مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

طريقة المستوي القاطع التفاعلية للبرمجة المتعددة الأهداف بوسائط ضبابية

الدكتور زياد قناية*

(تاريخ الإيداع 7 / 11 / 2012. قُبِل للنشر في 6 / 6 /2013)

ملخّص

تقدم في هذا البحث طريقة حل تفاعلية لمسائل البرمجة الرياضية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في كل من دوال الهدف وفي القيود، وتعالج تلك الوسائط كأعداد ضبابية.

ومن أجل هذه المسائل يقدم مفهوم أمثلية α–بارتو كتوسيع لأمثلية بارتو العادية وذلك بالاعتماد على مجموعات α–مرتبة للأعداد الضبابية.

وتعتمد طريقة الحل المقترحة على المستويات القاطعة التي تبنى على نسب مقايضة موضعية بين دوال الهدف موصوفة من قبل متخذ القرار وذلك عند كل تكرار مولد بالطريقة. وتم تقديم مثال عددي لتوضيح هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: البرمجة المتعددة الأهداف الضبابية، خوارزمية المستوي القاطع، الوسائط الضبابية، الأعداد الضبابية، أمثلية α–بارتو.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

Interactive Cutting-Plane Method for Multiobjective Programming with Fuzzy Parameters

Dr. Ziad A. Kanaya*

(Received 7 / 11 / 2012. Accepted 6 / 6 /2013)

□ ABSTRACT □

This paper presents an interactive solution method for treating multiobjective mathematical programming problems with fuzzy parameters in the objective functions and in the constraints. Theses fuzzy parameters are characterized by fuzzy numbers. For such problems, the concept of α-Pareto optimality introduced by extending the ordinary Pareto optimality based on the α-level sets of fuzzy numbers. The proposed solution method is based on cutting planes, which are based on local tradeoff ratios between the objective functions as prescribed by the decision maker at each iterate generated by the method. An illustrative numerical example is given to clarity this method.

Key Words: Fuzzy multiobjective programming, Cutting-plane algorithm, Fuzzy parameters, Fuzzy numbers, α-Pareto optimality.

*Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تلعب البرمجة الرياضية التي تتضمن دالة هدف وحيدة دوراً فعالاً في اتخاذ القرار الأمثل الذي يسمح إما بتعظيم دالة الهدف أو تخفيضها (تعظيم الأرباح أو الإنتاج وتخفيض التكلفة).

أما الدور الأكثر فعالية لدعم متخذ القرار يتجلى بمسائل البرمجة الرياضية المتعددة الأهداف مع وجود قيود، إذ تكون دوال الهدف متعارضة ومختلفة بشكل يصعب جداً إدماجها في دالة هدف وحيدة، وتحقيق الأمثلية لتلك المسائل يكون من خلال مفهوم أمثلية بارتو.

وقد عمل في هذا المجال عدد من الباحثين نذكر منهم (GEOFFRION; DYER; FEINBERG, 1972)، (DYER, 1973)، (OPPENHEIMER, 1978) وأعطوا عدة اقتراحات لحصول متخذ القرار على المعدلات الحدية لعبارات التفضيل، وقدم في العمل (MUSSELMAN; TALAVAGE, 1980) إجراء يعتمد على قاطع المقايضة، وفي (LOGANATHAN; SHERALI, 1987), (KASSEM, 2007) قدمت خوارزمية المستوي القاطع التفاعلية لتحديد أفضل حل وسطي.

تعد البرمجة المتعددة الأهداف إحدى الطرائق للتعامل مع مسائل القرار المعقدة، وعند صياغة مسألة البرمجة المتعددة الأهداف نجد أن عوامل متنوعة من النظام الحقيقي يجب أن تعكس في وصف دوال الهدف والقيود كوسائط تحدد من قبل الخبراء، ومن الطبيعي الاعتراف بأن القيم المحتملة لتلك الوسائط قد تتصف ببعض الغموض وعدم التحديد من قبل الخبراء وذلك في أغلب الأحيان، وفي هذه الحالة قد يكون الأكثر ملائمة للخبراء ترجمة تلك الوسائط كبيانات ضبابية يمكن تمثيلها بالأعداد الضبابية.

هناك العديد من الأبحاث التي تعالج مسائل البرمجة المتعددة الأهداف بوسائط ضبابية، فقد قدم (SAKAWA; YANO, 1989) مفهوم α–البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف، ومفهوم أمثلية α–بارتو. وتم في (OSMAN; EL-BANNA, 1993) دراسة التحليل النوعي لمجموعة الاستقرار من النوع الأول. وفي (KASSEM, 1995) تم تقديم الاستقرار التفاعلي لمسائل البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في القيود. وقدم (KANAYA, [5,6,7]) طرائق تفاعلية لحل مسائل البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف بالإضافة إلى دراسة مجموعة الاستقرار من النوع الأول. وحديثاً، قدم (KANAYA, 2011) طريقة تفاعلية لدعم متخذ القرار في مسائل البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف وتستخدم تلك الطريقة الأوزان الوسطية المقايضة.

ندرس في هذا البحث مسألة البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف وفي القيود، ويمكن كتابة تلك المسألة وفق الصياغة التالية:

$$
\textbf{(FMOP)}\quad \begin{cases} \max\ f_1(x,\tilde{a}_1), \\ \max\ f_2(x,\tilde{a}_2), \\ \ \vdots \\ \max\ f_k(x,\tilde{a}_k), \\ \textit{subject to } x\in X(\tilde{b})=\{x\in R^n \mid g_j(x,\tilde{b}_j)\le 0,\ j=1,2,\dots,m\}, \end{cases}
$$

حيث:

$X(\tilde{b})$ مجموعة غير خالية ومتراصة،

$\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, ..., \tilde{a}_{iq_i})$ يمثل شعاع من الوسطاء الضبابية ضمن دالة الهدف $f_i(x, \tilde{a}_i)$ ،

$\tilde{b}_j = (\tilde{b}_{j1}, \tilde{b}_{j2}, ..., \tilde{b}_{jr_j})$ يمثل شعاع من الوسطاء الضبابية ضمن القيد $g_j(x, \tilde{b}_j)$.

وتعالج الوسطاء الضبابية في تلك المسألة كالأعداد الضبابية المقدمة في البحثين [1,2]، حيث أن العدد الضبابي $\tilde{p}$ هو مجموعة جزئية ضبابية محدبة من الخط الحقيقي R، ودالة الانتماء $\mu_{\tilde{p}}(p)$ معرفة كما يلي:

1) دالة مستمرة من R على المجال المغلق $[0 , 1]$.

2) $\mu_{\tilde{p}}(p) = 0$ من أجل $p \in (-\infty, p_1]$.

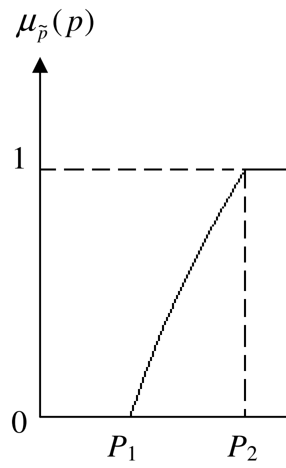
3) دالة متزايدة تماماً على المجال (p_1 , p_2) .

4) $\mu_{\tilde{p}}(p) = 1$ من أجل $p \in (p_2 , p_3]$.

5) دالة متناقصة تماماً على المجال (p_3 , p_4) .

6) $\mu_{\tilde{p}}(p) = 0$ من أجل $p \in [p_4 , +\infty)$.

ويوضح الشكل (1) الرسم البياني المحتمل لدالة الانتماء لعدد ضبابي $\tilde{p}$.



ضبابي $\tilde{p}$.

ولتبسيط الرموز يمكننا تعريف الأشعة التالية:

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{iq_i}) , \ b_j = (b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jr_j})$$
$$a = (a_1 , a_2 , ... , a_k) , \quad b = (b_1 , b_2 , ... , b_m)$$
$$\tilde{a} = (\tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 , ... , \tilde{a}_k) , \quad \tilde{b} = (\tilde{b}_1 , \tilde{b}_2 , ... , \tilde{b}_m)$$

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تقديم طريقة تفاعلية لمعالجة مسائل البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف وفي القيود، بحيث تتم المعالجة سواء كانت المسألة المدروسة خطية أو غير خطية وذلك ضمن منطقة قرار ضبابية، والطريقة المقترحة هي تعميم وتطوير للطريقة المقدمة في [7]. التي تعالج مسألة البرمجة غير الخطية

المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف فقط ومنطقة القرار محددة بشكل واضح. ويتم التركيز في هذا البحث على النقاط التالية:

- دراسة المسألة **FMOP** (**F**uzzy **M**ulti–**O**bjective **P**rogramming) وفق مفهوم أمثلية α–بارتو.
- تقديم طريقة تفاعلية لحل المسألة **FMOP** بالاعتماد على المستويات القاطعة انطلاقاً من نسب المقايضة الموضعية.
- إثبات أن الحل الناتج عن الطريقة المقترحة هو حل α–بارتو الأمثل.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على صياغة المسألة α–البرمجة المتعددة الأهداف التي تتوافق مع المسألة **FMOP** وذلك بالاستفادة من مفهوم α–مرتبة، ويكون على متخذ القرار تحديد قيمة α ثم نسب المقايضة الموضعية، ويبدأ البحث عن حل α–بارتو الأمثل الملائم لمتخذ القرار بالاعتماد على المستويات القاطعة.

تعريف المجموعة α– مرتبة:

إن مجموعة α– مرتبة للأعداد الضبابية $\tilde{a}_i\ \tilde{b}_j$ ، حيث $j=1,\ldots,m$; $i=1,2,\ldots,k$، هي المجموعة $L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b})$ المعرفة كما يلي:

$$L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b}) = \{(a,b) \mid \mu_{\tilde{a}_i}(a_i) \ge \alpha, \quad i=1,2,\ldots,k\ ;$$
$$\mu_{\tilde{b}_j}(b_j) \ge \alpha, \quad j=1,2,\ldots,m\}$$

صياغة المسألة α–MOP :

من أجل درجة معينة α ، يمكننا التعامل مع المسألة **FMOP** على أنها مسألة α–البرمجة المتعددة الأهداف والتي يمكن كتابتها وفق الصياغة التالية:

$$(\alpha\text{–MOP1}) \qquad \begin{cases} \max\ f_1(x,a_1), \\ \max\ f_2(x,a_2), \\ \quad\vdots \\ \max\ f_k(x,a_k), \\ \textit{subject to} \\ \qquad x \in X(b) = \{x \in R^n \mid g_j(x,b_j) \le 0,\ j=1,2,\ldots,m\}, \\ \qquad (a,b) \in L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b}). \end{cases}$$

ويمكن إعادة كتابة المسألة **α–MOP1** وفق الصياغة المكافئة التالية:

(α–MOP)
$$\begin{cases} \max \ f_1(x,a_1), \\ \max \ f_2(x,a_2), \\ \ \vdots \\ \max \ f_k(x,a_k), \\ \textit{subject to} \\ \qquad x\in X(b)=\{x\in R^n \mid g_j(x,b_j)\le 0,\ j=1,2,...,m\}, \\ \qquad A_i \le a_i \le A_i',\ \ i=1,2,...,k, \\ \qquad B_j \le b_j \le B_j',\ \ j=1,2,...,m, \end{cases}$$

حيث A_i و A_i' الحدين الأدنى و الأعلى على الترتيب للعدد a_i،
B_j و B_j' الحدين الأدنى و الأعلى على الترتيب للعدد b_j.

تعريف حل α- بارتو الأمثل:

نقول عن النقطة $(x^*,a^*,b^*)\in X(b)\times L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b})$ أنها حل α- بارتو الأمثل للمسألة **α–MOP**، عندما لا يوجد حل أخر (x,a,b) بحيث يكون

- $f_i(x,a_i)\ge f_i(x^*,a_i^*)$ for all $i\in\{1,2,\dots,k\}$
- $f_i(x,a_i)> f_i(x^*,a_i^*)$ for some $i\in\{1,2,\dots,k\}$

النتائج والمناقشة:

نفرض أن دالة المنفعة لمتخذ القرار $U\,(f_1(x,a_1),f_2(x,a_2),...,f_k(x,a_k))\to R$ هي دالة مقعرة وقابلة للتفاضل وتفاضلها دالة مستمرة.

يجب على متخذ القرار أن يخمن نسب المقايضة الموضعية، وتكون تلك النسب عند النقطة $(x^{(q)},a^{(q)},b^{(q)})\in X(b)\times L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b})$ كما يلي:

$$T_i^{(q)}=\left.\frac{\partial U(z)/\partial z_i}{\partial U(z)/\partial z_1}\right|_{z=z^{(q)}} \qquad ;\ z=z^{(q)}\equiv[f_1(x^{(q)},a_1^{(q)}),...,f_k(x^{(q)},a_k^{(q)})],\ i=1,2,...,k$$

ومن أجل z التي تحقق $U(z)>U(z^{(q)})$ يكون لدينا العلاقة الآتية:

$$\nabla U(z^{(q)}).(z-z^{(q)})>0$$

والطريقة المقدمة في [12] تولد القيد التالي:

$$\nabla U(z^{(q)}).(z-z^{(q)})\ge 0$$

الذي يساهم في تحسين الحل. وباستخدام نسب المقايضة الموضعية عند النقطة $(x^{(q)},a^{(q)},b^{(q)})$ يتولد قاطع المقايضة التالي:

$$\sum_{i=1}^{k} T_i^{(q)}(z_i-z_i^{(q)})\ge 0$$

حيث $z_i\equiv f_i(x,a_i)$ وذلك من أجل $i=1,2,...,k$.

وهنا نقترح تعيين وبشكل تفاعلي الحل الجديد للمسألة **α–MOP** عن طريق حل المسألة التالية:

$$(\alpha\text{–P})\qquad \begin{cases} \max \ \ y \\ \text{subject to } \ y \le \sum_{i=1}^{k} T_i^{(h)}(z_i - z_i^{(h)}) \ , \ \ h = 1, 2, ..., q \\ \qquad (x, a, b) \in X(b) \times L_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b}). \end{cases}$$

مبرهنة:

لتكن النقطة $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{y})$ حل للمسألة **α–P** ، ولتكن $\bar{z} \equiv (f_1(\bar{x}, \bar{a}_1), ..., f_k(\bar{x}, \bar{a}_k))$. عندئذ النقطة $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$ هي حل α–بارتو الأمثل للمسألة **α–MOP**.

البرهان:

لنفرض جدلاً أنّ $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$ ليست α–بارتو حلاً للمسألة **α–MOP**، عندئذ توجد $(x^*, a^*, b^*) \in X(b) \times L_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b})$ بحيث يتحقق الشرط التالي:

$$z^* \ge \bar{z} \ , \ \ z^* \ne \bar{z}$$

حيث $z^* \equiv (f_1(x^*, a_1^*), ..., f_k(x^*, a_k^*))$ ، وبفرض $T = (T_1, T_2, ..., T_k)$ عندئذ لدينا:

$$\bar{y} = \min_{h=1,2,...,q} \{T^{(h)}(\bar{z} - z^{(h)})\}$$

وذلك لكون $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{y})$ حل للمسألة **α–P**. وبما أن $T^{(h)} > 0$ من أجل $h = 1, 2, ..., q$ ، فإنّ:

$$T^{(h)}(\bar{z} - z^{(h)}) < T^{(h)}(z^* - z^{(h)}) \qquad \text{for} \quad h = 1, 2, ..., q$$

عندئذ نجد أن:

$$\bar{y} = \min_{h=1,2,...,q} \{(T^{(h)}(\bar{z} - z^{(h)})\} < \min_{h=1,2,...,q} \{(T^{(h)}(z^* - z^{(h)})\},$$

وهذا تناقض مع كون $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{y})$ حل للمسألة **α–P**، وبذلك تكون النقطة $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$ حل α–بارتو الأمثل للمسألة **α–MOP**.

الطريقة المقترحة لحل المسألة FMOP:

الخطوة 1: يطلب من متخذ القرار تحديد قيمة α حيث $0 \le \alpha \le 1$.

الخطوة 2: نحدد معامل الدقة الأصغر ε .

الخطوة 3: $q \leftarrow 1$ ، وهي القيمة الأولية للعداد q .

الخطوة 4: نكتب المسألة **FMOP** وفق الصياغة **α–MOP**.

الخطوة 5: نختار نقطة ابتدائية $(x^{(q)}, a^{(q)}, b^{(q)})$ تنتمي لمنطقة قيود المسألة **α–MOP**.

الخطوة 6: يطلب من متخذ القرار تحديد نسب المقايضة الموضعية $T_i^{(q)}$، حيث $i = 1, 2, ..., k$ ، وذلك عند النقطة $(x^{(q)}, a^{(q)}, b^{(q)})$.

الخطوة 7: نحل المسألة **α–P**، وليكن $(x^{(q+1)}, a^{(q+1)}, b^{(q+1)}, y^{(q+1)})$ الحل الأمثل لتلك المسألة.

الخطوة 8: $q \leftarrow q + 1$.

الخطوة 9: إذا كان $y^{(q)} \le \varepsilon$ اذهب إلى **الخطوة 10**. وخلاف ذلك اذهب إلى **الخطوة 6**.

الخطوة 10: توقف عند الحل $(x^{(q)}, a^{(q)}, b^{(q)})$ كحل α– بارتو الأمثل للمسألة **α–MOP**.

ونوضح الطريقة المقترحة بالمثال الآتي:

مثال:

لندرس مسألة البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف وفي القيود التالية:

$$\text{(FMOP)}\quad \begin{aligned} &\max\ f_1(x,\tilde{a}_1) = x_1 + \tilde{a}_1 \\ &\max\ f_2(x,\tilde{a}_2) = x_2 + \tilde{a}_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad \tilde{b}_{11}x_1^2 + \tilde{b}_{12}x_2^2 \le 25 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

بحيث تكون دالة الانتماء للأعداد الضبابية $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{12}$ كالآتي:

$$\mu_{\tilde{p}}(p) = \begin{cases} 0 & -\infty < p \le p_1 \\ \dfrac{p - p_1}{p_2 - p_1} & p_1 < p < p_2 \\ 1 & p_2 \le p \le p_3 \\ \dfrac{p - p_4}{p_3 - p_4} & p_3 < p \le p_4 \\ 0 & p_4 \le p < \infty \end{cases}$$

وذلك وفق القيم المعطاة بالجدول التالي:

$\tilde{p}$	p_1	p_2	p_3	p_4
$\tilde{a}_1$	1	2	3	4
$\tilde{a}_2$	2	4	5	7
$\tilde{b}_{11}$	0.8	1	1	1.2
$\tilde{b}_{12}$	0.7	1	1	1.3

وبفرض أن تابع المنفعة لمتخذ القرار كالآتي:

$$U = -[f_1(x,a_1)]^2 - [f_2(x,a_2)]^2$$

الحل:

الخطوة 1: افترض أن متخذ القرار اختار $\alpha = 0.3$.

الخطوة 2: $\varepsilon = 0.000005$.

الخطوة 3: نأخذ قيمة أولية للعداد q، أي أن $q = 1$.

الخطوة 4: المسألة **FMOP** وفق الصياغة **α–MOP** ، تصبح كما يلي:

$$(\alpha\text{–}\mathbf{MOP})\quad \begin{aligned} &\max\ f_1(x,a_1)=x_1+a_1\\ &\max\ f_2(x,a_2)=x_2+a_2\\ &\text{subject to}\\ &\quad b_{11}x_1^2+b_{12}x_2^2\le 25\\ &\quad x_1\ge 0\\ &\quad x_2\ge 0\\ &\quad 1.3\le a_1\le 3.7\\ &\quad 2.6\le a_2\le 6.4\\ &\quad 0.86\le b_{11}\le 1.14\\ &\quad 0.79\le b_{12}\le 1.21 \end{aligned}$$

الخطوة 5: نختار النقطة الابتدائية $(x^{(1)},a^{(1)},b^{(1)})=(0\,,5\,,3.7\,,6.4\,,1\,,1)$.

الخطوة 6: إن نسب المقايضة الموضعية عند النقطة $(x^{(1)},a^{(1)},b^{(1)})$ هي:

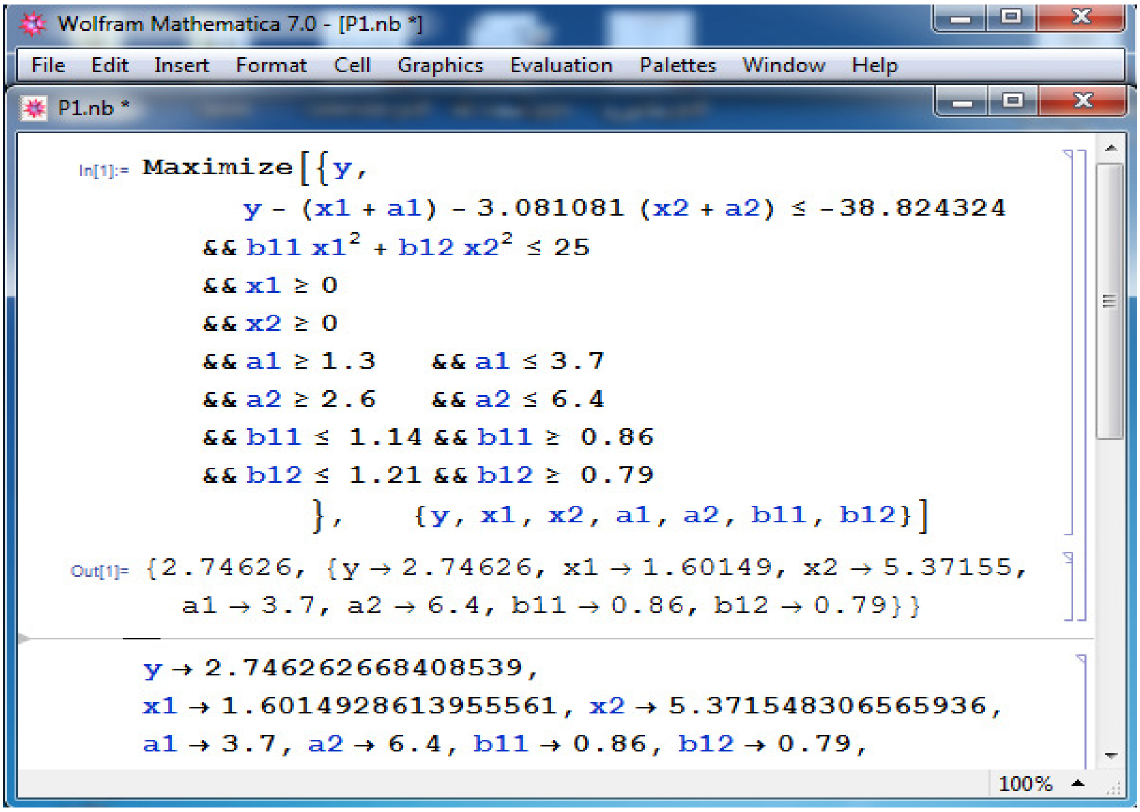
$$T_1^{(1)}=1\quad,\quad T_2^{(1)}=3.081081$$

الخطوة 7: المسألة **α–P** تصبح كما يلي:

$$(\mathbf{P}^{(1)})\quad \begin{aligned} &\max\quad y\\ &\text{subject to}\\ &\quad y\le -38.824324+(x_1+a_1)+3.081081(x_2+a_2)\\ &\quad b_{11}x_1^2+b_{12}x_2^2\le 25\\ &\quad x_1\ge 0\\ &\quad x_2\ge 0\\ &\quad 1.3\le a_1\le 3.7\\ &\quad 2.6\le a_2\le 6.4\\ &\quad 0.86\le b_{11}\le 1.14\\ &\quad 0.79\le b_{12}\le 1.21 \end{aligned}$$

وباستخدام برنامج Mathematica 7.0 نجد الحل الأمثل للمسألة $\mathbf{P}^{(1)}$:

$$y^{(2)}=2.746263$$
$$(x^{(2)},a^{(2)},b^{(2)})=(1.601493\,,5.371548\,,3.7\,,6.4\,,0.86,0.79)$$



الشكل (2): حل المسألة $\mathbf{P}^{(1)}$

الخطوة 8: بزيادة العداد بمقدار 1 تصبح $q = 2$.

الخطوة 9: بما أن $y^{(2)} = 2.74626 > \varepsilon$ لذلك يتم العودة إلى **الخطوة 6**.

ونتيجة التكرار الثاني لتنفيذ التعليمات من **الخطوة 6** إلى **الخطوة 9** نجد الآتي:

- نسب المقايضة الموضوعية عند النقطة $(x^{(2)}, a^{(2)}, b^{(2)})$ هي:

$$T_1^{(2)} = 1 \quad , \quad T_2^{(2)} = 2.220421$$

- المسألة **P–α** تصبح كما يلي:

$$(\mathbf{P}^{(2)}) \qquad \begin{aligned} &\max \quad y \\ &\text{subject to} \\ &\qquad y \le -38.824324 + (x_1 + a_1) + 3.081081(x_2 + a_2) \\ &\qquad y \le -31.439289 + (x_1 + a_1) + 2.220421(x_2 + a_2) \\ &\qquad b_{11}x_1^2 + b_{12}x_2^2 \le 25 \\ &\qquad x_1 \ge 0 \\ &\qquad x_2 \ge 0 \\ &\qquad 1.3 \le a_1 \le 3.7 \\ &\qquad 2.6 \le a_2 \le 6.4 \\ &\qquad 0.86 \le b_{11} \le 1.14 \\ &\qquad 0.79 \le b_{12} \le 1.21 \end{aligned}$$

- الحل الأمثل للمسألة $\mathbf{P}^{(2)}$:

$$y^{(3)} = 0.076219$$
$$(x^{(3)}, a^{(3)}, b^{(3)}) = (2.136727,\ 5.164825, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

بما أن $y^{(3)} = 0.076219 > \varepsilon$ لذلك يتم العودة إلى **الخطوة 6** ، وتكون نتائج تنفيذ التعليمات من **الخطوة 6** إلى **الخطوة 9** كما يلي:

- **التكرار الثالث:**

$$T_1^{(3)} = 1 \quad , \quad T_2^{(3)} = 1.981389$$
$$y^{(4)} = 0.011474,\ (x^{(4)}, a^{(4)}, b^{(4)}) = (2.34779,\ 5.064092, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

- **التكرار الرابع:**

$$T_1^{(4)} = 1 \quad , \quad T_2^{(4)} = 1.895584$$
$$y^{(5)} = 0.001854,\ (x^{(5)}, a^{(5)}, b^{(5)}) = (2.432808,\ 5.020218, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

- **التكرار الخامس:**

$$T_1^{(5)} = 1 \quad , \quad T_2^{(5)} = 1.862152$$
$$y^{(6)} = 0.00031,\ (x^{(6)}, a^{(6)}, b^{(6)}) = (2.4674,\ 5.0018, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

- **التكرار السادس:**

$$T_1^{(6)} = 1 \quad , \quad T_2^{(6)} = 1.848721$$
$$y^{(7)} = 0.000064,\ (x^{(7)}, a^{(7)}, b^{(7)}) = (2.481541,\ 4.994184, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

- **التكرار السابع:**

$$T_1^{(7)} = 1 \quad , \quad T_2^{(7)} = 1.843259$$
$$y^{(8)} = 0.000003,\ (x^{(8)}, a^{(8)}, b^{(8)}) = (2.487319,\ 4.991054, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

نلاحظ أن $y^{(8)} = 0.000003 < \varepsilon$ ، لذلك ننتقل إلى **الخطوة 10.**

الخطوة 10: حل α− بارتو الأمثل للمسألة **α–MOP** الذي نتوقف عنده هو:

$$(x^{(8)}, a^{(8)}, b^{(8)}) = (2.487319,\ 4.991054, 3.7, 6.4, 0.86, 0.79)$$

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث طريقة حل تفاعلية لمسائل البرمجة الرياضية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في كل من دوال الهدف وفي القيود. واعتمدت تلك الطريقة على المستويات القاطعة التي تبنى على نسب مقايضة موضعية بين دوال الهدف موصوفة من قبل متخذ القرار وذلك عند كل تكرار مولد بالطريقة.

وتم إثبات أن الحل الناتج عن الطريقة المقدمة هو حل α−بارتو الأمثل، كما تم أيضاً توضيح تلك الطريقة من خلال مثال عددي.

ويمكن استخدام الطريقة المقدمة لحل المسائل الواقعية الممثلة بنموذج البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في دوال الهدف والقيود، ويعود سبب وجود تلك الوسائط لصياغة النموذج الرياضي بدقة عالية ويكون أكثر واقعية ويعتمد ذلك على خبرة وتجربة المختص بهذا المجال لترجمة الوسائط التي تتصف بعدم التحديد كبيانات ضبابية.

المراجع:

[1] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Operations on fuzzy numbers*. International Journal of Systems Science, 9, 1978, 613-626.

[2] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and application*. Academic Press, New York, 1980, 393.

[3] DYER, J. S. *A time sharing computer program for the solution of the multiple criteria problem*. Management Science, 19, 1973, 1379-1383.

[4] GEOFFRION, A. M.; DYER, J. S.; FEINBERG, A. *An interactive approach for multi-criterion optimization with an application to the operation of an academic department*. Management Science, 19, 1972, 357-368.

[5] KANAYA, Z. A. *Interactive stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Advances in Fuzzy Sets and Systems, 4, 2009, 293-299.

[6] KANAYA, Z. A. *Interactive stability cutting-plane algorithm for fuzzy multiobjective nonlinear programming problems*. Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences (Mathematics Series), 23, 2010, 47-52.

[7] KANAYA, Z. A. *An interactive method for fuzzy multiobjective nonlinear programming problems*. Journal of King Abdulaziz University: Science, 22, 2010, 103-112.

[8] KANAYA Z. A. *Interactive decision making for fuzzy multiobjective optimization problem*. Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Sciences Series, 33, (*to appear* 2011).

[9] KASSEM, M. *Interactive stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters in the constraints*. Fuzzy sets and systems, 73, 1995, 235-243.

[10] KASSEM, M. *Interactive stability cutting-plane algorithm for multiobjective nonlinear programming problems*. Applied Mathematics and Computation, 192, 2007, 446-456.

[11] LOGANATHAN, G. V.; SHERALI, H. D. *A convergent interactive cutting-plane algorithm for multiobjective optimization*. Operations Research, 35, 1987, 365-377.

[12] MUSSELMAN, K.; TALAVAGE, J. *A tradeoff cut approach to multiple objective optimization*. Operations Research, 28, 1980, 1424-1435.

[13] OPPENHEIMER, K. R. *A proxy approach to multi-attribute decision making*. Management Science, 24, 1978, 675-689.

[14] OSMAN, M.; EL-BANNA A. *Stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Mathematics and Computers in Simulation, 35, 1993, 321-326

[15] SAKAWA, M.; YANO, H. *Interactive decision making for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Fuzzy sets and systems, 29, 1989, 315-326.