مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

تحديد مجموعات قيم بعض الداليات في فضاءات الدوال الممثلة بالتكامل

الدكتور حسن بدور*
أحمد ديب **

(تاريخ الإيداع 7 / 4 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/5/12)

□ الملخّص □

يقدم هذا البحث طريقة معينة لتحديد مستقرات بعض الداليات العقدية المختارة في فضاء كاراتيودوري وهو فضاء التوابع التحليلية في قرص الواحدة الذي يحقق الشرط $h(0)=1, Re\,h(z)>0$ وأيضاً في فضاء الدوال النجمية المرتبط معه. باستخدام التمثيل التكاملي للدوال تم تحديد منطقة تحول بعض الداليات في كل من هذين الفضائين من الشكل $J(f)= F[f(z_0), f'(z_0)]$.

الكلمات المفتاحيه: الغلاف المحدب - المسائل القصوى - التوابع انجمية

*أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
**طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

The Range of Variability of some Functional in the Classes of Functions possessing Structural Representation

Dr. Hassan Baddour*
Ahmad Dib**

(Received 12 / 4 / 2008. Accepted 12/5/2008)

□ ABSTRACT □

This paper presents a certain method of determining the range of variability of some linear functional defined by the Caratheodory Class (i.e. the class of analytic functions in the unit disk ($|z| < 1$) with a real positive part f(0)=1) and by the Class of Starlike Functions related to it. Using the integral representation of functions in these classes, some estimations for the functional of the type $J(f) = F[f(z_0), f'(z_0)]$ have been obtained.

Keywords: Convex Hull , Extremal Problems, Starelike Functions.

مقدمة:

* **Professor, Department of Mathematics, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**
** **Postgraduate Student, Department of Mathematics, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

إحدى المواضيع التي تهتم بها نظرية الدوال التحليلية المتباينة ، هي الخواص الداخلية للتحويلات المحافظة للمناطق المستوية . وأحد الفروع الرئيسة المعاصرة لهذه النظرية هي دراسة المسائل القصوى في مختلف أسر الدوال التحليلية . من أمثلة هذه الدراسات يمكن أن تكون مسألة تحديد مستقر الدالي(أي مجموعة القيم التي يقبلهاهذا الدالي) الذي شكله العام

$$J\left(f\right)= F\ [\ f\left(z_0\right),\overline{f}\left(z_0\right), f\ '\left(z_0\right),\overline{f'}\left(z_0\right),...]\qquad (1)$$

والمعرف في أسرة معينة من الدوال التحليلية و المتباينة في قرص الواحدة $D\left(|z|<1\right)$ حيث z_0 نقطة من هذا القرص.

هناك سلسلة متكاملة من الطرائق التي تعالج المسائل القصوى في أسر الدوال العقدية مثل [1] و [5] . إحدى هذه الطرق هي طريقة التمثيل التكاملي وهي تعتمد على الاستفادة من قابلية الدوال (في بعض الفضاءات العقدية) التمثيل بواسطة تكامل ريمان- ستلجس الأمر الذي يجعل معالجة المسائل القصوى أكثر سهولة في هذه الفضاءات وخصوصاً في الحالة الخطية للداليات.

يهدف هذا البحث إلى دراسة الداليات من الشكل (1) في بعض أسر الدوال التحليلية ذات التمثيل التكاملي ثم تحديد مجموعة قيمه في بعض الحالات الخاصة . في سبيل ذلك سوف نستفيد من مفهوم الغلاف المحدب للمجموعة ومن نظرية الغلاف المحدب اللذين نعرضهما فيما يلي:

تعريف1.1. لتكن W مجموعة كيفية في المستوي. ندعو أصغر مجموعة محدبة تحتوي على هذه المجموعة بالغلاف المحدد للمجموعة W ونرمز له بالرمز $convW$. الغلاف المحدب للنقاط w_1,w_2,w_3 مثلاً ، هو مجموعة نقاط المثلث الذي تقع رؤوسه في هذه النقاط .

نظرية1.1. لتكن $H\left(t\right)$ دالة عقدية مستمرة ذات متحول حقيقي t من المجال $[a,b]$ ولنرمز بالرمز $U[\alpha,\beta]$ لمجموعة الدوال $\mu(t)$ غير المتناقصة في هذا المجال بحيث يكون $\mu(\beta)-\mu(\alpha)=1$. عندئذ تتطابق مجموعة قيم التكامل

$$J(\mu)=\int_\alpha^\beta H(t)d\mu\left(t\right)\ ,\quad \mu\in U\left[\alpha,\beta\right]\qquad (2)$$

(مع تغير μ) مع الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة

$$\Gamma : w=H(t)\ ,\ \ \alpha\le t\le\beta\ .$$

برهان هذه المبرهنة موجود في أكثر من مرجع مثل [1] و [4] .

2. عرض المسألة في الفضاء C

تعريف2.1. لتكن h مجموعة الدوال التحليلية في قرص الواحدة $\left(|z|<1\right)$ ذات القسم الحقيقي الموجب والتي تحقق الشرط $h\left(0\right)=1$. تعرف هذه الأسرة بأسرة كاراتيودوري (أو فضاء كاراتيودوري) ويرمز لها بالرمز C.

من المعلوم أن [5] كل دالة من الفضاء C تقبل التمثيل التكاملي الآتي:

$$, \quad h(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) \qquad\qquad (3)\quad \mu \in U[-\pi,\pi]$$

(μ في هذه الحالة دالة غير متناقصة في المجال $[-\pi,\pi]$ ويحقق الشرط $\mu(+\pi)-\mu(-\pi)=1$).

تعرف العلاقة (3) بالتمثيل التكاملي للدوال (أو بالصيغة البنيوية) في الفضاء C . باستخدام هذه الصيغة يمكن استنتاج خواص كثيرة للأسرة C نذكر منها أن الأسرة C متراصة ومترابطة في توبولوجيا التقارب المنتظم [5] .

نظرية2.1. من أجل كل نقطة w من القرص المغلق $|z| \le 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يوجد دالة h من الفضاء C يكون أحد أمثا ل منشورها b_n في سلسلة تايلور مساوياً النقطة w .

البرهان . لنضع

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2z\frac{e^{-it}}{1-e^{-it}z} \;.$$

فيكون :

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2e^{-it}z + 2e^{-2it}z^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-int}z^n$$

ومنه:

$$h(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-int}z^n]\, d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) + \sum_{n=1}^{n} [2\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t)] z^n$$

فإذا كان الآن:

$$h(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots, \qquad |z| < 1$$

فإن:

$$b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(2e^{-nit}\right) d\mu(t) \;, \qquad n = 1,2,\ldots$$

وهذا يعني بحسب النظرية 1.1 أن مجموعة تحول الأمثال b_n هي الغلاف المحدب للمنحني المعطى بالعلاقة

$$H(t) = 2e^{-int}, \quad 0 \le t \le 2\pi \,.$$

وهو القرص $|z| \le 2$ وعليه لابد من وجود دالة في C يكون أحد أمثالها مساوياً النقطة (أو العدد) w .

وهو المطلوب.

3. تطبيقات

تطبيق3.1. مجموعة قيم الدالي $F(f) = f(z_0)$ عندما يكون $f \in C$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D ، هي القرص المغلق $|w - w_0| \le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$(4) \quad w_0 = \frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\,, \quad R = \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}\,.$$

بكلمات أخرى : منطقة تحول النقطة $f(z_0)$ من الفضاء C هي القرص المغلق $|w - w_0| \le R$.

البرهان. بما أن لتوابع الأسرة C الشكل

$$h(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t),\quad \mu\in U$$

فإن استخدام النظرية 1.1 يؤدي إلى أن مجموعة قيم الدالي F هي الغلاف المحدب للمنحني:

$$\Gamma:\ H(t)=\frac{e^{it}+z_0}{e^{it}-z_0},\ \ 0\le t\le 2\pi\ ,z_0\in D.$$

في سبيل معرفة شكل هذا المنحني نضع معادلته بالشكل الديكارتي التالي: $H(t)=u+iv$ فنجد بعد تحويلات بسيطة أن:

$$H(t)=\frac{1+e^{-it}z_0}{1-e^{-it}z_0}=\frac{\left(1+e^{-it}z_0\right)\left(1-e^{it}\bar{z}_0\right)}{\left|1-e^{-it}z_0\right|^2}=\frac{1-\left|z_0^2\right|+2i\,Im\,e^{-it}z_0}{\left|1-e^{-it}z_0\right|^2}.$$

وعندئذ:

$$u=\frac{1-\left|z_0^2\right|}{\left|1-e^{-it}z_0\right|^2}=\frac{1-\left|z_0^2\right|}{1+\left|z_0\right|^2-2\left(x_0\cos t+y_0\sin t\right)}$$

$$v=\frac{2\,Im\,e^{-it}z_0}{\left|1-e^{-it}z_0\right|^2}=\frac{2\left(-x_0\sin t+y_0\cos t\right)}{1+\left|z_0\right|^2-2\left(x_0\cos t+y_0\sin t\right)}.$$

حيث $z_0=x_0+iy_0$. بإيجاد نسبة v على u ثم تعويض الناتج في v نحصل على جملة العلاقتين

$$-x_0\sin t+y_0\cos t=\frac{v}{2u}\left(1-\left|z_0\right|^2\right).$$

$$x_0\cos t+y_0\sin t=\frac{1}{2}\left(1+\left|z_0\right|^2-\frac{1}{u}\left(1-\left|z_0\right|^2\right)\right)$$

اللتين تعطيان بعد تربيع الطرفين ثم الجمع والاختصار مايلي:

$$\left|z_0\right|^2=\left(\frac{v}{2u}\right)^2\left(1-\left|z_0\right|^2\right)^2+\frac{1}{4}\left(1+\left|z_0\right|^2-\frac{1}{u}\left(1-\left|z_0\right|^2\right)\right)^2$$

$$u^2+v^2-2u\frac{1+\left|z_0\right|^2}{1-\left|z_0\right|^2}+1=0$$

وهذا بدوره يؤدي إلى المساواة :

$$\left(u-\frac{1+\left|z_0\right|^2}{1-\left|z_0\right|^2}\right)^2+v^2=\left(\frac{2\left|z_0\right|}{1-\left|z_0\right|^2}\right)^2$$

التي تمثل معادلة دائرة مركزها w_0 ونصف قطرها R معطيان بالعلاقة (4) . وبذلك يكون الغلاف المحدب لهذه الدائرة هو القرص المغلق الذي محيطه الدائرة الناتجة نفسها أي $\left|w-w_0\right|\le R$ وهو المطلوب.

تطبيق3.2. إذا كان $h \in C$ و $\arg h(z_0) = 1/2$ فإن منطقة تحول الدالي $F(h,h') = h'/h$ تقع ضمن القرص

$$|w| = \frac{1}{1-|z_0|^2}. \quad z_0 \in D$$

البرهان. بماأن الدالة $\varsigma = \dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تنقل قرص الواحدة إلى نفسه (يمكن التحقق من ذلك بسهولة) فإن الدالة

$$w = h\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right), \quad w_0 = f(z_0)$$

سوف تبقى منتمية إلى الفضاء C. ونظراً لأن $u = re\, w > 0$ فإن :

$$|w-w_0| = |u+iv-(u_0+iv_0)| < |u+iv-(u_0-iv_0)| = |w+\overline{w_0}|$$

وبالتالي

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{w-w_0}{w+\overline{w_0}}\right| = \frac{|w-w_0|}{|w+\overline{w_0}|} < 1.$$

وفي الحالة هذه سيكون التابع $\varphi(z) = \dfrac{w-w_0}{w+\overline{w_0}}$ محققاً لشروط تمهيدية شوارتز :

$$\varphi(0) = 0 \;,\; |\varphi(z)| < 1$$

الأمر الذي يعني أن $|\varphi(z)| < |z|$ وبالتالي $\left|\dfrac{\varphi(z)}{z}\right| < 1$.

نستنتج من ذلك أن:

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}\right| = \left|\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z-0}\right| = \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} |\varphi'(0)| < 1.$$

ومن ناحية ثانية وبعد حسابات بسيطة نجد أن:

$$\varphi'(z) = \left(\frac{w-w_0}{w+\overline{w_0}}\right)' = \frac{w'}{w+\overline{w_0}}$$

وبالتالي:

$$\varphi'(0) = \frac{w'(0)}{w(0)+\overline{w_0}}.$$

والآن باشتقاق الدالة $w = h\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)$ بالنسبة للمتحول z ثم التعويض في المساواة أعلاه نحصل على المتراجحة

$$|\varphi'(0)| = \frac{|h'(z_0)|\left(1-|z_0|^2\right)}{h(z_0)+\overline{h(z_0)}} \le 1 .$$

وهذه بدورها تؤدي إلى المتراجحة

$$h'(z_0)\left(1-|z_0|^2\right) \le 2\,Re\,h(z_0).$$

وبما أن $arg\,h(z_0)=\pi/6$ فرضاً فإن

$$Re\,h(z_0) = Re|h(z_0)|e^{i\pi/3} = |h(z_0)|\cdot\frac{1}{2}$$

وبذلك يكون:

$$h'(z_0)\left(1-|z_0|^2\right) \le 2\cdot|h(z_0)|\cdot\frac{1}{2} = |h(z_0)|$$

وفي النهاية:

$$\frac{h'(z_0)}{|h(z_0)|} \le \frac{1}{1-|z_0|^2} .$$

وهو المطلوب (لاحظ هنا أننا برهنا على هذه النتيجة دون الاستعانة بالنظرية1.1).

إذا كان الدالي خطياً بالنسبة للدالة h ومشتقاتها فبالامكان أيضاً استخدام النظرية1.1 وتحديد المستقر بدقة في بعض الحالات الخاصة. يبين ذلك المثال الآتي:

تطبيق 3.3 منطقة تغير قيم الدالي

$$,\quad f\in C,\quad F(h,h^{(k)}) = h(z)+h^{(k)}(z),\ k=1,2...,n$$

في النقطة $z=0$ هي القرص المغلق $|w-1|\le 2k!$.

البرهان. بما أن $f\in C$ فإن اشتقاق الطرفين في (3) ثم التعويض في الدالي أعلاه يؤدي إلى:

$$F = h(z)+h^{(k)}(z) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)+\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2k!\,e^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^{k+1}}\ d\mu(t)$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}+\frac{2k!\,e^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^{k+1}}\right]\ d\mu(t).$$

وفي النقطة $z_0=0$ يكون

$$F = h(0)+h^{(k)}(0) = \int_{-\pi}^{+\pi}\left[1+2k!\,e^{ikt}\right]\ d\mu(t).$$

و بالرجوع الآن للنظرية1.1 نلاحظ أن لمعادلة للمنحني Γ في هذه الحالة الشكل :

$$\Gamma : w = H(t) = 1+2n!\,e^{ikt},\quad 0\le t\le 2\pi$$

الذي يمثل دائرة معادلتها $|w-1|=2k!$. وبذلك يكون القرص المغلق $|w-1|\le 2k!$ هو الغلاف المحدب للمنحني Γ الذي يشكل في الوقت نفسه منطقة تحول قيم الدالي المطلوبة .

4. تطبيق المسألة في الفضاء S^*

تعريف4.1 . نقول إن المنطقة G نجمية بالنسبة للنقطة 0 إذا كان كل مستقيم ماراً من النقطة 0 يقطع هذه المنطقة وفق مستقيم واحد (أو نصف مستقيم واحد أو قطعة مستقيمة واحدة).

تعريف4.2 . نقول عن التابع f التحليلي في قرص الواحدة إنه تابع نجمي إذا كانت صورة قرص الواحدة هذا منطقة نجمية بالنسبة للصفر. يرمز لمجموعة التوابع من هذا النوع بالرمز S^* الذي يعرف بفضاء التوابع النجمية (أو بأسرة التوابع النجمية) .

من المعروف أن انتماء الدالة f للأسرة S^* يكافئ انتماء الدالة $z\,f'/f$ للأسرة C [5] . أي أن

$$f\in S^* \Leftrightarrow h=z\frac{f'}{f}\in C \qquad (5)$$

من هذه العلاقة ومن الصيغة البنيوية في C نستطيع إيجاد التمثيل التكاملي لدوال الأسرة S^*.

نظرية4.1. إذا كان $f\in S^*$ فإن :

$$f(z)=ze^{-2\int_{-\pi}^{\pi} Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)}.$$

البرهان. من العلاقات

$$\left(Log\frac{f}{z}\right)'=\left[Logf(z)-Logz\right]'=\frac{f'}{f}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\left(z\frac{f'}{f}\right)-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}h-\frac{1}{z}$$

نلاحظ بحسب (5) أن $h\in C$ وبالتالي:

$$\left(Log\frac{f}{z}\right)'=\frac{1}{z}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)-\frac{1}{z}$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة للمتحول z ثم الاختصار نجد أن:

$$Log\frac{f}{z}=2\int_0^z\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\mu(t)}{e^{it}-z}\right)dz=2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\int_0^z\frac{dz}{e^{it}-z}\right)d\mu(t)$$
$$=-2\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t).$$

ومنه نستنتج أن:

$$\frac{f}{z}=e^{-2\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)}$$

وبالتالي:

$$f=z\,e^{-2\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)}$$

وهو المطلوب .

تطبيق 4.1 . إذا كان $f\in S^*$ فإن منطقة تحول الدالي $F(f)=\left[z/f(z)\right]^{1/2}$ في النقطة z_0 هي القرص

$$\left|z-1\right|\le\rho,\quad \left|z_0\right|=\rho\ ,0<\rho<1$$

البرهان . بما أن $f\in S^*$ فإن

$$f=z\,e^{-2\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)}$$

وبالتالي:

$$F(f)=\left(z/f(z)\right)^{1/2}=e^{\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)}$$

وبذلك يكون:

$$Log\left(z/f(z)\right)^{1/2}=\int_{-\pi}^{+\pi}Log\left(1-e^{-it}z\right)d\mu(t)$$

بالاستفادة من النظرية 1.1 نستنتج أن منطقة تحول الدالي $Log\left(z/f(z)\right)^{1/2}$ هو الغلاف المحدب للمنحني

$$\Gamma:\ w=Log\left(1-e^{-it}z_0\right),\ \left|z_0\right|=\rho\,,\ -\pi\le t\le\pi$$

لمعرفة هذه المنطقة نلاحظ أولاً أنه عندما يكون $1>\rho>0$, $\left|z\right|=\left|z_0\right|=\rho$ فإن

$$1-e^{-it}z=1-e^{-it}\rho\,e^{i\theta}=1-\rho e^{i(\theta-t)}=1-\rho\,e^{i\varphi}\ ,\ -\pi\le\varphi\le\pi$$

ثم نستفيد من الحقيقة أن الفرع الرئيسي للوغاريتم $w=Log\ z$ ينقل بشكل محافظ القرص المغلق $\left|z-1\right|\le\rho$ إلى المنطقة G المحدبة والمحددة بالمحيط الناتج من المنحني

$$\Gamma:\ w=Log\left(1-\rho e^{i\varphi}\right),\ -\pi\le\varphi\le\pi$$

وبذلك تكون G هي المنطقة نفسها التي تتحول قيم الدالي $Log\left(z/f(z)\right)^{1/2}$ ضمنها. ومن ذلك نستنتج أن صورة $\left[z/f(z)\right]^{1/2}$ هي الصورة العكسية للمنطقة G أي القرص

$$\left|z-1\right|\le\rho,\quad \left|z_0\right|=\rho\ ,0<\rho<1$$

المراجع:

[1].ALEKSANDROV, I. *Boundary Values of Functional on the Class of Holomorphic Functions Univalent in a Circle* . Sibirsk , Mat. Z. 4 , (1963) , 17-31.

[2] BADDOUR,H. *About the range of variability of linear functionals in Caratheodory Classe*. Damascus univ.journal- No.28 – 1998