مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (27) العدد (1) 2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol. (27) No (1) 2005

التحدب الإحداثي واجتماع أربع مجموعات نجمية في R^2

الدكتور عدنان ظريف*
الدكتور أحمد الوسوف **
براءة عفيصة ***

(قبل للنشر في 2005/2/9)

□ الملخّص □

يقال عن مجموعة A في المستوي الإقليدي إنها محدبة إحداثياً إذا كان تقاطع أي مستقيم موازيا لأي من المحورين الإحداثيين مع مجموعة محدبة 0 و يقال عن مجموعة A في المستوي الإقليدي أيضاً أنها مجموعة نجمية إذا وجدت نقطة مثل a في هذه المجموعة بحيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل $x \in \mathrm{A}$ واقعة في A وعندئذ يقال إن جميع نقاط المجموعة A مرئية ضمن A من النقطة a .

وفي هذا البحث سوف نبرهن النظرية التالية :

"إذا كانت A مجموعة محدبة إحداثياً و متراصة في المستوي الإقليدي عندئذ تكون المجموعة A اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية فقط إذا وجد في A أربع نقاط مثل a,b,c,d بحيث تكون كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c أو d على الأقل "

* أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا
** أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا
*** طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (27) العدد (1) 2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol. (27) No (1) 2005

Coordinate Convexity and Union of Four Starshaped Sets in R^2

Dr. Adnan Zarif*
Dr. Ahmed Alwassouf**
Bara`a Afisa***

(Accepted 9/2/2005)

□ ABSTRACT □

In the Euclidean plane, we say that the set A is coordinate convex set, if and only if, any parallel line to any coordinate axes was intersected with A is convex set . And we say that the set A is star shaped set, if and only if, a point existed in A as (a), so that, every line segment [a, x] for all $x \in \mathrm{A}$ lie in A , in this case we say that every point $x \in \mathrm{A}$ was visible via A from a .

In this study will prove the following theory:

"If the set A is coordinate convex and compact set in the Euclidean plane then: The set A is union of four star shaped sets, if and only if, it existed in the set A four points as a,b,c,d , so that, every boundary point of A in this set will be visible from a,b,c or d at least."

*Associate Professor, Mathematics Department, Faculty Of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Mathematics Department, Faculty Of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department Of Mathematics, Faculty Of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

تمهيد:

إن مسألة إيجاد الشروط اللازمة و الكافية لكون مجموعة متراصة ما في الفضاء R^n اجتماعاً لمجموعات نجمية تلعب دوراً في غاية الأهمية في نظرية المجموعات النجمية . و هذه المسألة يمكن صياغتها على شكل النظرية الآتية:

" إذا كانت A مجموعة متراصة في الفضاء R^n $(n \le 3)$ عندئذ تكون المجموعة A اجتماعاً لـ k مجموعة نجمية إذا و فقط إذا وجدت k نقطة مثل $x_1, x_2, ..., x_k$ من نقاط A بحيث تكون كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى النقاط $x_1, x_2, ..., x_k$ "

إن النظرية السابقة درست في حالات كثيرة في المستوي الإقليدي سواء في حالة المفهوم الخطي للنجمية أو في حالة المفهوم المتري لها . ففي العمل [12] تم إثباتها في حالة المفهوم الخطي من أجل المجموعات المتراصة بسيطة الترابط ، و تم إثباتها في حالة $n = 2$ & $k = 3$. و في العمل [13] تم إثباتها من أجل المجموعات المتراصة ثنائية الترابط في حالة $n = 2$ & $k = 2$ وتم التوصل إلى أنها غير محققة من أجل $k \ge 3$. أما في الأعمال [9-8-7-6] فتمت مناقشتها في حالة المفهوم الخطي للنجمية من أجل $n = 2,3$ و لكن بإضافة شرط الرؤية بوضوح بدلاً من الرؤية العادية . أما في العملين [5-11] فقد درست المسألة في حالة المفهوم المتري للنجمية من أجل $n = 2$ & $k = 3$ و تم التوصل إلى أنها غير محققة من أجل $k \ge 4$. و في العمل [10] درست المسألة في حالة المفهوم المتري للنجمية في الفضاء المنظم R^2 من أجل أي نظيم|| . || . وأثبتت من أجل $k = 3$ في حالة الرؤية المترية بوضوح .

إن جميع الدراسات السابقة توقفت عند قيمة عظمى لـ k و هي 3 . و لكننا في دراستنا هذه سوف نبين أن القضية محققة من أجل $k = 4$ في حالة المجموعات المتراصة المحدبة إحداثياً في R^2 .

سنورد الآن أهم التعاريف و الرموز التي سترد في البحث:

1- يقال عن مجموعة A في المستوي الإقليدي أنها محدبة إذا و فقط إذا تحقق من أجل كل $x, y \in A$ أن القطعة المستقيمة $[x, y]$ محتواة في A .

2- لتكن $x, y \in A$ نقطتين كيفيتين فإننا نقول أن النقطة x ترى النقطة y ضمن A (أو y مرئية من x ضمن A)إذا كان $[x, y] \subset A$.

3-الرمز $bdr(A)$ يعني جبهية A و $\text{int}(A)$ يعني داخلية A و $ex(A)$ يعني خارجية A والرمز $[a,b]$ يعني القطعة المستقيمة التي طرفاها a,b ،و الرمز $]a,b[$ يعني القطعة المستقيمة $[a,b]$ باستثناء طرفيها a,b ، والرمز $L(a,b)$ يعني المستقيم المار من النقطتين a,b ،،والرمز $N_\rho(y_1)$ يعني كرة مفتوحة في المستوي الإقليدي $(R^2$ ،d) مركزها y_1 و نصف قطرها $\rho > 0$ ،أما الرمز $conv(A)$ يعني الغلاف المحدب لـ A و هو أصغر مجموعة محدبة تحوي A .

<u>نظرية</u>: "إذا كانت A مجموعة محدبة إحداثياً و متراصة في المستوي الإقليدي عندئذ تكون المجموعة A اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية إذا و فقط إذا وجد في A أربع نقاط مثل a,b,c,d بحيث تكون كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c أو d على الأقل ".

البرهان:

برهان لزوم الشرط :

لنفرض أن A تكتب بالشكل التالي : $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ بحيث أن A_1, A_2, A_3, A_4 مجموعات نجمية. $\forall x \in bdr(A) \Rightarrow x \in A$ (لأن A متراصة فهي مغلقة $\Leftarrow A \supseteq bdr(A)$) فحسب النتيجة "إذا كانت A مجموعة محدبة إحداثياً في المستوي الإقليدي عندئذ تكون المجموعة A اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية إذا و فقط إذا وجد في A أربع نقاط مثل a,b,c,d بحيث تكون كل نقطة من A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c أو d على الأقل ". توجد النقاط a,b,c,d من A بحيث تكون كل نقطة $x \in A$ مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط، و هذا يعني أن كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى النقاط الأربعة السابقة على الأقل .

برهان كفاية الشرط :

لنفرض أنه توجد أربع نقاط في A مثل a,b,c,d بحيث تكون كل نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقل (Δ) و لنضع :

$$A_1 := \{x \in A : [a,x] \subseteq A\} \;\&\; A_2 := \{x \in A : [b,x] \subseteq A\} \;\&$$
$$A_3 := \{x \in A : [c,x] \subseteq A\} \;\& A_4 := \{x \in A : [d,x] \subseteq A\}$$

نلاحظ أنه بحسب تعريف المجموعة A_1 تكون A_1 مجموعة نجمية لأنه أياً كانت $x \in A_1$ فإن $[a,x] \subseteq A_1$ و بنفس الشكل نجد أن A_2, A_3, A_4 مجموعات نجمية أيضاً 0

و لنبرهن الآن أن : $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

فمن تعريف A_1, A_2, A_3, A_4 نجد أن :

$$A_1 \subseteq A \,\&\, A_2 \subseteq A \,\&\, A_3 \subseteq A \,\&\, A_4 \subseteq A \Rightarrow \boxed{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \subseteq A} \;.....\boxed{1}$$

برهان الاحتواء العكسي :

$$\forall x \in A \Rightarrow either\ x \in bdr(A) \ \text{ or } \ x \in \text{int}(A)$$

– إذا كان $x \in bdr(A)$: ضمن هذه الحالة لنفرض جدلاً أن $x \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \Longleftarrow x$ غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d و هذا تناقض مع الفرض (Δ) بالتالي فرضنا الجدلي خاطئ و الصحيح هو أن $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ و بمراعاة الاختيار الكيفي لـ $x \in bdr(A)$ نجد صحة الاحتواء التالي :

$$\boxed{bdr(A) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4} \qquad \boxed{\text{I}}$$

– أما إذا كان $x \in \text{int(A)}$ فإننا نميز عدة حالات :

1 – حالة تساوي النقاط الأربعة.

2– حالة تساوي نقطتين من النقاط الأربعة.

3 – حالة تساوي ثلاث نقاط من النقاط الأربعة .

و يتم برهان النظرية الحالية في هذه الحالات بالاعتماد على النظرية (2) في المرجع [12]

4 – حالة $x \in \{a,b,c,d\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{either } x=a \Rightarrow x \in A_1 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ \text{or } x=b \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ \text{or } x=c \Rightarrow x \in A_3 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ \text{or } x=d \Rightarrow x \in A_4 \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \end{array}\right\}$

$\Leftarrow \boxed{\text{int}(A) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ و بالتالي تحققت النظرية ضمن هذه الحالة .

و الآن سنبرهن النظرية في الحالة العامة ، أي في حال كون $a \neq b \neq c \neq d$ مع $x \notin \{a,b,c,d\}$ و أثناء الدراسة سأتبع طريقة نقض الفرض ، فمن أجل ذلك سنفرض جدلاً $(*)$ $x \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ و هذا يعني أن X غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d أي :

$[a,x] \not\subset A \& [b,x] \not\subset A \& [c,x] \not\subset A \& [d,x] \not\subset A$ فهذا يعني أنه:

$$\exists a_1, a_2 \in bdr(A) \cap [a,x] : [a,a_1] \subseteq A \& [a_2,x] \subseteq A$$
$$\exists b_1, b_2 \in bdr(A) \cap [b,x] : [b,b_1] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A$$
$$\exists c_1, c_2 \in bdr(A) \cap [c,x] : [c,c_1] \subseteq A \& [c_2,x] \subseteq A$$
$$\exists d_1, d_2 \in bdr(A) \cap [d,x] : [d,d_1] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$$

كما نلاحظ أن : $[a,a_2] \not\subset A$ لأنه لو تحقق غير ذلك لكان :

$[a,x] = [a,a_2] \cup [a_2,x] \not\subset A \quad \Leftarrow \quad [a,x] \subseteq A$ وهذا يناقض $(*)$

و بنفس الطريقة نجد أن : $[d,d_2] \not\subset A \& [c,c_2] \not\subset A \& [b,b_2] \not\subset A$.

و الآن سنناقش حالتين رئيسيتين : $1'$ – حالة $\boxed{x \in conv\{a,b,c,d\}}$ و ضمن هذه الحالة لدينا عدة حالات فرعية:

1– نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على xl ,xl' (xl مستقيم موازي للمحور oX و مار من النقطة x ، xl' مستقيم موازي للمحور oY و مار من النقطة x) ، و النقطتان الباقيتان تقعان في ربعين مختلفين بحيث أن $x \in conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b تقع على xl' و d تقع في الربع الرابع و c تقع في الربع الثالث .

و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,c_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$$

$\& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,b_2] \subseteq A .$ الشكل (1) .

نلاحظ أن : $x \notin L(a,b)$ لأنه لو فرضنا مثلاً أن $x \in L(a,b)$ لكانت النقاط a,a_2,x,b_2,b على استقامة واحدة$\Leftarrow$

$[a,x] \subseteq [a,b_2] \subseteq A \Leftarrow A \supseteq [a,x]$ وهذا تناقض مع$(*)$ $\Leftarrow x \notin L(a,b)$. و بنفس الشكل نجد أن:

$$x \notin L(a,d) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(c,d) \& x \notin L(b,d)$$

و من جهة ثانية : بما أن $[d_2,x]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&[a,b_2]\subseteq A\&[b_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي xd_2ab_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً فإن $conv\{x,d_2,a,b_2\}\subseteq A$ و لكن لدينا $]a_1,a_2[\not\subset A$ مع كون $]a_1,a_2[\subseteq conv\{x,d_2,a,b_2\}$ فهذا تناقض، بالتالي فرضنا(*) خاطئ والصحيح أن $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$[a,b_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\ \&[c,a_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A$ الشكل (2) .

نلاحظ أن : $x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$
$\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(a,d)$

كما أن $x\notin L(b,d)$ لأنه لو تحقق غير ذلك لكان محيط المثلث ab_2d_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow x\notin L(b,d)$.

و من جهة ثانية :بما أن $[d_2,x]\subseteq A\&[b_2,x]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&[a,b_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي ad_2xb_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A[d,a_2]\subseteq A$ الشكل (3)

نلاحظ أن : $x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$

و لبرهان أن: $x\notin L(a,c)$ نفرض جدلاً أن $x\in L(a,c)$ فهذا يعني أن المستقيم $L(a,c)$ الموازي لـ oX يتقاطع مع المجموعة A بالمجموعة B التالية : $B=[c,c_1]\cup[c_2,a_2]\cup[a_1,a]$ وهذه المجموعة ليست محدبة لأننا نستطيع إيجاد النقطتين $y_1\in[a_1,a]\in B\ \&\ y_2\in[c,c_1]\in B$ بحيث أن $[y_1,y_2]\not\subset B$ وهذا تناقض مع كون A مجموعة محدبة إحداثياً $\Leftarrow x\notin L(a,c)$ و بنفس الأسلوب نبرهن أن $x\notin L(b,d)$

و من جهة ثانية : بما أن $x\in\text{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[a_2,x]$ من جهة x (الشكل (3)) حتى نحصل على النقطة الجبهية a_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[a_2,a_3]$ أعظمي عندئذ نجد: $[a,a_3]\not\subset A$ لأنه لو فرضنا مثلاً أن $[a,a_3]\subset A$ لكانت $[a,x]\subseteq[a,a_3]\subseteq A\Leftarrow$ $[a,x]\subseteq A$ وهذا تناقض مع $(*)\Leftarrow[a,a_3]\not\subset A$.

و كذلك $[c,a_3]\not\subset A$ لأنه لو فرضنا مثلاً أن $[c,a_3]\subset A$ لكان محيط الرباعي xd_2ca_3 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]c_1,c_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow[c,a_3]\not\subset A$ و بنفس الأسلوب نجد $[d,a_3]\not\subset A$.

أما لبرهان أن $[b,a_3]\not\subset A$ نفرض جدلاً أن $[b,a_3]\subseteq A$ و لتكن t نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين $[b,c_2],[x,a_3]$ و بما أن $[b,x]\not\subset A$ فإن $conv\{x,b,a_3\}\not\subset A$ و أيضاً بما أن $[b,a_3]\subseteq A\&[t,a_3]\subseteq[x,a_3]\subseteq A\&[b,t]\subseteq[b,c_2]\subseteq A$ $\Leftarrow$ محيط المثلث bta_3 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً فإن $conv\{b,t,a_3\}\subseteq A$ و مما سبق نجد أن : $conv\{t,b,x\}\not\subset A$. و لتكن $y\in[x,t]$

هـي النقطـة الأقـرب إلـى t بحيـث أن $conv\{t,b,y\} \not\subset A$ عندئـذ :
$\exists y_1 \in [b,y] \cap ex(A) \Rightarrow y_1 \in R^2 / A$ و بمـا أن A متراصـة فهـي مغلقـة $\Leftarrow R^2 / A$ مفتوحـة $\Leftarrow$
$\exists N_p(y_1): N_p(y_1) \subseteq R^2 / A; 0 < \rho \in R$ بحيـث أن : $N_\rho(y_1) \cap conv\{t,b,y\} \neq \phi$ و لـتكن:
$z \in N_\rho(y_1) \cap conv\{t,b,y\}$ مع $z \notin [b,y] \Leftarrow [b,z] \not\subset A$ و لتكن v نقطة تقاطع المستقيم المار من z,b مع $[x,a_3]$ و بما أن $[b,z] \not\subset A$ فإن $conv\{t,b,v\} \not\subset A$ و هذا تناقض مع كون y هي النقطة الأقرب إلى t والتي تحقق من أجلها العلاقة $conv\{b,y,t\} \not\subset A \Leftarrow [b,a_3] \not\subset A$ و في هذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـ A وهي a_3 وغير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض $(\Delta) \Leftarrow$ الفرض (*) خاطئ $\Leftarrow$
$\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

2 – نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على المحورين $xl\ ,\ xl'$ ، والنقطتان الباقيتان تقعان في ربع واحد و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b تقع على xl' و النقطتان d و c تقعان في الربع الثالث .
و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,c_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$$
$$\& [b,c_2] \subseteq A \& [d,c_2] \subseteq A \& [c,b_2] \subseteq A$$ الشكل (4)

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(d,a) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن :

$$[d_2,x] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A \& [a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

②إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \ \& [c,a_2] \subseteq A \& [d,c_2] \subseteq A$ الشكل (5).

نلاحظ أن:

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(a,c) \& x \notin L(a,d) \& x \notin L(b,d)$$

L'

من جهة ثانية : بما أن

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \&$$
$$[b_2,x] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$$

فإن محيط الرباعي b_2ad_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$\left[a,b_2\right]\subseteq A\&\left[b,c_2\right]\subseteq A\&\left[c,d_2\right]\subseteq A\left[d,a_2\right]\subseteq A$$ الشكل (6)

نلاحظ أن : $x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$

و يتم ذلك بشكل مشابه لما سبق

من جهة ثانية : بما أن $x\in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $\left[a_2,x\right]$ من جهة x (الشكل (6)) حتى نحصل على النقطة الجبهية a_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $\left[a_2,a_3\right]$ أعظمي نلاحظ أن : $\left[a,a_3\right]\not\subset A\&\ \left[c,a_3\right]\not\subset A\&\ \left[b,a_3\right]\not\subset A\&\ \left[d,a_3\right]\not\subset A$ و يتم ذلك بشكل مشابه لما سبق، و في هذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـ A و هي a_3 و غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) ⇐ الفرض (*) خاطئ ⇐ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

3 – نقطة واحدة تقع على xl أو xl' و النقاط الثلاث الأخرى تتوضع في ثلاث أرباع مختلفة بحيث يكون $x\in conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع في الربع الأول و b تقع على xl' و c تقع في الربع الثالث أما d فتقع في الربع الرابع.

و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$\left[a,c_2\right]\subseteq A\&\left[d,c_2\right]\subseteq A\&\left[d,b_2\right]\subseteq A\&$$
$$\&\left[d,a_2\right]\subseteq A\&\left[c,b_2\right]\subseteq A\&\left[b,a_2\right]\subseteq A$$ الشكل (7)

نلاحظ أن :

$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)\&x\notin L(d,a)$$
$$\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن : $\left[a_2,x\right]\subseteq A\&\left[c_2,d\right]\subseteq A\&\left[d,a_2\right]\subseteq A\&\left[c_2,x\right]\subseteq A$

فإن محيط الرباعي a_2dc_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $\left]d_1,d_2\right[\not\subset A$

فإننا نتوصل إلى تناقض ⇐ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $\left[a,b_2\right]\subseteq A\&\left[b,d_2\right]\subseteq A\&\left[d,c_2\right]\subseteq A\&\left[c,b_2\right]\subseteq A\&\left[d,a_2\right]\subseteq A$ الشكل (8)

نلاحظ أن :

$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

و من جهة ثانية : بما أن : $\left[a_2,x\right]\subseteq A\&\left[d,a_2\right]\subseteq A\&\left[x,c_2\right]\subseteq A\&\left[d,c_2\right]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي da_2xc_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $\left]d_1,d_2\right[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض ⇐

$$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,c_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A\ \&\ [d,a_2]\subseteq A$$ الشكل (9)

نلاحظ أن :
$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[b_2,x]$ من جهة x (الشكل (9)) حتى نحصل على النقطة الجبهية b_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[b_2,b_3[$ أعظمي وبشكل مشابه لما سبق نجد أن b_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ الفرض (*) خاطئ$\Leftarrow$

$$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$$

4 – نقطة واحدة تقع على xl أو xl' و النقاط الثلاث الأخرى تتوضع في ربعين و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b,c تقعان في الربع الثاني و d فتقع في الربع الثالث بحيث يكون $x\in conv\{a,b,c,d\}$ وللدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,b_2]\subseteq A\&[a,c_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&$$
$$\&[b,c_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A\&[c,b_2]\subseteq A$$ الشكل (10)

نلاحظ أن :
$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)\&x\notin L(d,a)$$

من جهة ثانية : بما أن : $[a,b_2]\subseteq A\&[x,b_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&[x,d_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$

$$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,a_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A$ الشكل (11)

نلاحظ أن :
$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)\&x\notin L(b,d)$$
$$\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(d,a)$$

ومن جهة ثانية :بما أن: $[a,b_2]\subseteq A\&[b_2,x]\subseteq A\&[x,d_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض

$\Leftarrow$ $$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A\&[d,b_2]\subseteq A$$ الشكل (12)

نلاحظ أن :
$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[d_2, x]$ من جهة x (الشكل (12)) حتى نحصل على النقطة الجبهية d_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[d_2, d_3]$ أعظمياً وبشكل مشابه لما سبق نجد أن d_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض $(\Delta) \Leftarrow$ الفرض (*) خاطئ

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

5 – النقاط الأربعة تتوزع على الأرباع الأربعة ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع في الربع الأول و b في الثاني و c في الثالث و d في الرابع بحيث يكون $x \in conv\{a,b,c,d\}$ و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,c_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \&$$
$$\& [d,c_2] \subseteq A \& [c,b_2] \subseteq A \& [b,d_2] \subseteq A \quad \text{(13) الشكل}$$

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(d,a) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن : $[a,b_2] \subseteq A \& [x,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [x,d_2] \subseteq A$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,a_2] \subseteq A \& [d,c_2] \subseteq A \quad \text{(14) الشكل}$$

نلاحظ أن : $x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d) \& x \notin L(b,d) \&$

$$x \notin L(a,c) \& x \notin L(d,a)$$

من جهة ثانية : بما أن :

$$[a,b_2] \subseteq A \& [x,b_2] \subseteq A \& [x,d_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,a_2] \subseteq A$ الشكل (15)

نلاحظ أن : $x \notin L(d,a) \& \; x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$

و كذلك $x \notin L(a,c)$ لأنه لو فرضنا $x \in L(a,c)$ (الشكل (16)) فبما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[x,d_2]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية d_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[d_2,d_3]$ أعظمي وبشكل مشابه لما سبق نجد أن d_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض $(\Delta) \Leftarrow x \notin L(a,c)$ و بنفس الأسلوب نبرهن أن $x \notin L(b,d)$.

من جهة ثانية : بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[a_2, x[$ من جهة x (الشكل (15)) حتى نحصل على النقطة الجبهية a_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[a_2, a_3[$ أعظمياً وبشكل مشابه لما سبق نجد أن a_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض $\Leftarrow$ الفرض (*) خاطئ

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

6 – كل نقطتين من النقاط a,b,c,d تقعان معاً في ربع واحد بحيث تتحقق $x \in conv\{a,b,c,d\}$ ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b تقعان في الربع الأول و c,d فتقع في الربع الثالث. و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,c_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \&$$

$$\& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,b_2] \subseteq A \quad \text{(17) الشكل}$$

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d) \& x \notin L(d,a)$$

$$\& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن : $[a,b_2] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [x,d_2] \subseteq A$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,a_2] \subseteq A \& [d,c_2] \subseteq A \quad \text{(18) الشكل}$$

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$

$$\& x \notin L(b,d) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(d,a)$$

من جهة ثانية : بما أن

$$[a,b_2] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A \& [x,d_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

③كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A$$

$$\& \ [d,a_2] \subseteq A \quad \text{(19) الشكل}$$

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$

$$\& x \notin L(d,a) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

من جهة أخرى : بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[a_2, x]$ من جهة x الشكل (19) حتى نحصل على النقطة الجبهية a_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[a_2, a_3]$ أعظمي وبشكل مشابه لما سبق نجد أن a_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ)

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

7 – نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان في ربع واحد معاً و النقطتين الباقيتين تقعان في ربعين مختلفين ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع في الربع الأول و c,b فتقعان في الربع الثاني و d في الثالث بحيث يكون $x \in conv\{a,b,c,d\}$.و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,c_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \&$$
$$[b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,b_2] \subseteq A$$ ، الشكل (20)

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(d,a) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن $[a,b_2] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$

فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A$$
$$\& [c,a_2] \subseteq A \& [d,c_2] \subseteq A$$ الشكل (21)

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(b,d) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(d,a)$$

من جهة ثانية : بما أن $[a,b_2] \subseteq A \& [b_2,x] \subseteq A \& [x,d_2] \subseteq A \& [a,d_2] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض

$$\Leftarrow \quad \boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,a_2] \subseteq A$$ الشكل (22)

نلاحظ أن :

$$x \notin L(a,b) \& x \notin L(b,c) \& x \notin L(c,d)$$
$$\& x \notin L(d,a) \& x \notin L(a,c) \& x \notin L(b,d)$$

و من جهة أخرى :

بمـا أن $x\in \operatorname{int}(A)$ فإننـا نسـتطيع أن نمـدد القطعـة $[c_2,x]$ مـن جهـة x حتـى نحصـل علـى النقطـة الجبهيـة c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي. وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

8 – ثـلاث نقـاط مـن النقـاط a,b,c,d تقـع فـي ربـع واحـد معـاً و النقطـة الباقيـة تقـع فـي ربـع آخـر بحيـث يكون $x\in conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b,c تقع في الربع الأول و d في الثالث و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقـاط a,b,c,d تـرى ضـمن A ثـلاث نقـاط مـن النقـاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المسـاس بعموميـة المسألة أن :

$$[d,a_2]\subseteq A\&[d,b_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A\&$$

$$\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,a_2]\subseteq A\&[a,b_2]\subseteq A$$ الشكل(23).

نلاحظ أن :

$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

من جهة ثانية : بما أن: $[a_2,x_2]\subseteq A\&[x,c_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A$

فإن محيط الرباعي a_2xc_2d محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]d_1,d_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[d,a_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A\&[a,b_2]\subseteq A\&[c,b_2]\subseteq A\&[b,d_2]\subseteq A$$ الشكل (24)

نلاحظ أن :

$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$\&x\notin L(b,d)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(d,a)$$

من جهة ثانية : بما أن $[a_2,x]\subseteq A\&[x,c_2]\subseteq A\&[d,c_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A$

فإن محيط الرباعي a_2xc_2d محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]d_1,d_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطـة مـن النقاط a,b,c,d تـرى ضـمن A نقطـة واحـدة مـن النقـاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المسـاس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A[d,a_2]\subseteq A$$ الشكل (25)

نلاحظ أن :

$$x\notin L(a,b)\&x\notin L(b,c)\&x\notin L(c,d)$$
$$\&x\notin L(d,a)\&x\notin L(a,c)\&x\notin L(b,d)$$

من جهة أخرى : بما أن $x\in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي الشكل (25) وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ)

$\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ $\Leftarrow$

2 ةّ – حالة $\boxed{x \notin conv\{a,b,c,d\}}$ و ضمن هذه الحالة لدينا عدة حالات فرعية و ضمن كل الحالات لدينا

$$x \notin L(a,b) \,\&\, x \notin L(b,c) \,\&\, x \notin L(c,d) \,\&\, x \notin L(d,a) \,\&\, x \notin L(a,c) \,\&\, x \notin L(b,d)$$

1– نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على $xl\,,\,xl'$، و النقطتان الباقيتان تقعان في ربع واحد معاً بحيث أن $x \notin conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b تقع على xl' و c,d تقعان في الربع الثاني معاً . و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : الشكل(26) $[c,a_2] \subseteq A \,\&\, [c,b_2] \subseteq A \,\&\, [c,d_2] \subseteq A$

والآن بما أن : $[x,b_2] \subseteq A \,\&\, [c,b_2] \subseteq A \,\&\, [c,d_2] \subseteq A$

$[d_2,x] \subseteq A \,\&$ فإن محيط الرباعي xb_2cd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]c_1,c_2[\not\subset A$.

نتوصل إلى تناقض، بالتالي $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[c,a_2] \subseteq A \,\&\, [c,d_2] \subseteq A$ الشكل(27) و بما أن $[x,a_2] \subseteq A \,\&\, [d_2,x] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2cd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]c_1,c_2[\not\subset A$

نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \,\&\, [b,c_2] \subseteq A \,\&\, [c,d_2] \subseteq A [d,a_2] \subseteq A \quad \text{الشكل (28)}$$

و بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي الشكل (28) .

وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

2– نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على $xl\,,\,xl'$ ، و النقطتان الباقيتان تقعان في ربعين مختلفين شريطة أن $x \notin conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و c تقع على xl' و d و b تقع في الأول و d في الثاني و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[b,d_2] \subseteq A \,\&\, [b,c_2] \subseteq A \,\&\, [b,a_2] \subseteq A \quad \text{الشكل (29)}$$

و بما أن : $[b,a_2] \subseteq A \,\&\, [b,d_2] \subseteq A \,\&\, [d_2,x] \subseteq A \,\&\, [a_2,x] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: الشكل (30) $[b,d_2] \subseteq A \,\&\, [b,a_2] \subseteq A$

من جهة ثانية : بما أن $[a_2,x]\subseteq A\&[d_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألةأن:

$$[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A[d,a_2]\subseteq A \quad \text{الشكل (31)}$$

بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x (الشكل (31)) حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـA بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي . وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

3 – نقطة واحدة تقع على xl أو xl' و النقاط الثلاث الأخرى تتوضع في ثلاثة أرباع مختلفة بحيث يكون $x\notin conv\{a,b,c,d\}$ و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع في الربع الأول و b تقع على xl' و c تقع في الربع الثاني أما d فتقع في الربع الرابع و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[a,c_2]\subseteq A\&[a,b_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A \quad \text{الشكل (32)}$$

من جهة ثانية : بما أن : $[x,b_2]\subseteq A\&[x,d_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: الشكل (33) $[a,b_2]\subseteq A\&[a,d_2]\subseteq A$

من جهة ثانية : بما أن $[x,d_2]\subseteq A\&[x,b_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي ab_2xd_2 محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A \quad \text{الشكل(34)}$$

من جهة ثانية : بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[b_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية b_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[b_2,b_3]$ أعظمي. وبشكل مشابه لما سبق نجد أن b_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

4 – نقطة واحدة تقع على xl أو xl' و النقاط الثلاث الأخرى تتوضع في ربع واحد معاً و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b,c,d تقع في الربع الثاني و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$$[b,a_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[b,d_2]\subseteq A \quad \text{الشكل (35)}$$

من جهة ثانية : بما أن : $[c_2,x]\subseteq A\&[x,d_2]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bc_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[b,a_2]\subseteq A\&[b,d_2]\subseteq A$ الشكل (36) و بما أن $[a_2,x]\subseteq A\&[d_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياًو $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A$ الشكل (37)

من جهة ثانية : بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمياً الشكل (37).

نلاحظ أن : $[c,c_3]\not\subset A\&[a,c_3]\not\subset A\&[b,c_3]\not\subset A\&[d,c_3]\not\subset A$

وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

5- نقطة واحدة تقع على xl أو xl' و النقاط الثلاث الأخرى تتوضع في ربعين و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a تقع على xl و b,d تقعان في الربع الثاني و c فتقع في الربع الأول بحيث يكون $x\notin conv\{a,b,c,d\}$ و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : الشكل (38) $[c,a_2]\subseteq A\&[c,b_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A$

من جهة ثانية : بما أن : $[a_2,x]\subseteq A\&[b_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2cb_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]c_1,c_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: الشكل (39) $[c,a_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A$

بما أن : $[b_2,x]\subseteq A\&[a_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2cd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]a_1,a_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,c_2]\subseteq A\&[c,b_2]\subseteq A\&[b,d_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A$ الشكل (40)

من جهة ثانية : بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[b_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية b_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[b_2,b_3]$ أعظمي و نلاحظ ان :

$$[d,b_3]\not\subset A\&[c,b_3]\not\subset A\&[a,b_3]\not\subset A\&[b,b_3]\not\subset A$$

وبشكل مشابه لما سبق نجد أن b_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ)
$\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

6 – النقاط الأربعة تتجمع في ربع واحد معاً ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b,c,d تقع في الربع الأول و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : الشكل (41) $[b,a_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [b,d_2] \subseteq A$

من جهة ثانية : بما أن : $[a_2,x] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[b,a_2] \subseteq A \& [b,d_2] \subseteq A$ بما أن : $[a_2,x] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2
و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$$[a,b_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A [d,a_2] \subseteq A \quad \text{(43) الشكل}$$

و من جهة ثانية بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x (الشكل (43)) حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي وبشكل مشابه لما سبق نجد أن c_3 غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

7 – كل نقطتين من النقاط a,b,c,d تقعان في ربع واحد معاً بحيث يكون $x \notin conv\{a,b,c,d\}$ ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b تقعان في الربع الأول و d,c فتقعان في الربع الثاني ، و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : $[b,a_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [b,d_2] \subseteq A$ الشكل (44)

من جهة ثانية : بما أن : $[a_2,x] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: الشكل (45) $[b,a_2] \subseteq A \& [b,d_2] \subseteq A$ بما أن $[a_2,x] \subseteq A \& [d_2,x] \subseteq A$
فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2] \subseteq A \& [b,c_2] \subseteq A \& [c,d_2] \subseteq A \& [d,a_2] \subseteq A$ الشكل (46)

من جهة أخرى : بما أن $x \in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A

بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي و نلاحظ أن :

$$[c,c_3]\not\subset A\&[a,c_3]\not\subset A\&[b,c_3]\not\subset A\&[d,c_3]\not\subset A$$

ويتم ذلك بشكل مشابه لما سبق وبهذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـ A و هي c_3 و غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

8- نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان في ربع واحد معاً و النقطتين الباقيتين تقعان في ربعين مختلفين بحيث يكون $x\notin conv\{a,b,c,d\}$، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b تقع في الربع الأول و c تقع في الربع الثاني و d في الرابع و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : $[b,d_2]\subseteq A\&[b,a_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A$ الشكل (47)

وبما أن : $[d_2,x]\subseteq A\&[c_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي d_2bc_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن الشكل (48) $[b,d_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A$

بما أن: $[c_2,x]\subseteq A\&[d_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي d_2bc_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[c,d_2]\subseteq A\&[d,a_2]\subseteq A$ الشكل(49).

من جهة أخرى : بما أن $x\in\operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[c_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[c_2,c_3]$ أعظمي و نلاحظ أن :

$$[c,c_3]\not\subset A\&[a,c_3]\not\subset A\&[b,c_3]\not\subset A\&[d,c_3]\not\subset A$$

ويتم ذلك بشكل مشابه لما سبق وبهذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـ A و هي c_3 و غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

9- ثلاث نقاط من النقاط a,b,c,d تقع في ربع واحد معاً النقطة الباقية تقع في ربع آخر بحيث يكون $x\notin conv\{a,b,c,d\}$ ، و بدون المساس بعمومية المسألة نفرض أن a,b,c تقع في الربع الأول و d في الثاني و للدراسة لدينا عدة حالات أيضاً :

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن : الشكل (50) $[b,a_2]\subseteq A\&[b,c_2]\subseteq A\&[b,d_2]\subseteq A$

بما أن : $[a_2,x]\subseteq A\&[d_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

فإننا نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[b,a_2]\subseteq A \& [b,d_2]\subseteq A$ الشكل (51)

بما أن : $[d_2,x]\subseteq A \& [a_2,x]\subseteq A$ فإن محيط الرباعي a_2bd_2x محتوى في A ، و بما أن A محدبة إحداثياً و $]b_1,b_2[\not\subset A$ نتوصل إلى تناقض $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 و لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن: $[a,b_2]\subseteq A \& [b,c_2]\subseteq A \& [c,d_2]\subseteq A [d,a_2]\subseteq A$ الشكل (52)

من جهة أخرى : بما أن $x\in \operatorname{int}(A)$ فإننا نستطيع أن نمدد القطعة $[d_2,x[$ من جهة x حتى نحصل على النقطة الجبهية c_3 لـ A بحيث يكون طول القطعة $[d_2,d_3[$ أعظمي و نلاحظ أن :

$$[d,d_3]\not\subset A \& [a,d_3]\not\subset A \& [b,d_3]\not\subset A \& [c,d_3]\not\subset A$$

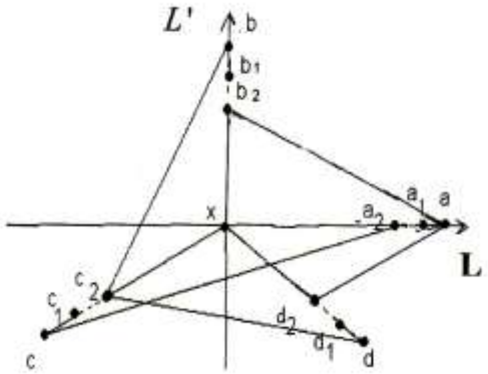
ويتم ذلك بشكل مشابه لما سبق وبهذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـ A و هي d_3 و غير مرئية ضمن A من أي من النقاط a,b,c,d فهذا تناقض مع الفرض (Δ) $\Leftarrow$ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

لاحظنا أنه في كلتا الحالتين (1)، (2) أن $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي لـ $x\in \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\operatorname{int}(A)\subseteq A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

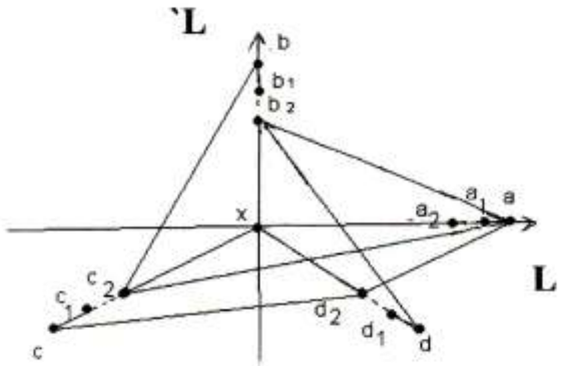
ومن $\boxed{I} \& \boxed{II}$ نجد أن : $\boxed{A\subseteq A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$ $\boxed{2}$

ومن $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أن : $\boxed{A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

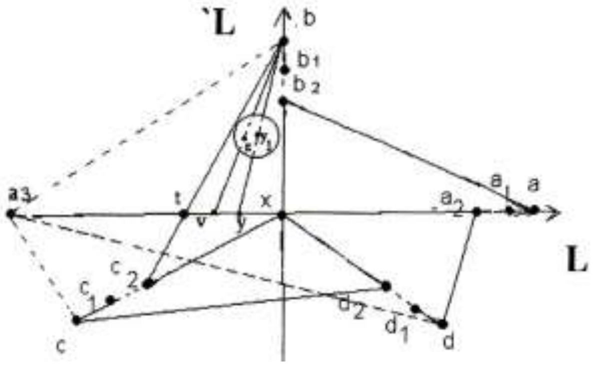
وهذا يعني أن A تكتب بشكل اجتماع لأربع مجموعات نجمية .



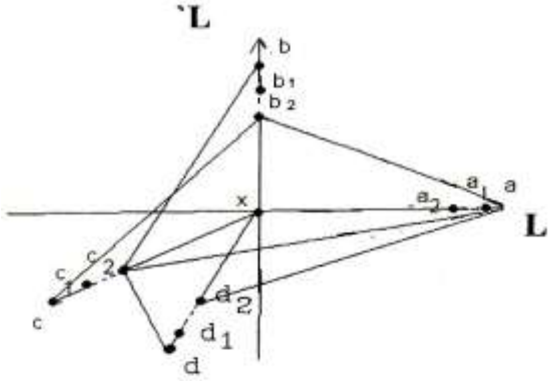
الشكل (2)



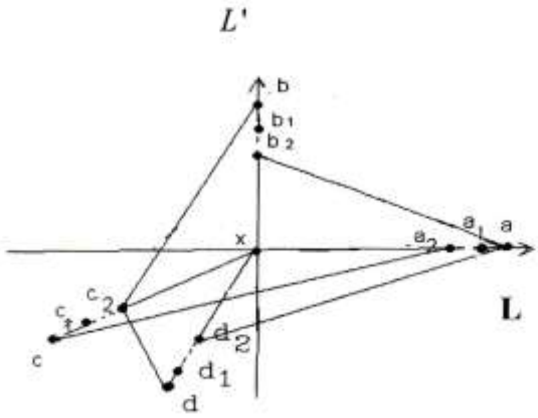
الشكل (1)



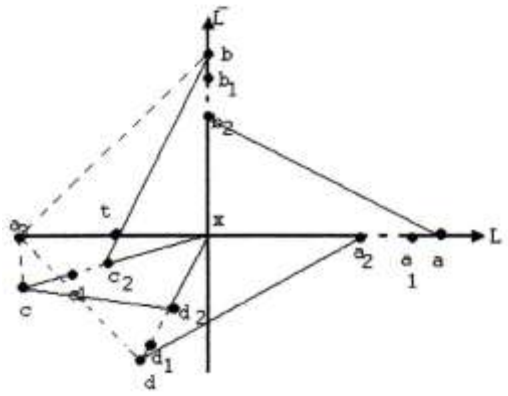
الشكل (3)



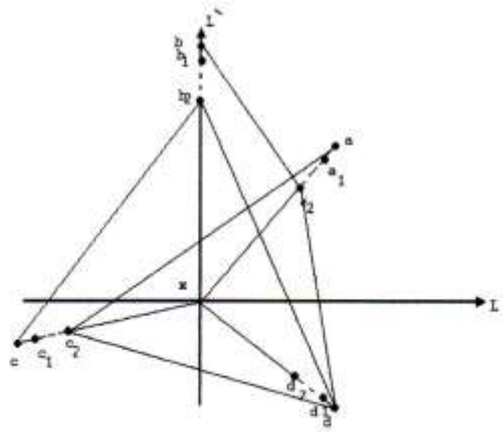
الشكل (4)



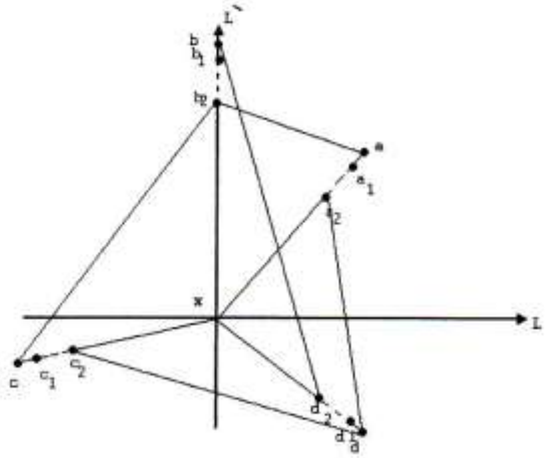
الشكل (5)



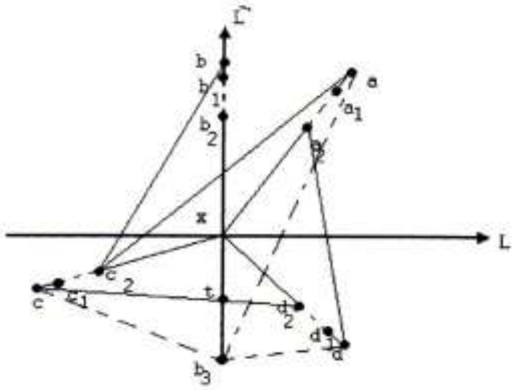
الشكل (6)



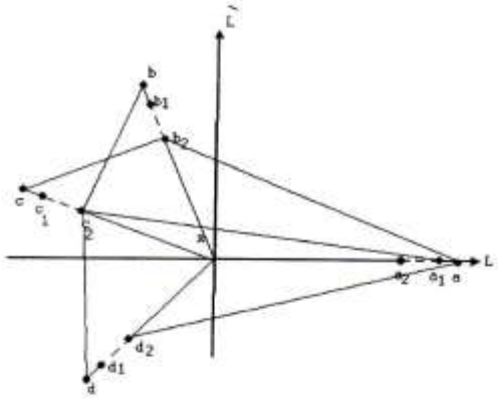
الشكل (7)



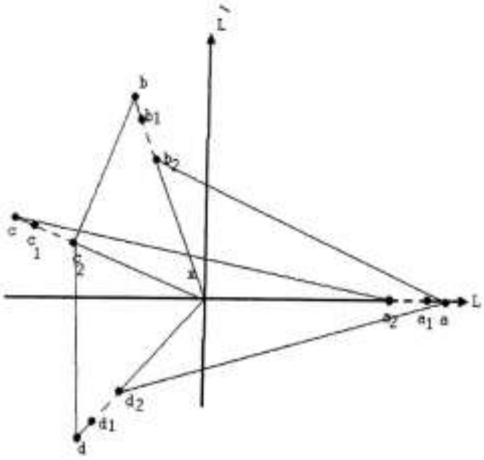
الشكل (8)



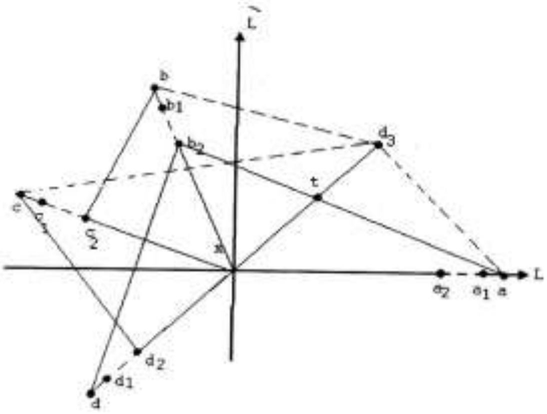
الشكل (9)



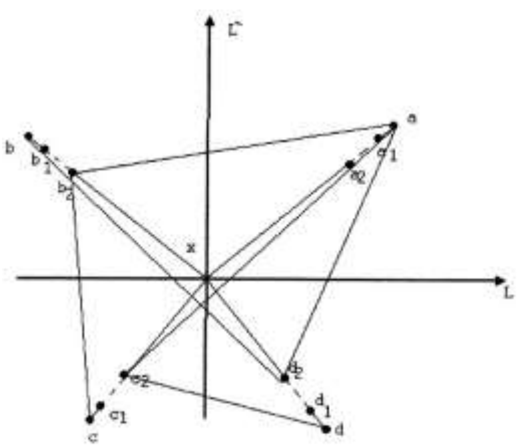
الشكل (10)



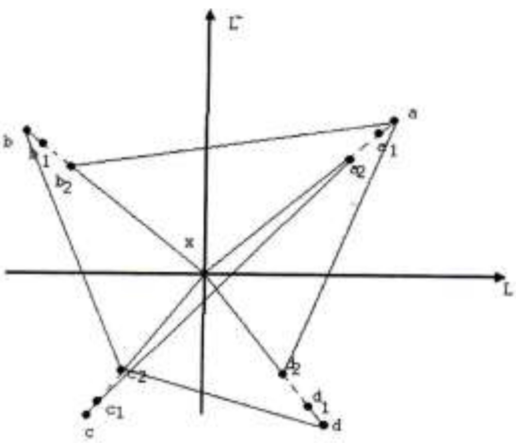
الشكل (11)



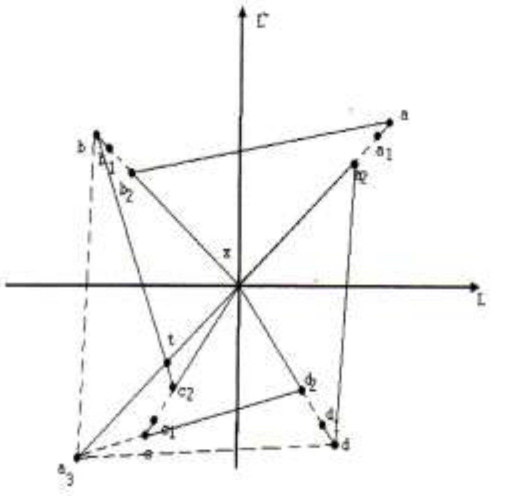
الشكل (12)



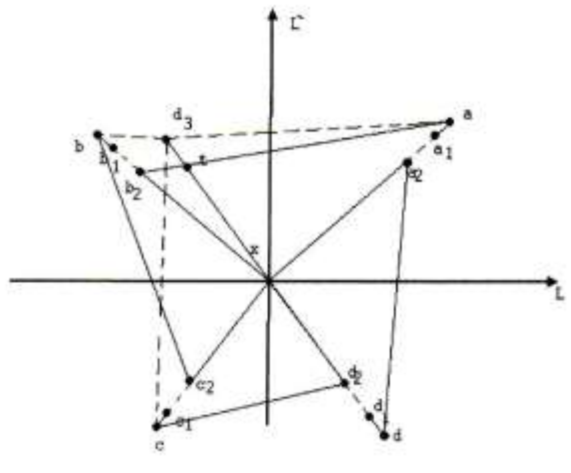
الشكل (13)



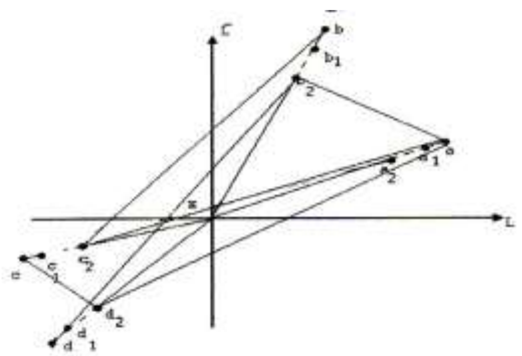
الشكل (14)



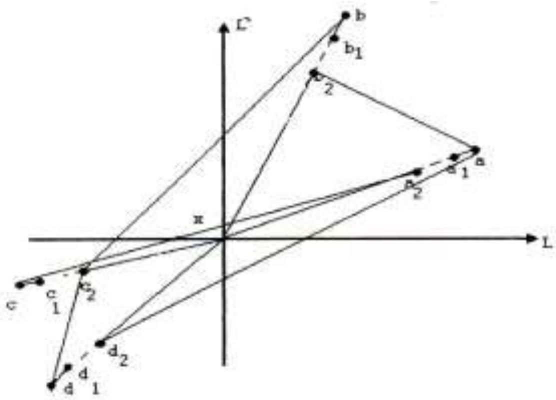
الشكل (15)



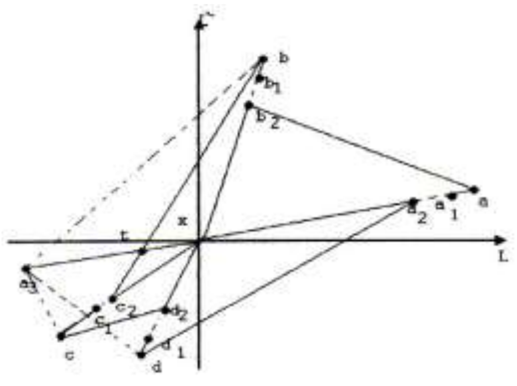
الشكل (16)



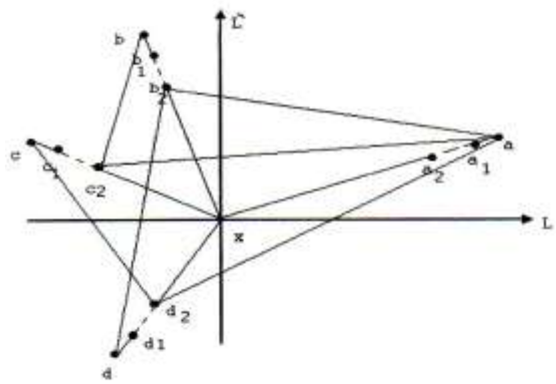
الشكل (17)



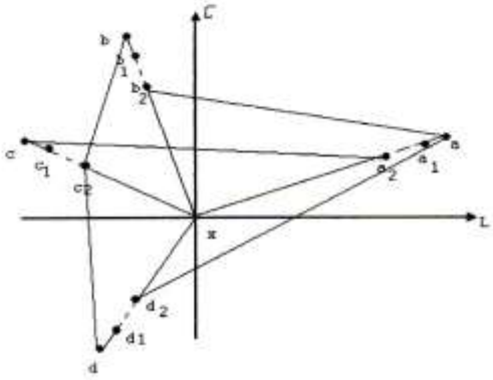
الشكل (18)



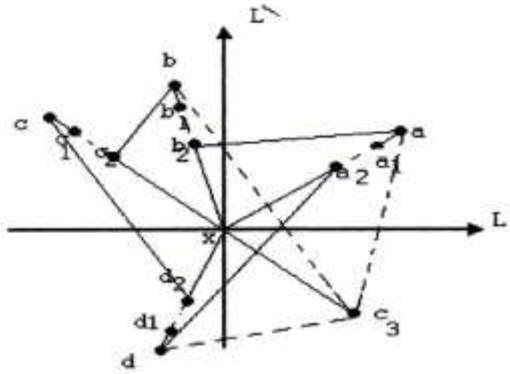
الشكل (19)



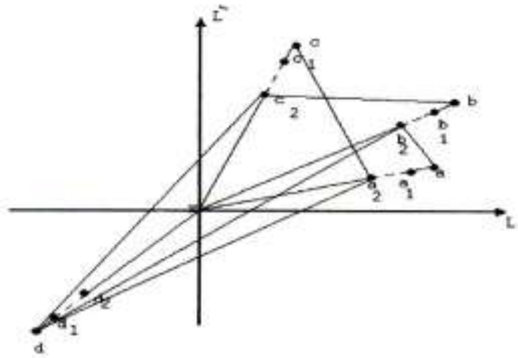
الشكل (20)



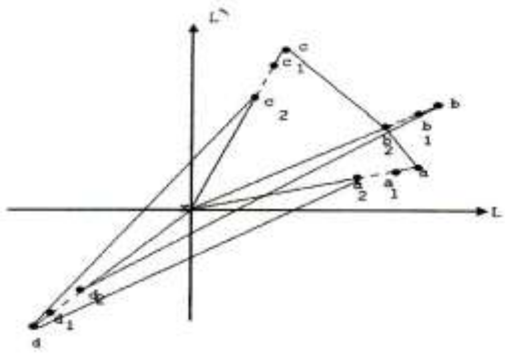
الشكل (21)



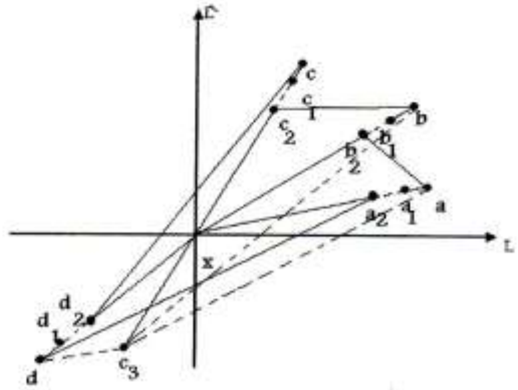
الشكل (22)



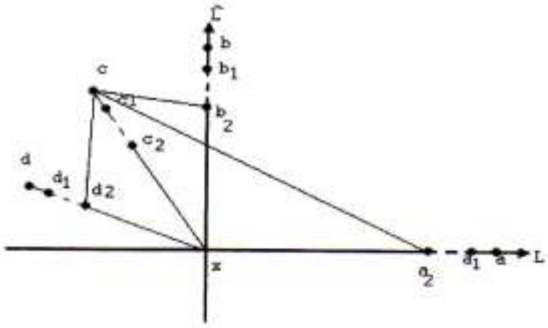
الشكل (23)



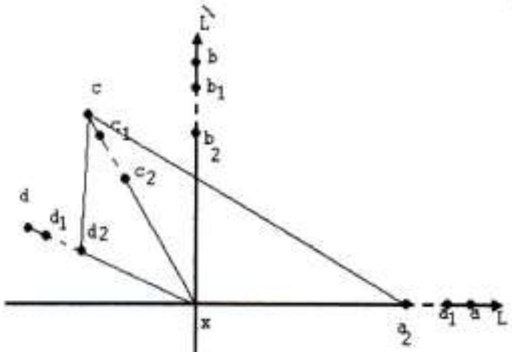
الشكل (24)



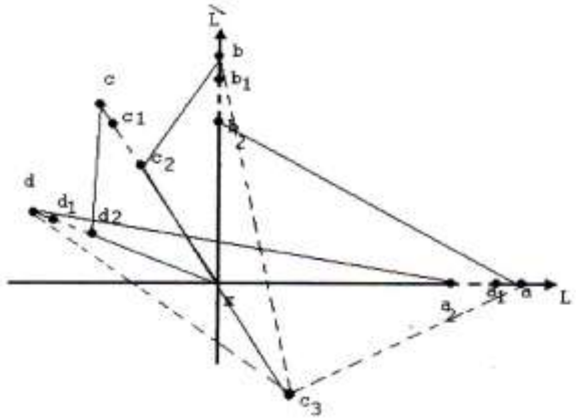
الشكل (25)



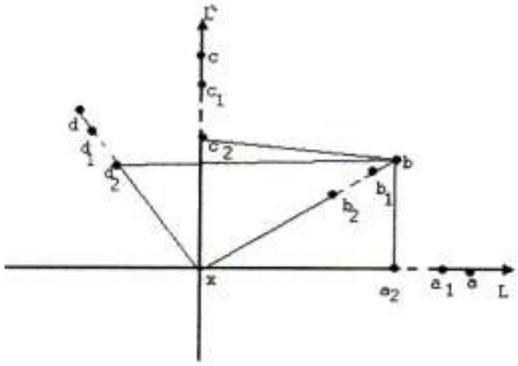
الشكل (26)



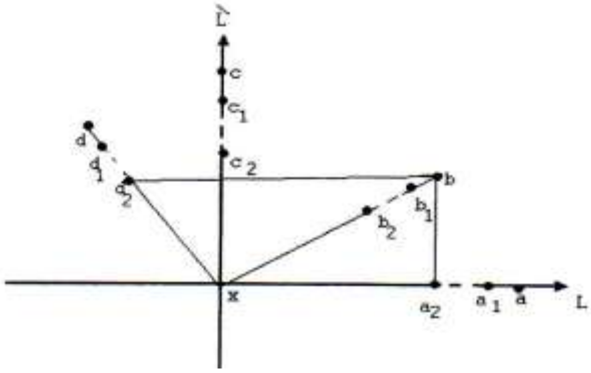
الشكل (27)



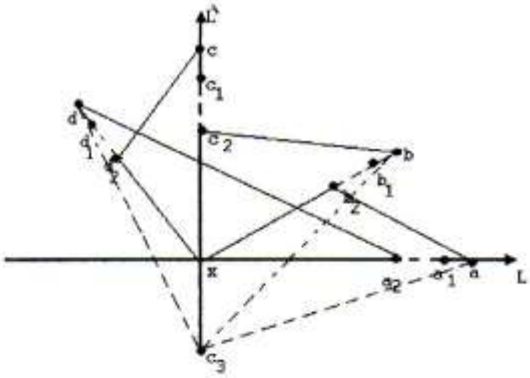
الشكل (28)



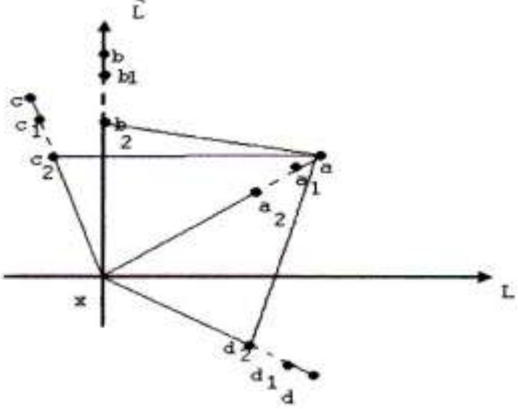
الشكل (29)



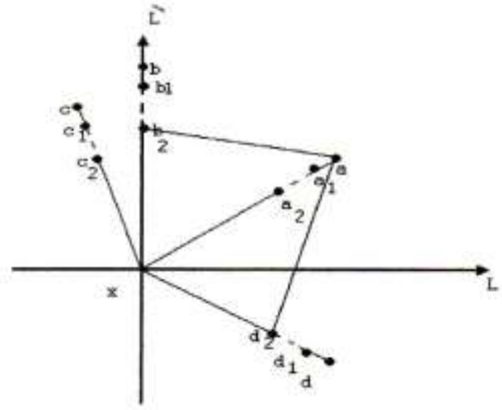
الشكل (30)



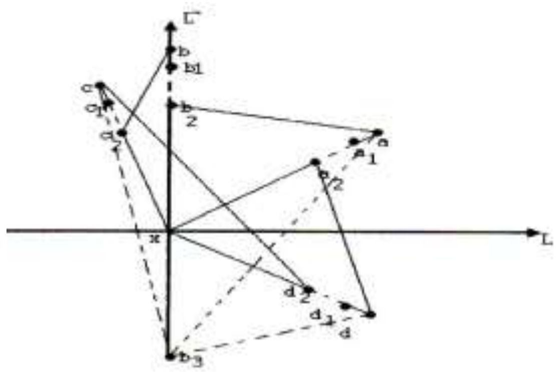
الشكل (31)



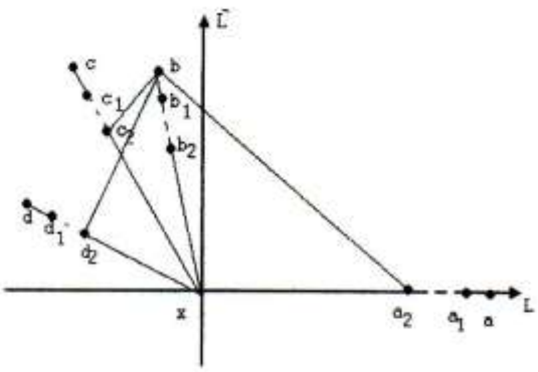
الشكل (32)



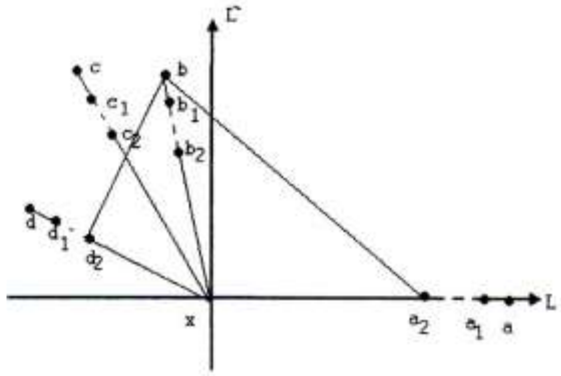
الشكل (33)



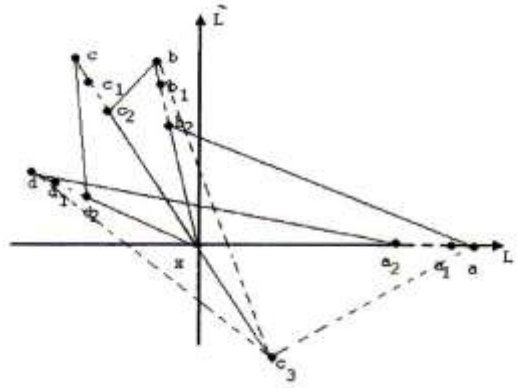
الشكل (34)



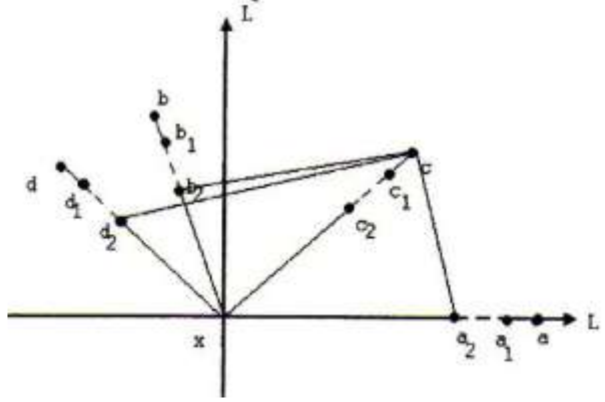
الشكل (35)



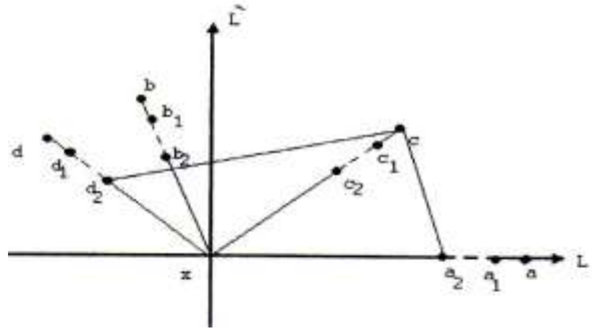
الشكل (36)



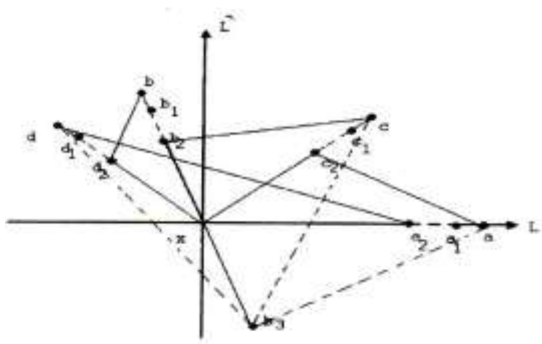
الشكل (37)



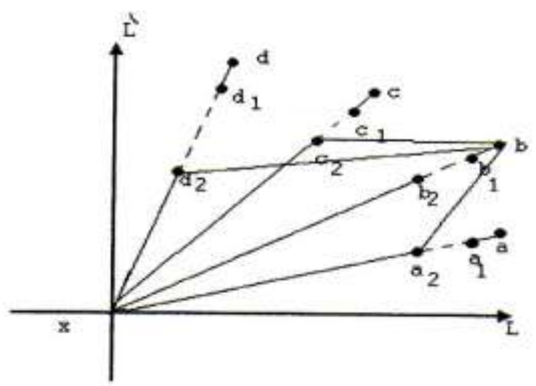
الشكل (38)



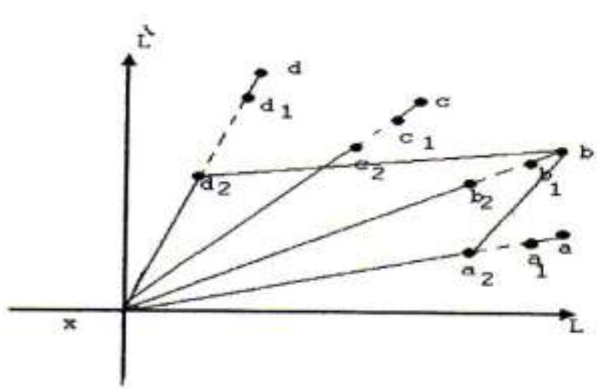
الشكل (39)



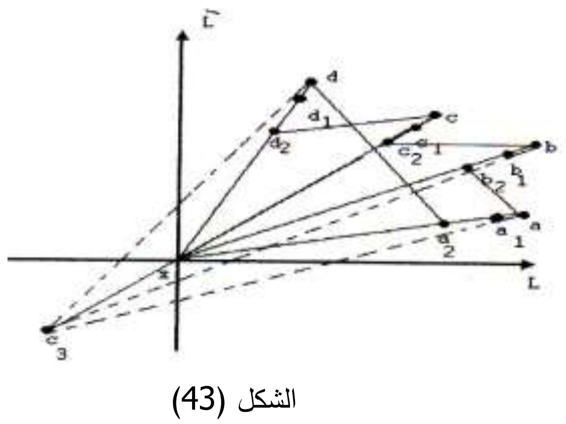
الشكل (40)



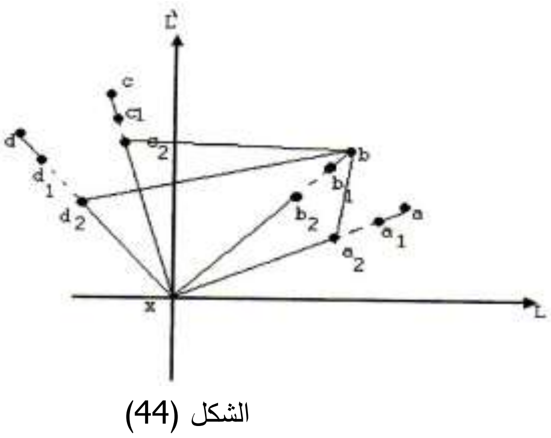
الشكل (41)



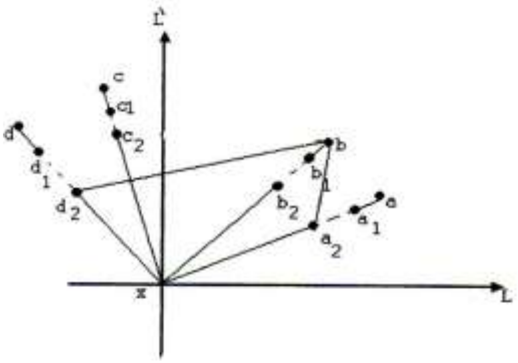
الشكل (42)



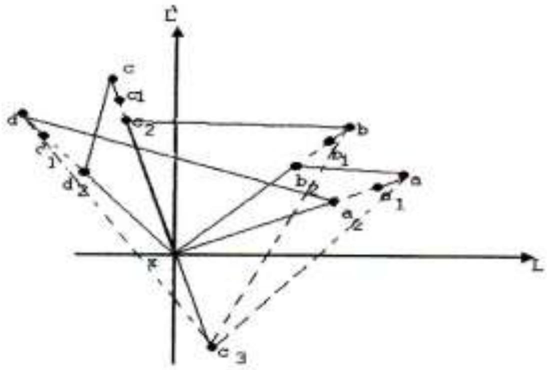
الشكل (43)



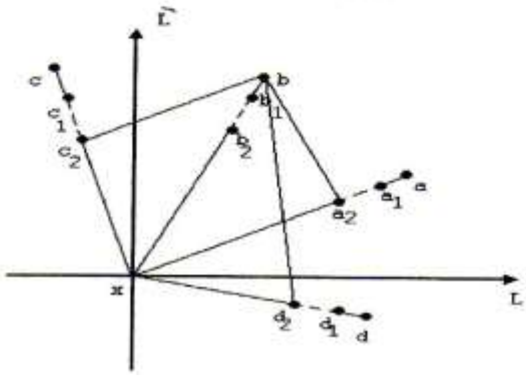
الشكل (44)



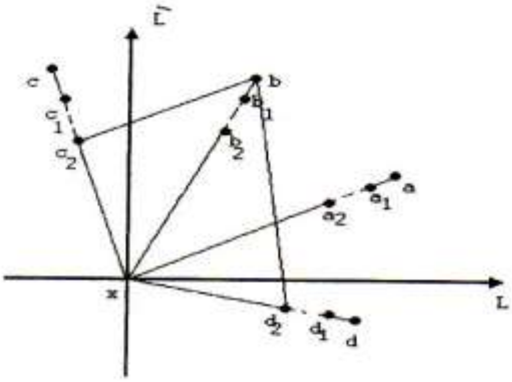
الشكل (45)



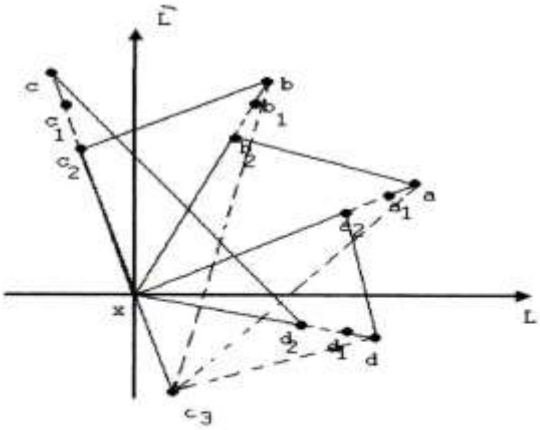
الشكل (46)



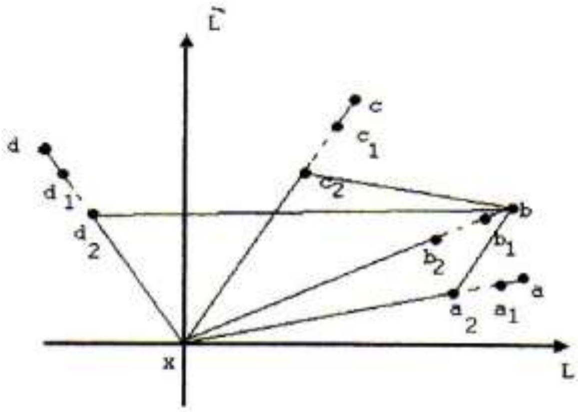
الشكل (47)



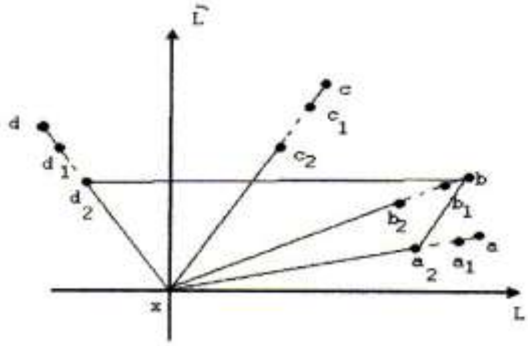
الشكل (48)



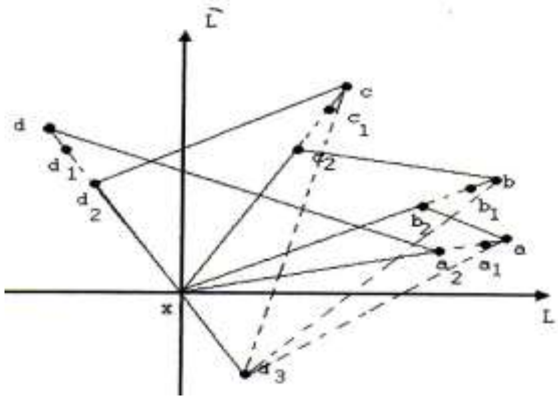
الشكل (49)



الشكل (50)



الشكل (51)



الشكل (52)

المراجع:

1- BOLTYANSKI.V.G,SOLTAN,P.S.1978-,Combinotorial Geometry of Classes of Convex Sets , (in Russian) . Stinica .Kishinev.279P .

2 – Krasnonsel’skii , M.A.1946-On A Criterion of Star Shapedness (in Russian) . Math . sb.19,P.309-310.

3 – LEICHTWEISS,K.1980 – Konvexe Mengen . Springer – Verlag, Berlin, (translate into Russian).

4 – SOLTAN , V.P. 1984 – Introduction to Convexity Theory (in Russian). Stinica.Kishinev.225 P.

5 – ZARIF, A .1990– About Unions of Starshaped Sets in Normed Space. (in Russian).Ezvistia . Akad.Nauk.MSSR N12P. 35-47.

6- BREEN,M.,ZAMFIRESCU,T.1987-A characterization Theorem for Certain Unions of Two Starshaped Sets in R^2,Geom.dedic-22-N1-P.95-103.

7- BREEN,M.1989- Clear Visibility and Unions of Two Starshaped Sets in the Plane ,Pacific . J.Math .,Vol 115 ,P.267-275.

8- BREEN,M.1991-Unions of Three Starshaped Sets in R^2,J.of Geometry , Vol .36,P.8-16.

9- BREEN,M.1987-Characterizing Compact Unions of Two Starshaped Sets in R^3 , pacific.J.of Math., Vol 128,P.63-72.

10- TABALE. A.E., ZARIF,A.1994 –One Theorem a Starshaped Sets (in Russian) .Ezvistia . Akad.Nauk .MSSR N14-P .16-20.

11- ZARIF .A.1991-Union of Starshaped Sets in Metric Space (in Russian) . Ezvistia . Akad.Nauk .NSSR N13-P .20-31.

12- ظريف، عدنان.، احمد، غياث.، حسن، نجود. الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية في R^2 (بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2002/11/20).

13- ظريف، عدنان.، احمد، غياث.، حسن، نجود. المجموعات ثنائية الترابط و اجتماع المجموعات النجمية في R^2 (بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة البعث بتاريخ 2004/2/22).