مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

تقدير ثابت هلدر للتحويل المحافظ الذي ينقل القرص الواحدي إلى مضلع محدب ذو n ضلع

الدكتور عبد الباسط يونسو*
الدكتور رامز كروم**
راقد صالح شبيب***

(تاريخ الإيداع 12 / 12 / 2007. قُبِل للنشر في 2008/4/21)

الملخّص

في هذا العمل نقوم بتقدير ثابت هلدر للتحويل المحافظ الذي ينقل القرص الواحدي K إلى المضلع المحدب المغلق G الذي يملك n ضلع ، توجد دراسة تثبت وجود هذا الثابت و تبين أن أس هلدر α_k لهذا التحويل يعطى بالعدد $\alpha_k = \min(\alpha_1,...,\alpha_n)$ حيث: $\alpha_1\pi,\alpha_2\pi,...\alpha_n\pi$ الزوايا الداخلية للمضلع.

الكلمات المفتاحية:التحويل المحافظ–استمرار هلدر–المضلع المحدب .

* مدرس – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين –اللاذقية– سورية .
*** طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات–كلية العلوم– جامعة تشرين –اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

Estimating Holder's constant of Conformable Mapping which changes the Unitary Disc to a Convex Polygon of n Sides

Dr. Abd-Elbasset Younso*
Dr. Ramez Karrom**
Raked Shbeb ***

(Received 12 / 12 / 2008. Accepted 21/4/2008)

□ ABSTRACT □

In this study, we estimate Holder's constant of conformable mapping which maps unitary disc into a convex polygon of n sides. There are some studies that prove the existence of this constant and explain the relationship between the Polygon angles $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, ..., \alpha_n\pi$ and Holder's index α_k $: \alpha_k = \min(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Keywords: conformable mapping, HOLDER'S continuity, convex polygon .

***Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

بسبب تعدد الأشكال غير الخطية للمعادلات التفاضلية، فإنه لا توجد حتى الآن نظرية كاملة تغطي مثل هذه المعادلات، ومسائل من هذا النوع تستخدم في حلها الطرق العددية مثل طريقة التفريق أو التعويض. لذلك من الأهمية بالنسبة للهندسة المدنية تقدير مثل هذه الحلول للمعادلات التفاضلية وتمثيلها، لأنها تكون القاعدة الأساسية للحسابات العددية من جهة، وتساهم في شرح الظواهر الميكانيكية من جهة أخرى.وبما إن المناطق التي تحوي على زوايا تلعب دورا هاما في الميكانيك الهندسي فقد اخترنا المضلعات كمنطقة لحل مثل هذه المعادلات.

إن أحدى الطرق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، هي طريقة النقطة الثابتة لباناخ[3,2]، و من أجل دراسة حلول المعادلة $\Delta u(x)=F(x,u)$ في مضلع محدب، نحتاج إلى تقدير ثابت هلدر للتحويل المحافظ الذي ينقل القرص الواحدي إلى المضلع المحدب، وذلك من أجل استمرار هلدر لحل المعادلة $\Delta u=0$ في المضلع المحدب.

مجموعة من التعاريف والمصطلحات:

1 . إذا كان f تابعا" معرفا" على المجموعة M عندئذ نقول عن f انه هلدر –مستمر على كامل M بالثابت H والأس $0<\lambda\le 1$ إذا تحقق من اجل جميع النقاط $t_1, t_2 \in M$ الشرط التالي:

$$\left|f(t_2)-f(t_1)\right| \le H\left|t_2-t_1\right|^{\lambda}$$

وفي حال $\lambda=1$ نقول عن f انه ليبشتز–مستمر.

2– نرمز لفضاء الدوال هلدر– مستمرة في $\overline{G}$ بالرمز $C_{\lambda}(\overline{G})$ ويكون هذا الفضاء فضاء باناخ إذا عرفنا عليه النظيم بالعلاقة

$$\|f\|_{\lambda}=\max\left(\sup_{z\in G}|f(z)|\ ,\ \sup_{z_2\neq z_1}\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^{\lambda}}\right)$$

3– سنرمز التحويل المحافظ الذي ينقل المضلع المحدب المغلق إلى القرص الواحدي المغلق بالرمز f .

و سنرمز التحويل المحافظ الذي ينقل القرص الواحدي المغلق إلى المضلع المحدب المغلق بالرمز ω .

4– إذا كانت M مجموعة غير خالية من الفضاء $\mathbb{C}$ (فضاء الأعداد العقدية) وكانت لصاقتها $\overline{M}$ فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $t\in\overline{M}$ هو أن توجد متتالية (t_n) من نقاط M بحيث إن $t_n \to t$.

مجموعة من النظريات المساعدة:

نظرية مساعدة 1: إذا كان G مضلعاً محدباً مغلقاً (موجود في المستوي العقدي– $\mathbb{C}$–) ذو n ضلعا" و $\alpha_1\pi ....\alpha_n\pi$ زواياه الداخلية وكان $K=\{t\in\mathbb{C}:|t|\le 1\}$ القرص الواحدي عندئذ تتحقق من أجل التحويل المحافظ f الذي ينقل القرص الواحدي المغلق K إلى المضلع G المتراجحة

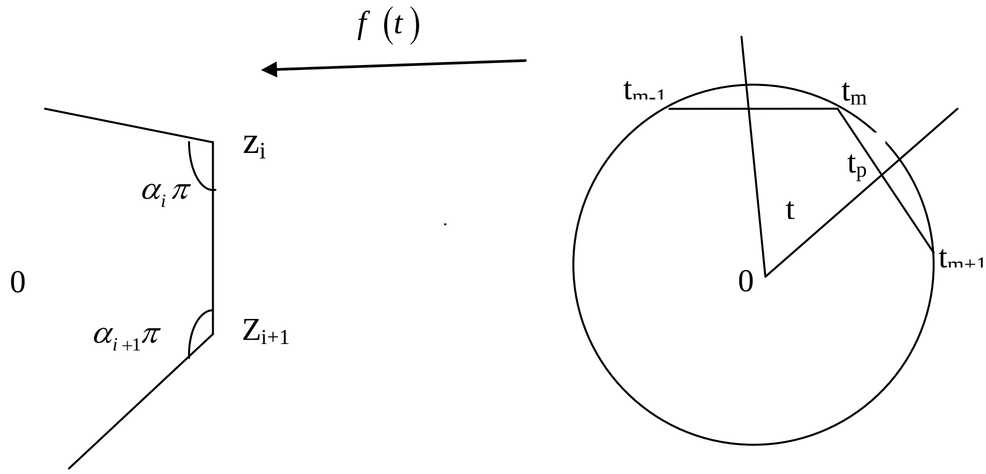
$$\left|f'(t)\right| \le \frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}} \quad ; \quad c_0=|c|\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_0}$$

حيث : $\alpha_0=\max\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ و $\alpha_k=\min\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$

الإثبات:

نعلم إن التحويل المحافظ الذي ينقل القرص الواحدي K إلى المضلع المحدب G الذي عدد أضلاعه n حيث $f(0_K)=0_G$ و c ثابت يتعلق بأطوال المضلع [3] يعطى بالعلاقة:

$$f(t)=\int_0^t f'(\tau)d\tau \quad , \; f'(t)=\frac{c}{(t-t_1)^{1-\alpha_1}\dots(t-t_n)^{1-\alpha_n}} \qquad (1)$$



الشكل (1) يبين كيفية انتقال القرص الواحدي إلى المضلع المحدب وفق التحويل f(t)

فإذا كانت $t_1,\dots,t_n \in\partial K$ نقاط القرص K التي تقابل رؤوس المضلع $z_1,\dots,z_n\in\partial G$ على الترتيب وكانت t إحدى نقاط القرص K أو من محيطه و t_m أحدى النقاط $\{t_1,\dots,t_n\}$ والأقرب إلى t. عندئذ فإن t تقع في المنطقة المحصورة بين محوري القطعتين $\overline{t_m t_{m-1}}$, $\overline{t_m t_{m+1}}$ وقوس القرص المحصور بين هذين المحورين الملتقيين في المركز 0 ولو كانت t لا تقع في هذه المنطقة لكانت أقرب إلى t_{m-1} أو إلى t_{m+1} من t_m. إن أقرب النقاط من المنطقة السابقة إلى t_{m+1} هي النقطة t_p منتصف $\overline{t_m t_{m+1}}$ الشكل (1). أي يتحقق لدينا من أجل كل $i\neq m$ مع $i=1,\dots,n$ التالي $|t-t_i|\geq|t_{m+1}-t_p|$

فإذا كان $\ell=\min\limits_{i=1}^{n}\{|t_i-t_{i+1}|;n+1=1\}$ عندئذ من أجل كل $i\neq m$ مع $i=1,\dots,n$ وكل t من نقاط K أو محيطه يكون $|t-t_i|\geq\frac{\ell}{2}$ وبالتالي:

$$(t-t_1)^{1-\alpha_1}\dots(t-t_n)^{1-\alpha_n}=\prod_{i=1}^{n}(t-t_i)^{1-\alpha_i}\Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}|t-t_i|^{1-\alpha_i}=|t-t_m|^{1-\alpha_m}\prod_{i\neq m}|t-t_i|^{1-\alpha_i}\geq$$

$$\geq|t-t_m|^{1-\alpha_m}\prod_{i\neq m}\left(\frac{\ell}{2}\right)^{1-\alpha_i}=|t-t_m|^{1-\alpha_m}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^{n-1-\sum_{i\neq m}\alpha_i}$$

ولإيجاد $\sum_{i\neq m}\alpha_i$ نعلم إنه نستطيع تقسيم أي مضلع يملك n ضلع ويحوي 0 إلى n مثلث فيكون مجموع الزوايا الداخلية لهذا المضلع هي مجموع زوايا n مثلث باستثناء الزوايا التي تقع رؤوسها على 0 والتي مجموعها زاوية قدرها 2π

وبالتالي:
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\pi = n\pi - 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n-2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\neq m}\alpha_i = n-2-\alpha_m$$

وبالتالي:

$$\prod_{i=1}^{n}\left|t-t_i\right|^{1-\alpha_i} \geq \left|t-t_m\right|^{1-\alpha_m}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^{n-1-(n-2-\alpha_m)} = \left|1-|t|\right|^{1-\alpha_m}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^{1+\alpha_m} \qquad (2)$$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$\alpha_k = \min\{\alpha_1,...,\alpha_n\} \leq \alpha_m ;\forall 1\leq m\leq n \quad \Rightarrow -\alpha_K \geq -\alpha_m \quad \Rightarrow$$
$$1-\alpha_K \geq 1-\alpha_m \quad \Rightarrow \quad \left|1-|t|\right|^{1-\alpha_m} \geq \left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}$$

وبالتالي حسب (2):

$$\prod_{i=1}^{n}\left|t-t_i\right|^{1-\alpha_i} \geq \left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^{1+\alpha_m}$$

وبالتالي:
$$\left|f'(t)\right| \leq \frac{|c|}{\prod_{i=1}^{n}\left|t-t_i\right|^{1-\alpha_i}} \leq \frac{|c|}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}}\cdot\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_m} \quad ,1\leq m\leq n$$

وبمراعاة $\alpha_m \leq \alpha_0 = \max\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ يكون:

$$\left|f'(t)\right| \leq \frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}} \quad ; \quad c_0 = |c|\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_0}$$

نظرية مساعدة 2: إذا كان u القسم الحقيقي للتحويل المحافظ f فإن مشتقاته الجزئية في الإحداثيات القطبية تحقق المتراجحات:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}(t)\right| \leq \frac{2c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}} \quad , \quad \left|\frac{\partial u}{\partial\theta}(t)\right| \leq \frac{2|t|c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}}$$

إثبات:

إذا كان
$$f(t) = u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta) \; ; \; t = \xi + i\eta$$

عندئذ فإن المتراجحات التالية صحيحة

$$\left|f'(t)\right| \geq \left|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right| \quad , \quad \left|f'(t)\right| \geq \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|$$

بالتالي حسب النظرية المساعدة 1 فإن المشتقات الجزئية لـ $u(\xi,\eta)$ تحقق التقديرات:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right| \leq \frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_k}} \quad , \quad \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right| \leq \frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_k}} \qquad \textbf{(3)}$$

ومن أجل $t=\xi+i\eta$ حيث $\begin{array}{l}\xi=r\cos\theta\\ \eta=r\sin\theta\end{array}$ يكون

حسب (3)
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial \theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}(t)\right|\le\frac{2c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}}\quad,\quad\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(t)\right|\le\frac{2|t|c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_K}}$$

نظرية مساعدة 3: إن القسم الحقيقي u للتحويل f هو هلدر . مستمر في كامل القرص K بالأس $0<\alpha_k\le 1$ والثابت $H_0=c_0\left(\dfrac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)$.

إثبات:

لنأخذ $t_1,t_2\in K$ أي: $t_1=r_1\,e^{i\theta_1}$ و $t_2=r_2\,e^{i\theta_2}$

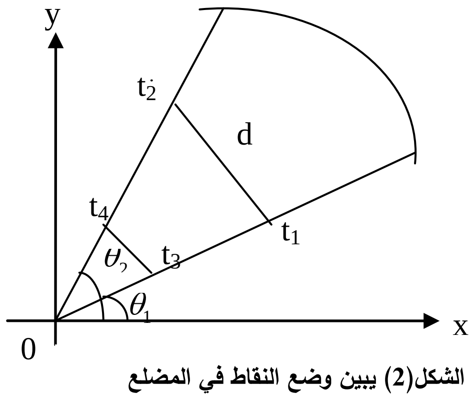
وبفرض: $r_2\ge r_1$ مع $\theta_1\le\theta_2\le\theta_1+\pi$ وأن: $|t_2-t_1|=d$

ولنختار النقطتين المساعدتين:

$t_3=(r_1-d)e^{i\theta_1}$ ، $t_4=(r_1-d)e^{i\theta_2}$

وفي حال $r_1<d$ نضع $t_3=t_4=0$ الشكل (2).

وهذا يعني دوما" أن : $|t_1-t_3|\le d$, $|t_2-t_4|\le 2d$



الشكل(2) يبين وضع النقاط في المضلع

لأن النقطتان t_1 , t_2 تحققان $r_2-r_1\le d$ ومنه حسب النظرية المساعدة (2)

$$|u(t_1)-u(t_3)|=\int_{r_3}^{r_1}\frac{\partial u}{\partial r}d\,r\ \le 2c_0\int_{\max(r_1-d,o)}^{r_1}\left(1-|t|\right)^{\alpha_K-1}d\,r$$

$$|u(t_2)-u(t_4)|\le 2c_0\int_{\max(r_1-d,o)}^{r_2}\left(1-|t|\right)^{\alpha_K-1}d\,r$$

وبما إن الدالة المكاملة متزايدة حيث: $\left(\left|1-|t|\right|^{\alpha_K-1}\right)'=-(\alpha_K-1)\left(1-|t|\right)^{\alpha_K-2}>0$

عندئذ من أجل $0 < r = |t| < 1$ فإن طول المجال المكامل عليه في التكامل الأول على الأكثر d وفي التكامل الثاني على الأكثر 2d وعليه فإن:

$$\left.\begin{array}{l} |u(t_1)-u(t_3)| \le 2c_0 \displaystyle\int_{\max(1-d,o)}^{1} (1-r)^{\alpha_K-1} dr = \frac{2c_0}{\alpha_K}\left[-(1-r)^{\alpha_K}\right]_{\max(1-d,o)}^{1} \\ |u(t_2)-u(t_4)| \le 2c_0 \displaystyle\int_{\max(1-2d,o)}^{1} (1-r)^{\alpha_K-1} dr = \frac{2c_0}{\alpha_K}\left[-(1-r)^{\alpha_K}\right]_{\max(1-2d,o)}^{1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|u(t_1)-u(t_3)| \le \frac{2c_0}{\alpha_K}.d^{\alpha_K} = \left(\frac{2c_0}{\alpha_K}\right) d^{\alpha_K} \;;\; \forall\, 1 \ge d$$

$$|u(t_1)-u(t_3)| \le \frac{2c_0}{\alpha_K}.1^{\alpha_K} \le \left(\frac{2c_0}{\alpha_K}\right) d^{\alpha_K} \;;\; \forall d \ge 1, 1^{\alpha_K} \le d^{\alpha_K}$$

إذاً:
$$|u(t_1)-u(t_3)| \le \left(\frac{2c_0}{\alpha_K}\right) d^{\alpha_K} \qquad (4)$$

وكذلك:
$$|u(t_2)-u(t_4)| \le \frac{2c_0}{\alpha_K}(2d)^{\alpha_K} \;;\; \forall\, 1-2d \ge 0$$

$$|u(t_2)-u(t_4)| \le \frac{2c_0}{\alpha_K} 1^{\alpha_K} \le \frac{2c_0}{\alpha_K}(2d)^{\alpha_K} \;;\; \forall 1-2d \le 0 : 1^{\alpha_K} \le (2d)^{\alpha_K}$$

وعليه فإن:
$$|u(t_2)-u(t_4)| \le \left(\frac{2c_0}{\alpha_K}\right)(2d)^{\alpha_K} \qquad (5)$$

ومن جهة ثانية بحسب النظرية المساعدة (2) لدينا بإجراء المكاملة بين t_3 و t_4 على القرص الدائري الذي مركزه 0 ونصف قطره $r_1 - d$ نحصل على:

$$|u(t_4)-u(t_3)| \le c_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2(r_1-d)}{(1-r_1+d)^{1-\alpha_K}} d\theta = c_0 \frac{2(r_1-d)}{(1-r_1+d)^{1-\alpha_K}}(\theta_2-\theta_1)$$

ولدينا $|1-r_1+d| \ge d$ كما أن:

$$2(r_1-d)\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} = |t_4-t_3| \le d$$

وبما أن:
$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \forall \alpha \in \left(o, \frac{\pi}{2}\right)$$

فإن:
$$2\cdot 2(r_1-d)\cdot\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \le 4(r_1-d)\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \le \pi d$$

وبالتالي:

$$|u(t_4)-u(t_3)| \le \frac{c_0 \pi d}{d^{1-\alpha_K}} = c_0 \pi d^{\alpha_K} \qquad (6)$$

وبالتالي فإنه من أجل كل $t_1\ ,\ t_2 \in K$ لدينا:

$$\begin{aligned}\left|u(t_2)-u(t_1)\right| &\le \left|u(t_2)-u(t_4)+u(t_4)-u(t_3)+u(t_3)-u(t_1)\right|\\ &\le \left|u(t_2)-u(t_4)\right|+\left|u(t_4)-u(t_3)\right|+\left|u(t_3)-u(t_1)\right|\end{aligned}$$

وبالتالي حسب العلاقات $(4),(5),(6)$:

$$\begin{aligned}\left|u(t_2)-u(t_1)\right| &\le \frac{2c_0}{\alpha_k}d^{\alpha_k}+\frac{2c_0}{\alpha_k}(2d)^{\alpha_k}+c_0\pi d^{\alpha_k}\\ &\le c_0\left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)d^{\alpha_K}\\ &\le c_0\left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)\cdot\left|t_2-t_1\right|^{\alpha_K}\quad ;\quad \forall t_1\cdot t_2\in K\end{aligned}$$

أي أن u هو هلدر مستمر في K بالأس $0<\alpha_k\le 1$ والثابت $c_0\left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)$

أما على المحيط: لدينا حسب التعريف (4) انه من اجل النقطتين $t_1,t_2\in\partial K$ أي نقاط من لصاقة المجموعة K توجد المتتاليتان (t_{1n}) و (t_{2n}) من K والمتقاربتان من (t_1) و (t_2) أي $(t_{1n})\to t_1$ و $(t_{2n})\to t_2$ مع $t_1,t_2\in\partial K$ ففي هذه الحالة تبقى المتراجحة السابقة صحيحة من أجل عناصر هاتين المتتاليتين عندئذ بأخذ النهاية للطرفين نحصل على:

$$\left|u(t_2)-u(t_1)\right|\le c_0\left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)\cdot\left|t_2-t_1\right|^{\alpha_K}\quad ;\quad \forall t_1,t_2\in\partial K$$

وعليه فإن:

$$\left|u(t_2)-u(t_1)\right|\le H_0\left|t_2-t_1\right|^{\alpha_K}\quad ;\quad \forall t_1,t_2\in\overline{K}$$

حيث :

$$H_0=\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_0}\cdot|c|\cdot\left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)$$

حيث $\overline{K}$ القرص الواحدي المغلق.

أي أن u هلدر− مستمر على كامل $\overline{K}$ بالأس $0<\alpha_K<1$ والثابت H_0.طريقة مشابهة للإثبات موجودة في [5,4].

نظرية مساعدة 4: أن القسم التخيلي v للتحويل f هو هلدر . مستمر على كامل $\overline{K}$ بالأس $0<\alpha_K\le 1$ والثابت H_0.

إثبات: لدينا بحسب شرطي كوشي . ريمان والنظرية المساعدة 1 أن:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|=\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|\le\frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_k}}\qquad ,\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|=\left|\frac{\partial v}{\partial\xi}\right|\le\frac{c_0}{\left|1-|t|\right|^{1-\alpha_k}}$$

وبالتالي حسب النظريتين المساعدتين (3,2) يكون v هلدر . مستمر على كامل $\overline{K}$ بالأس $0<\alpha_K\le 1$ والثابت H_0.

4 . تقدير ثابت هلدر:

نظرية: إن التحويل المحافظ f الذي ينقل القرص الواحدي K إلى المضلع المحدب G الذي عدد أضلاعه n هلدر . مستمر على كامل $\overline{K}$ بالأس $0<\alpha_K \le 1$ والثابت H_1 .

$$H_1 = 2H_0 = 2\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_0} \cdot |c| \cdot \left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)$$ حيث

إثبات: لدينا من أجل كل $t_1, t_2 \in \overline{K}$ أن:

$$\begin{aligned} |f(t_2)-f(t_1)| &= |u(t_2)+iv(t_2)-u(t_2)-iv(t_2)| \\ &\le |u(t_2)-u(t_1)|+|i(v(t_2)-v(t_1))| \\ &\le |u(t_2)-u(t_1)|+|v(t_2)-v(t_1)| \end{aligned}$$

وحسب النظريتين المساعدتين (4,3) نجد

$$|f(t_2)-f(t_1)| \le H_0|t_2-t_1|^{\alpha_K}+H_0|t_2-t_1|^{\alpha_K} = 2H_0|t_2-t_1|^{\alpha_K} = H_1|t_2-t_1|^{\alpha_K}$$

$$H_1 = 2H_0 = 2\left(\frac{2}{\ell}\right)^{1+\alpha_0} \cdot |c| \cdot \left(\frac{2}{\alpha_K}\left(1+2^{\alpha_K}\right)+\pi\right)$$ حيث

أي أن f هلدر . مستمر على كامل $\overline{K}$ بالأس $0<\alpha_K<1$ والثابت H_1 .

H_1 هو ثابت هلدر المطلوب إيجاده وهو يتعلق بـ ℓ اقصر أضلاع المضلع $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ و $\alpha_k = \min\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ والثابت c هو الثابت الموجود في التحويل المحافظ وهذه النتيجة توافق الدراسة الموجودة في [1,6,7] .

الاستنتاجات و التوصيات:

بالاستفادة من هذا العمل سندرس حلول مسالة بواصون الحدية في المضلع حيث توجد مسالة مشابهة لها وهي:

إذا كان u حلا للمعادلة $\Delta u = 0$ في القرص الواحدي K بالقيم الحدية g حيث g هلدر . مستمر في ∂K بالأس $0<\lambda<1$ والثابت H_0 عندئذ يكون u هلدر . مستمر بالأس $0<\lambda<1$ والثابت H_3 [2] حيث

$$H_3 = \frac{4.2^{\lambda}}{\cos\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)}\left(\frac{2}{\lambda\pi}\left(1+2^{\lambda}\right)+1\right).H_0$$

ويتم ذلك من خلال نقل هذه المسالة إلى القرص الواحدي المغلق باستخدام التحويل المحافظ f . ومن اجل ذلك نحتاج إلى ثابت هلدر لهذا التحويل (التحويل محافظ ما عدا نقاط رؤوس المضلع) . وهذا ما أثبتناه في هذه الدراسة.

المراجع:

1 - VEKUA, I , N. *generalized analytic function*,Berlin,1963, p 509, pp.23-27.

2- TUTSCHKE , W . *partial complex differential equation in one and in more complex variable.* Berlin, 1977 .p188, pp,121-131.

3 - PRIWALOW, I,I..*introduction in function theory.* GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC. 1970. PART III.

4- TUTSCHKE, W .*complex methods for partial differential equations* . BOSTON,1999, p .331.www.citebase.org/abstract? Identifier=oai % 3A arxiv. Org %3 A math – ph % 2F 0009013& action =citeshits&citeshi .

5 - YOUNSO,A. *fixed point theorems for nonlinear partial differential equation in a rectangle* . $\Delta^2 u$ *and* Δu *with the principal parts with* University Halle,1993, p .88.

6 - WARSCHAWSKI,S . *uber das randverhalten der abbildungsfunktion bei conformer abbildung //* MATH.ZTSCHR,1932,pp.321-456.

7- RIHAWI,F . *comparison on the solvability conditions for boundary value problems in the plane for different metrics*. Halle,1990, p .85.