعاً لـ k مجموعة نجمية عندما وفقط عندما توجد فيها k نقطة $x_1,x_2,...,x_k$ بحيث تكون كل نقطة جبهية لهذه المجموعة مرئية من إحدى هذه النقاط على الأقل.

إن الإجابة على السؤال السابق سلبية، لأنه ورد في العمل [1] مثال يوضح من أجل المفهوم المتري للنجمية أن القضية السابقة غير صحيحة عندما K=4 ، وهذا المثال ينطبق على المفهوم الخطي أيضاً.

مثال (1):

لتكن A مجموعة متراصة بسيطة الترابط من نقاط الفضاء الإقليدي ثنائي البعد (IR^2, d) الشكل (6).



الشكل(6)

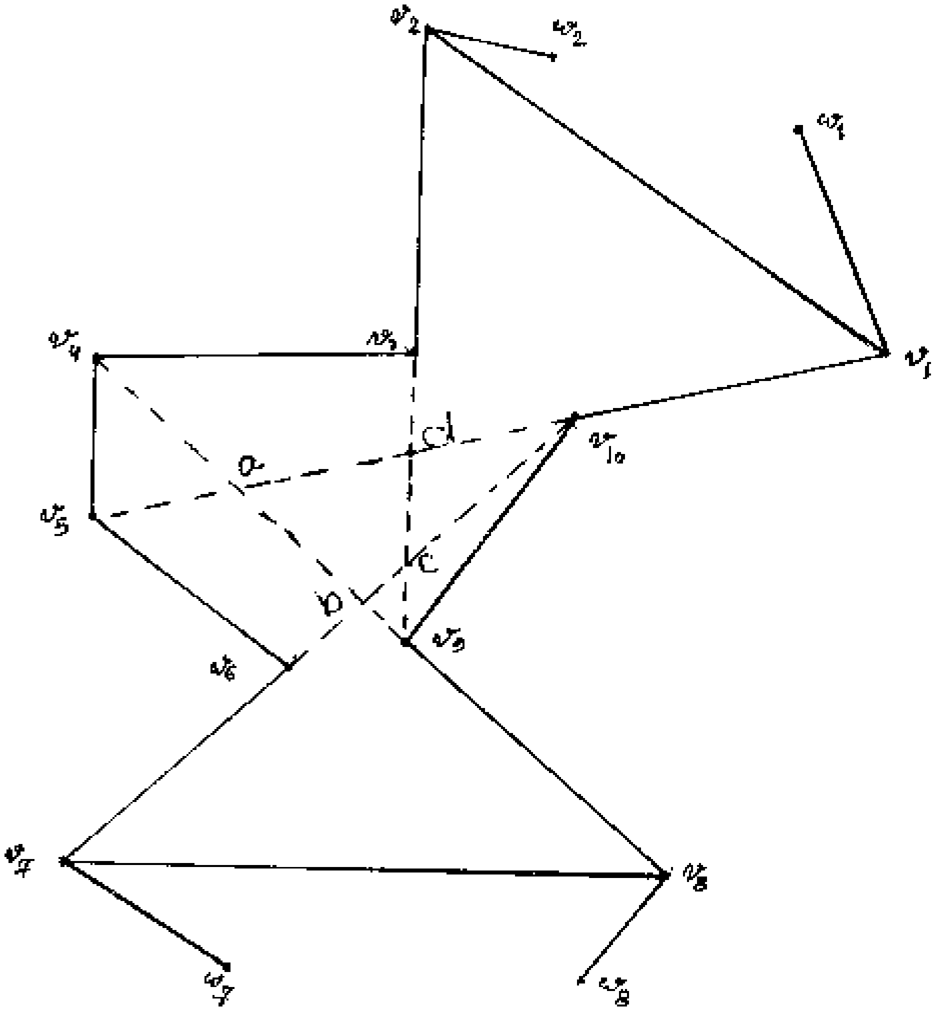
حيث أن المترك المستخدم في هذا المثال هو $d(x,y)=|x|+|y|$

إن جميع النقاط الجبهية للمجموعة A مرئية مترياً (وبالتالي مرئية) ضمن A من النقاط c,b,a أو d ، لكنها لا يمكن أن تكتب على شكل اجتماع أربع مجموعات نجمية مترياً ،بل على الأقل خمس مجموعات نجمية مترياً (وبالتالي نجمية)، لأن مجموعة النقاط داخل المستطيل المظلل غير مرئية ضمن A من أي من النقاط c,b,a أو d.

أيضاً ورد في العمل [6] مثال يوضح من أجل مفهوم الرؤية بوضوح للنجمية أن القضية السابقة غير صحيحة عندما k=4، وكذلك هذا المثال ينطبق على المفهوم الخطي في حالة الرؤية.

مثال(2):

لـــتكن T مجموعـــة مغلقـــة بســـيطة التـــرابط بحيـــث تكـــون جبهتهـــا عبـــارة عـــن منحنـــي مضـــلعي $I = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{10}, v_1)$ كما في الشكل (7).



الشكل(7)

ولتكن:

$$A = T \cup \left(\cup \{[v_i, w_i] : i = 1,2,7,8\}\right)$$

إن كل نقطة جبهية للمجموعة A مرئية بوضوح (وبالتالي مرئية) ضمن A من إحدى النقاط v_7, v_2, v_1 أو v_8، ولكن لا يمكن كتابة المجموعة A على شكل اجتماع اربع مجموعات نجمية، بل على الأقل خمس مجموعات نجمية، لأن النقاط الداخلية للرباعي abcd غير مرئية ضمن A من أي من النقاط v_7, v_2, v_1 أو v_8.

المراجع:

....

1- ظريف ، عدنان. 1991 – الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية مترياً في بعض الفضاءات المنظمة والمترية. مجلة جامعة كيشينوف العدد 1268 الصفحة 153–170 (لغة روسية).

2- طبالي ، أوليغ. ايفانوفيتش. ، ظريف ، عدنان. 1994 – نظرية واحدة عن اجتماع المجموعات النجمية مترياً في IR^2. مجلة المعرفة الأكاديمية العلمية في مالدوفا العدد 14 الصفحة 16–20 (لغة روسية).

3- بلتيانسكي ، فيكتور. غيورغوفيتش. ، سلطان ، بتروفيتش. سيميونوفيتش. 1987– البنية الهندسية لمختلف صفوف المجموعات المحدبة. كيشينيوف: شتينيتسا. كتاب مؤلف من 279 صفحة (لغة روسية)

4- سلطان ، فاليري. بتروفيتش. 1992. مقدمة في موضوع نظرية التحدب. كيشينيوف: شتينيتسا. كتاب مؤلف من 225 صفحة (لغة روسية).

5- ليختفايس ، ك. 1985 – المجموعات المحدبة. كتاب مترجم إلى الروسية في موسكو دار العلوم (لغة روسية).

6- BREEN,M.1989-clear visibility and unions of two star shaped sets in the plane, pacific, J.Math., vol 115, P 267 –275.

7- BREEN,M.1991-Unions of three star shaped sets in IR^2, J. of Geometry, vol. 36, P 8-16.