

سلوك التقارب العددي و تحليل الخطأ للنموذج المعمم لتعلم مشكلة باستخدام خوارزميتي أولر و أولر- شبه المنحرف وفق Matlab و Maple

الدكتور أحمد الكردي*

(تاريخ الإيداع 7 / 1 / 2008. قُبِلَ للنشر في 6/8/2008)

□ الملخص □

عندما نصادف مشكلة ما و نريد حلها فينبغي أن نجمع المعلومات الضرورية المتعلقة بها. في هذه المقالة، قدمنا النموذج الرياضي المعمم لتعلم مشكلة. درسنا سلوك الخطأ و التقارب لطريقتين عدديتين هما خوارزمية أولر و خوارزمية أولر - شبه المنحرف بتطبيقهما على النموذج الرياضي الناتج. لتوضيح سلوك الحل و الخطأ طبقنا هاتين الخوارزمتين على النموذج المعمم باستخدام Matlab و Maple. طورنا برمجيات لتنفيذ الخوارزمتين المدروستين لحل النموذج المعمم. وجدنا عددياً أن القيمة المثلى لطول الخطوة هي $h = 10^{-4}$ و أن الخطأ المطلق الموافق يساوي الصفر. أجرينا تجارب محاكاة عديدة لطرائق عددية مختلفة. كانت أفضل هذه الطرائق $rk2$, $rk23$, $rk4$, $rk45$, Embedded rk, Modified Euler (حيث rk هي اختصاراً من Runge-Kutta). تبين من التجارب العددية أن القيمة المثلى لطول الخطوة هي أيضاً $h = 10^{-4}$ إلا أن أداء طريقة أولر و أولر - شبه المنحرف هو عموماً الأفضل في جميع التنفيذات و من أجل خيارات مختلفة. أخيراً، أجرينا تعديلاً على خوارزمية أولر - شبه المنحرف يتفادى حل مسألة غير خطية في كل خطوة باستخدام Maple.

الكلمات المفتاحية: تحليل الخطأ ، نموذج تعلم مشكلة، طريقة عددية.

• مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث - حمص - سورية.

Behavior of Numerical Convergence and Error Analysis for Generalized Model of Learning of Problem by Using Euler's and Euler -Trapezoid's Algorithms in Maple and Matlab

Dr. Ahmad Al-Kurdi*

(Received 7 / 1 / 2008. Accepted 6/8/2008)

□ ABSTRACT □

When we face a problem and want to solve it, we must collect the required information related to it. In this paper, we introduced generalized model of learning of problem. We studied error behavior and the convergence of the Euler's and Euler-Trapezoid's algorithms by applying them to the model obtained by using Maple and Matlab. We developed software for implementing the considered methods when solving the model obtained. Numerically, we found that the optimal value of step size was $h=10^{-4}$ and the corresponding absolute error was zero. We carried out more numerical different methods. The best methods were rk2, rk23, rk4, rk45, embedded rk, Modified Euler, but the performance of considered methods was the best. Finally, we made modification to Euler-Trapezoid method that avoids the solution of non-linear problem by Maple.

Key words: Error Analysis, Model of Learning of Problem, Numerical Method.

* Assistant Prof, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Al-Baath University, Homs, Syria.

مقدمة:

النمذجة الرياضية (**Mathematical Modeling**) هي قلب العلوم الرياضية التطبيقية و هي عملية استخدام الأفكار الرياضية لإيجاد أجوبة مفيدة للمشاكل التي تواجهنا في حياتنا اليومية [1,2]. هل سبق أن شككت كيف يتعلم الناس وماذا يسمح لنا أن نتعلم، أو كيف نشكل مقدرتنا التعليمية ؟ إذا كان الأمر كذلك، فإنك في المكان الصحيح. إننا نتعلم من كل شيء نراه أو نسمعه أو نعمله. بالنسبة لنا التعلم هو الطبيعة الثانية، وفي أغلب الأحيان نحن لا ندرك أننا نتعلم - كل هذا يحصل يومياً في حياتنا!. لقد أنت بذور الفكرة الأساسية من صياغة نموذج رياضي يتعلق بتعلم مشكلة بعد عمل دؤوب في النمذجة الرياضية و المعادلات التفاضلية و دراسة مستفيضة حول الموضوع استغرقت أكثر من سنتين. إذ لم يتم التوصل إلى صياغة نموذج رياضي يتعلق بعملية تعلم مشكلة. ففي [3]، توصلنا إلى صياغة نموذج رياضي يتعلق بتعلم مشكلة. دعي بنموذج تعلم مشكلة ويمكن صياغته كما يلي: إن المعدل الذي يتعلم فيه شخص ما مشكلة يساوي النسبة المئوية للمشكلة التي ينبغي أن يتعلمها. فإذا كانت $L(t)$ مقدار تعلم المشكلة التي نحن بصدد أن نتعلمها عندئذ يعبر عن معدل تغير تعلم المشكلة بالعلاقة:

$$\frac{dL}{dt} = 100 - L \quad (1)$$

أي أن معدل تغير تعلم المشكلة يتناسب مع المقدار $100 - L$ الجزء المتم لمعرفة المشكلة ككل. يدعى النموذج الرياضي الممثل بالمعادلة (1) **بنموذج تعلم مشكلة** [3] (**Model of Learning of Problem**). عملياً، $100 \geq L \geq 0$ و هكذا نريد أن يعكس نموذجنا حقيقة أن $\frac{dL}{dt} \geq 0$.

أهمية البحث و أهدافه:

الهدف من الرياضيات هو فهم و شرح النماذج. و هنا تكمن أهمية البحث في إيجاد نماذج رياضية تصف المشكلة التي نصادفها في حياتنا العملية. الفكرة هنا هي إيجاد النموذج المعمم من النموذج الرياضي (1) ودراسة سلوك الخطأ و التقارب العددي لحل النموذج المقترح باستخدام Maple و Matlab. تكمن أهمية البحث كونه يفتح المجال واسعاً أمام تطوير نماذج مشابهة نستخدم في حلها نفس النتائج التي نحصل عليها في هذه المقالة.

طريقة البحث و مواده:

نقدم في هذه الفقرة النموذج الرياضي المعمم للنموذج الرياضي لتعلم مشكلة كما وصف في [3]. نظور العديد من التنفيذات الحاسوبية بلغتي Maple و Matlab لطريقتين عدديتين هما خوارزمية أولر و خوارزمية أولر - شبه المنحرف. كما نقدم العديد من النتائج الهامة التي نتضح خلال عرض المقالة والتي لها تطبيقات هامة.

النتائج والمناقشة:**(1) النموذج الرياضي المعمم لتعلم مشكلة (1) (Generalized Mathematical Model of (1)):**

يمكن كتابة النموذج (1) بشكل عام بالصيغة التالية:

$$\frac{dL}{dt} = \Gamma - L \quad (2)$$

حيث تأخذ Γ الحالات التالية:

1. الحالة 1: $\Gamma = 100$. و لمزيد من التفاصيل انظر المرجع [3].

2. الحالة 2: Γ متغيرة. يقودنا هذا التعميم إلى النموذج الرياضي التالي:

$$L' = (F(t) - L) \quad (3)$$

حيث تستبدل Γ بتابع يتعلق بالزمن أي أن $\Gamma = F(t)$. سنركز دراستنا على النموذج (3) و قد اخترنا بعناية فائقة أمثلة على حالة Γ المتغيرة وفق الحالات التالية لتوضيح سلوك حل (3) و لتوضيح سلوك الطرائق العددية المدروسة و يمكن ملاحظة ذلك من خلال عرض أفكار المقالة.

$$1. F(t) = 100 \sin(2\pi t) \text{ أو } F(t) = 100 \sin(t)$$

$$2. F(t) = \sin(2\pi t) \text{ أو } F(t) = \sin(t)$$

المعادلة التفاضلية (3) مناسبة جدا لتوضيح فعالية ثلاث طرائق مختلفة للتعامل مع المعادلات التفاضلية. هذه الطرائق هي: الطرائق البيانية و الطرائق العددية والطرائق الرمزية. سنركز اهتمامنا على بعض الطرائق العددية و نترك الطرائق الأخرى لتكون موضوع المقالة القادمة. يمكن كتابة المعادلة (3) بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = f(L, t) = F(t) - L(t) \\ L(0) = L_0 \end{cases} \quad (4)$$

تمثل المعادلة (4) النموذج الرياضي المعمم لتعلم مشكلة (Generalized Mathematical Model of)

(1) في الحالة المستمرة (Continuous) و نرسم له اختصارا بالرمز GCLMP.

(2) الحل التحليلي للنموذج GCLMP (Analytical Solution of (4))

يمكن أن نجد و بسهولة أن الحل التحليلي للنموذج الرياضي GCLMP يعطى بالصيغة التالية:

$$L(t) = \left(\int_0^t F(s) e^s ds + 1 \right) e^{-t} \quad (5)$$

و ذلك من أجل الشرط الابتدائي $L(0) = L_0 = 1$ حيث L_0 هي القيمة الابتدائية وهي قيمة مثبتة.

(3) تحليل الخطأ و التقارب العددي للنموذج المعمم (4)

نناقش في هذه الفقرة تحليل التقارب للنموذج GCLMP بطريقتين عدديتين مختلفتين هما:

I. خوارزمية أولر (Euler's Algorithm) باستخدام Matlab و Maple.

II. خوارزمية أولر-شبه المنحرف (Euler-Trapezoid's Algorithm) باستخدام Matlab و

Maple:

• دون طريقة نيوتن (Without Newton Method).

• مع طريقة نيوتن (With Newton Method).

تعتمد كلتا الخوارزميتين أولر و أولر - شبه المنحرف على تقريب النموذج (4) بمتتالية من الحسابات التي تقسم الفترة الزمنية $[0, T]$ إلى K جزءا ، بخطوة طولها $h = \frac{T}{K}$. سنبين أن الخطأ الناتج بهذا النوع من التقريب يتناسب مع h في خوارزمية أولر و مع h^2 في خوارزمية أولر - شبه المنحرف.

(I) خوارزمية أولر باستخدام Matlab و Maple.

بغرض التسهيل نستخدم الرموز التالية $f'_L = f_L$, $f'_t = f_t$, $L'' = L_{tt}$, $L' = L_t$. وفق هذه الرموز تتضمن هذه الطريقة تقريب L_t بالفروق المنتهية:

$$\frac{L^{k+1} - L^k}{h} \quad (6)$$

حيث $h = \frac{T}{K}$ و L^k هو تقريب لـ $L(kh)$ و يقدر التابع f في النقطة (kh, L^k) . إذا لم تكن T محددة

عندئذ ستكون h مثبتة و يمكن أن تأخذ K جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. يمكن استبدال (4) إما بالمعادلة:

$$\frac{L^{k+1} - L^k}{h} = f((k+1)h, L^{k+1}) \quad (7)$$

أو بالمعادلة:

$$\frac{L^{k+1} - L^k}{h} = f(kh, L^k) \quad (8)$$

الخيار الثاني (8) هو الأبسط لأنه لا يتطلب حل مسألة غير خطية محتملة في كل خطوة تكرارية. تدعى الطريقة الممثلة بالخيار (8) بطريقة أولر. لتكن $L(k)$ أي متجهة من البعد $K+1$ بالشرط الابتدائي $L(0) = L_0$. ستكون $L(k)$ قيمة تقريبية للمتغير L في زمن يساوي kh ، أي أن: $L(k) = L^k$. عندئذ:

خوارزمية 1: خوارزمية أولر الموافقة للنموذج المعمم GCLMP (4) (Euler's Algorithm)

1. $h = \frac{T}{K}$
 2. $L(0) = L_0$
 3. for k=0 to K-1
 $L(k+1) = L(k) + hf(kh, L(k))$
- End loop

نقدم فيما يلي خوارزمية أولر بلغة Maple لإيجاد الحل العددي للنموذج (4):

خوارزمية 2. خوارزمية أولر بلغة Maple لإيجاد الحل العددي للنموذج (4) لأجل $\Gamma = F(t)$.

(Algorithm 2. Maple Code For Finding Numerical Solution of (4) using Euler method)

Input Data

t:='t':

L:='L':

f:=(t,L)->(F(t)-L);

t0:=0:

```

L0:=1:
T:=30:
K:=100:
Euler Procedure
EULER:=proc(f,t0,L0,T,K)
  t(0):= t0:
  h:=T/K:
  L(0):= L0:
  for k from 0 to K do
    L(k+1):= L(k) + h*f(t(k),L(k)):
    t(k+1):= t(k) + h:
  od:
end:

```

The Euler Procedure is Called for Different Mesh

with(plots):

```
EULER(f,0,1,30,100):
```

```
LL:= [seq([t(n),L(n)],n=0..100)];
```

```
EULER(f,0,1,30,200):
```

```
LLL:= [seq([t(n),L(n)],n=0..200)];
```

```
EULER(f,0,1,30,300):
```

```
LLLL:= [seq([t(n),L(n)],n=0..300)];
```

$L1 := \left(\int_0^n F(s) e^s ds + 1 \right) e^{-n}$; (The Exact solution of (4))

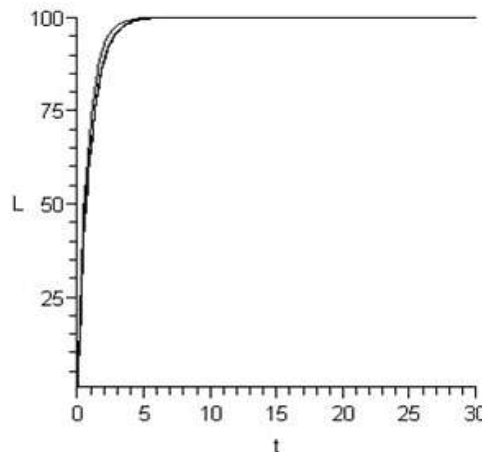
```
L2:=unapply(L1,n);
```

```
L3:= [seq([t(n),L2(n)],n=0..300)];
```

The Output is Graphed for the Three Mesh Choices:

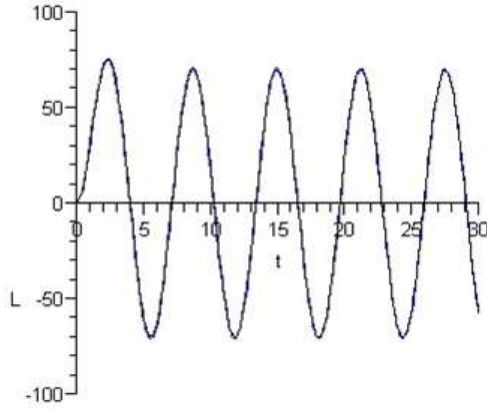
```
plot({LL,LLL,LLLL,L3},t=0..30, L=1..100, color=black);
```

يمكن توضيح خرج الخوارزمية 2 بيانيا من أجل خيارات مختلفة لعدد نقاط التجزئة 100 و 200 و 300 لنبين تأثيرها على الحل العددي كما هو مبين في الشكل التالي:

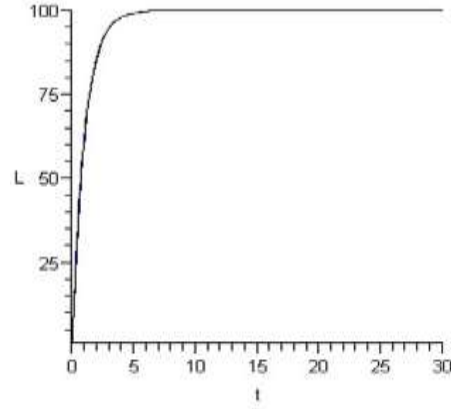


الشكل (1). تقارب الحل العددي من أجل $K = 100, 200, 300$ و $\Gamma = 100$ وفق الخوارزمية 2.

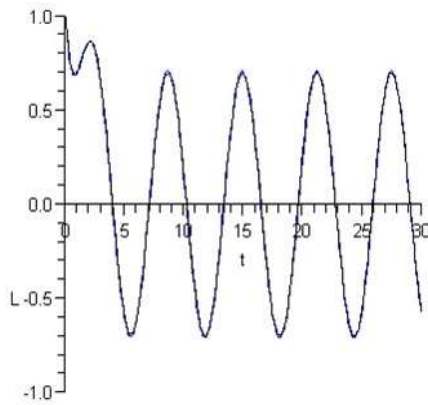
يتضح من الشكل (1) أن الحل العددي للنموذج المعمم (4) يتقارب من نقطة التوازن $\Gamma = 100$ عندما تزداد K من 100 إلى 200 إلى 300. بيانات الحل العددي في مرتبة متزايدة. نبين في الأشكال التالية سلوك الحل العددي و الحل التحليلي للنموذج (4) من أجل حالات مختلفة لـ Γ و من أجل $h = 10^{-4}$ وفق الخوارزمية 2.



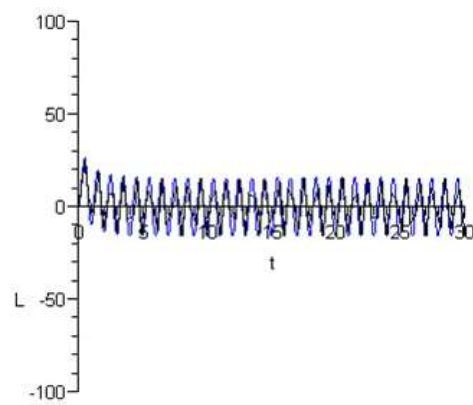
$\Gamma = 100\sin t - L$



$\Gamma = 100$



$\Gamma = \sin t - L$



$\Gamma = 100\sin(2\pi t) - L$

الشكل (2). سلوك الحل العددي و التحليلي للنموذج (4) وفق الخوارزمية 2 من أجل $h = 0.0001$.

يبين الجدول التالي الخطأ الحاصل من تطبيق الخوارزمية 2 لحل النموذج (4) مقارنة مع الحل التحليلي من أجل حالات مختلفة لـ Γ عندما $h = 0.0001$ و $t = 30$. يتضح من الجدول أن الحالتين الأولى و الأخيرة هي المفضلة لتنفيذ الخوارزمية 2 وفق Maple.

الجدول (1). الخطأ الناتج من تطبيق الخوارزمية 2 لحل النموذج (4) من أجل حالات مختلفة لـ Γ عندما $h = 0.0001$ و $t = 30$ باستخدام Maple.

$F(t) - L$	LExact	Leuler	Error
$100 - L$	100.0000000	100.0000000	0.0
$100\sin t - L$	-57.1141537	-57.1145394	3.857e-004
$100\sin(2\pi t) - L$	-15.5223096	-15.5238231	1.5135e-003
$\sin t - L$	-0.5711415	-0.5711454	3.9e-006

(I.1) تحليل الخطأ العددي (Numerical Error Analysis) لطريقة أولر و فق Matlab

نحلل في هذه الفقرة الخطأ الناشئ من تطبيق طريقة أولر عدديا و بيانيا لحل (4) بحساب الخطأ المطلق من أجل أطوال متغيرة للخطوة محددتين القيمة المطلقة للفرق بين الحل الدقيق (التحليلي) و الحل العددي في تلك الخطوة. نقدر الحل الدقيق في نفس النقاط التي نقرب فيها القيم المحسوبة بطريقة أولر التي تخزن في المتجهة Leuler. فإذا كانت L تمثل الحل الدقيق ، عندئذ لمقارنة القيم التقريبية ننظر في الفرق بين المتجهتين L و Leuler. نهتم فقط في القيمة المطلقة للخطأ و ليس في الإشارة. يعطينا الأمر $|L-Leuler|$ متجهة تحوي القيمة المطلقة للخطأ الناتج في كل خطوة من تنفيذ طريقة أولر. أخيرا، نحسب أكبر هذه الأخطاء باستخدام الأمر $maxerror = |L-Leuler|$ و بهذا الشكل يمكن تنفيذ طريقة أولر حيث نرى الخطأ فيها بيانيا و عدديا. نبين فيما يلي كيف يتغير الخطأ $maxerror$ مقابل طول الخطوة بتنفيذ الخوارزمية 3.

الخوارزمية 3. تنفيذ خوارزمية أولر لإيجاد طول الخطوة الأمثل و توضيح الخطأ عدديا و بيانيا مقابل كل h .

%yplust is a function that represents the considered model

%eul is a procedure that includes Euler's method

h_vect = []; err_vect = []; h = 0.01;

t = 0:.01:30;

$$L = \left(\int_0^t F(s) e^s ds + 1 \right) e^{-t}; \text{ (The exact solution of F(t)-L)}$$

for k = 1:8

[teuler,Leuler] = eul(@yplust,[0,30],1,h);

plot(t,L,teuler,Leuler, '.')

legend('Exact','Euler',2)

shg

$$z = \left(\int_0^{teuler} F(s) e^s ds + 1 \right) e^{-teuler};$$

maxerror = max(abs(z - Leuler));

h_vect = [h_vect,h]

err_vect = [err_vect,maxerror]

pause

h = h/2;

end

loglog(h_vect,err_vect)

xlabel('Step size')

ylabel('Maximum error')

title('Maximum error vs. step size for Euler''s method')

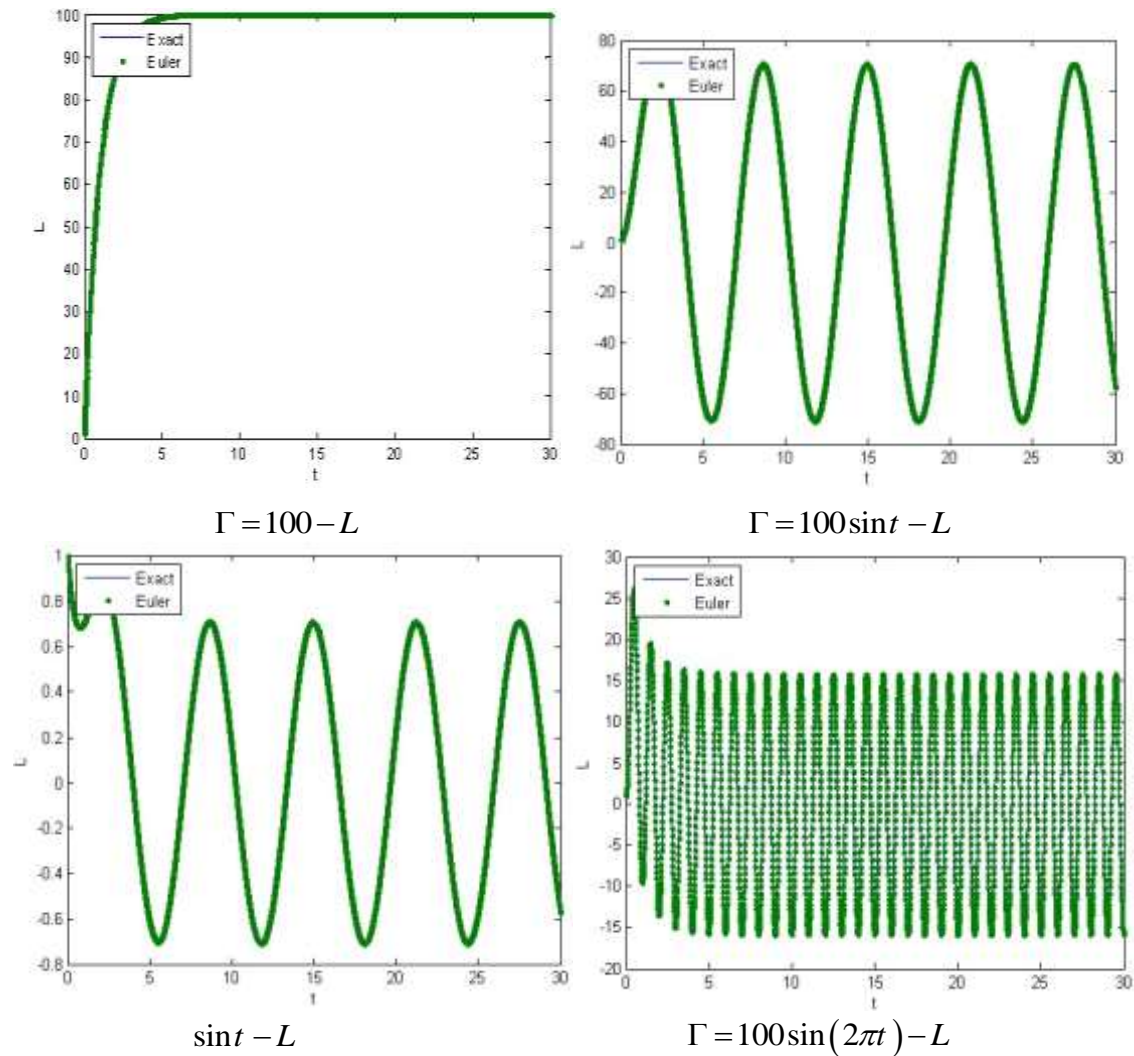
grid

axis tight

بتنفيذ الخوارزمية 3 تبين لنا أن القيمة المثلى لإيجاد حل النموذج (4) في جميع حالات Γ هو

$h = 0.0001$. تبين الأشكال التالية سلوك الخوارزمية 3 من أجل $h = 0.0001$ مقارنة مع الحل التحليلي لإيجاد

حل (4).



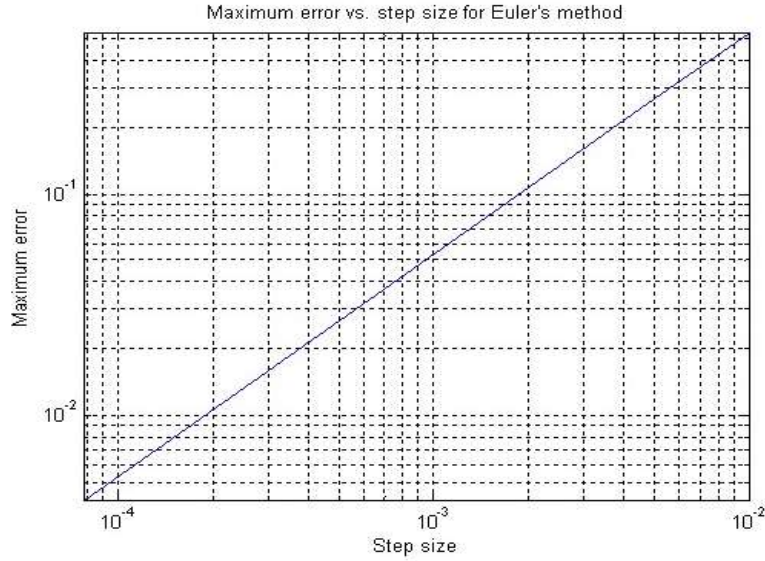
الشكل (3). تنفيذ الخوارزمية 3 لحل (4) باستخدام Matlab مقارنة مع الحل التحليلي من أجل $h = 0.0001$.

يبين الجدول التالي الخطأ الحاصل من تطبيق الخوارزمية 3 لحل النموذج (4) من أجل حالات مختلفة لـ Γ عندما $h = 0.0001$ و $t = 30$. يتضح من الجدول أن تنفيذ الخوارزمية 3 وفق Matlab في جميع الحالات فائق للغاية و أن الخطأ يساوي الصفر. لذا ننصح باستخدام Matlab لتنفيذها.

الجدول (2). الخطأ الناتج من تطبيق الخوارزمية 3 لحل النموذج (4) مقارنة مع الحل التحليلي من أجل حالات مختلفة لـ Γ عندما $h = 0.0001$ و $t = 30$.

Model	h	0.0100	0.0050	0.0025	.0013	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001
100-L	Err.	0.0912	0.0456	0.0228	0.0114	0.0057	0.0028	0.0014	0.e000
100sin t - L	Err.	0.1264	0.0632	0.0316	0.0158	0.0079	0.0039	0.0002	0.e000
100sin(2πt) - L	Err.	0.2672	0.1336	0.0668	0.0334	0.0167	0.0083	0.0004	0.e000
sin t - L	Err.	0.0033	0.0017	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.e000

يمكن أن نوضح سلوك الخطأ في طريقة أولر لدى تنفيذ الخوارزمية 3 في حالة $L - 100 \sin(2\pi t)$ مثلا.



الشكل (4). سلوك الخطأ لحل (4) وفق الخوارزمية 3 في الحالة $L - 100 \sin(2\pi t)$ من أجل $h = 0.0001$

نلاحظ أن بيان لوغاريتم الخطأ الأعظمي مقابل لوغاريتم طول الخطوة هو تقريبا خطي. فإذا كان البيان خطيا حقا ، عندئذ لدينا علاقة خطية بين لوغاريتمات الإحداثيات كالعلاقة التالية مثلا:

$$\log_{10}(\text{maximum error}) = A + B \log_{10}(\text{step size})$$

هناك نوعان من الأخطاء:

1. أخطاء تراكمية (Accumulation).

2. أخطاء (Discretization).

يمكن حساب الخطأ الناتج عن **Discretization** بالصيغة $E_d^k = L^k - L(kh)$. حيث L^k هو الحل الناتج من تطبيق (8) دون أخطاء تدوير (roundoff errors) و $L(kh)$ هو الحل الناتج من الحل الدقيق المستمر المعطى في (5) (Exact Continuum Solution). أما الخطأ التراكمي فيعطى بالعلاقة التالية $E_r^k = L_1^k - L^k$. حيث L_1^k هو الحل الناتج من تطبيق الخوارزمية 1 و لكن مع أخطاء التدوير. يتضمن الحل الكلي (overall error) كلا الخطأين و يعطى بالصيغة التالية $E_d^k + E_r^k = L_1^k - L(kh)$. نحاول فيما يلي أن نصف هذه الأخطاء كما يلي:

1. تحليل الخطأ Discretization: الحدود المتعلقة بتحليل الخطأ هي:

$$L_t(kh) = F(t) - L(kh) \quad (9)$$

$$L^{k+1} = L^k + h(F(t) - L^k) \quad (10)$$

$$L_1^{k+1} = L_1^k + h(F(t) - L_1^k) + R_{k+1} \quad (11)$$

حيث R_{k+1} هو خطأ التدوير الموضعي (**Local roundoff error**). باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى الموسعة (**Extended mean theorem**) مع العلاقة (9) و بالاستفادة من العلاقة (10) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} E_d^{k+1} &= L^{k+1} - L((k+1)h) \\ &= \left[L^k + h(F(t) - L^k) \right] - \left[L(kh) + h(F(t) - L(kh)) + L_{tt}(\xi_{k+1}) \frac{h^2}{2} \right] \\ &= aE_d^k + b_{k+1} \frac{h^2}{2} \quad \text{where } a=1-h \text{ \& } b_{k+1} = -L_{tt}(\xi_{k+1}) \end{aligned}$$

نفرض أن $|a|=1+h=r$ و أن $|b_{k+1}| < M_2 = M$. نستخدم تحليلاً مشابهاً لذلك المستخدم من أجل

$$\cdot |E_d^{k+1}| < r |E_d^k| + M \frac{h^2}{2} < r^k |E_d^0| + \frac{(r^k - 1)}{r-1} M \frac{h^2}{2} \quad \text{خوارزمية الفروق من المرتبة الأولى:}$$

$$\cdot |E_d^{k+1}| < \left[\left(1 + \frac{T}{K}\right)^k - 1 \right] M \frac{h^2}{2} \quad \text{نفرض أن } E_d^0 = 0 \text{ و أن } r = 1+h \text{ من أجل } h = \frac{T}{K} \text{ نحصل على}$$

عندما تزداد x فإن $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ تتقارب إلى e^a من الأسفل و بالتالي لدينا $\left(1 + \frac{T}{K}\right)^k < e^T$ و بالنتيجة

$$\cdot |E_d^{k+1}| < [e^T - 1] M \frac{h^2}{2} \quad \text{و بشكل مشابه يمكن إجراء تحليل الخطأ التراكمي. نلخص هذه النتائج في المبرهنة}$$

التالية التي تبين حل المعادلة التي من الشكل $L_t = f(t, L)$.

مبرهنة حد الخطأ (Error Theorem):

لنطبق الخوارزمية 1 على مسألة القيمة الابتدائية العامة (4). لنفرض أن مسألة القيمة الابتدائية تملك حلاً يقبل مشتقين متتاليين على المجال $[0, T]$. ليكن $f: [0, T] \times (-\infty, +\infty) \rightarrow R$ مستمراً و f_L المشتق بالنسبة للمتغير الثاني يحقق العلاقة التالية $|f_L| < \infty$. إذا كـ

$$\text{عندئذ } E_d^0 = E_r^0 = 0, h = \frac{T}{K}, \max |L_{tt}| < M; t \in [0, T], \max |R_t| < R$$

$$\cdot |E_d^{k+1}| < [e^T - 1] M \frac{h^2}{2} \quad \text{و } |E_r^{k+1}| < [e^T - 1] \frac{R}{h}$$

K تزداد (h تتناقص) عندئذ يستمر الخطأ التراكمي بالازدياد (النمو). إذا زدنا الدقة (تتناقص R) عندئذ يكون الخطأ ككل محدوداً بأزمة ثابتة h . دوناً في الجدول التالي أخطاء **Discretization** من أجل خوارزمية أولر و من أجل خوارزمية أولر - شبه المنحرف التي نصفها فيما بعد:

الجدول (3): أخطاء **Discretization**.

K	Euler Error	(Euler Error)/h	ETrap. Error	(ETrap. Err.)/h ²
100	18.29e-002	18.2863	3.035e-004	3.0350
200	9.12e-002	1.8248	7.587e-005	3.04e-002
300	6.08e-002	1.8420	3.372e-005	3.75e-002
400	4.56e-002	1.8229	1.897e-005	3.04e-002

نقدم فيما يلي خوارزمية لحل النموذج المعمم (4) باستخدام **Matlab** لتوضيح سلوك الحل مقارنة مع الحل التحليلي. تمثل هذه الخوارزمية تنفيذ طرائق أولر التقدمة و التراجعية و المعدلة لحل (4) لأجل $\Gamma = F(t)$.

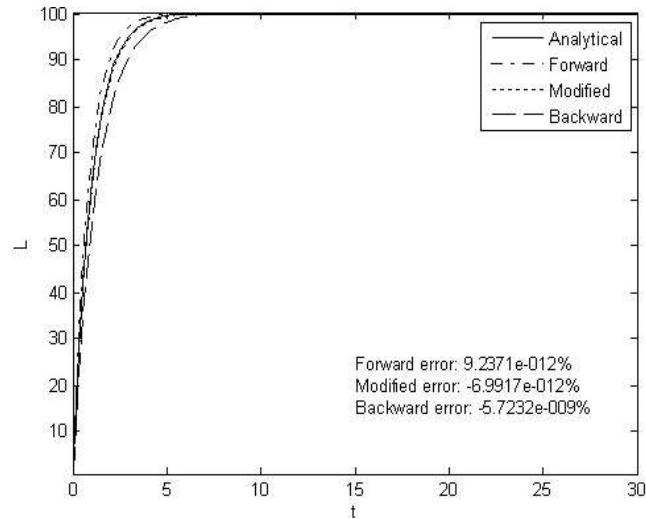
خوارزمية 4. تنفيذ طرائق أولر لحل النموذج المعمم (4) باستخدام **Matlab** لأجل $\Gamma = F(t)$.

Algorithm 4. Matlab Code for solving (4) using different Euler's methods.

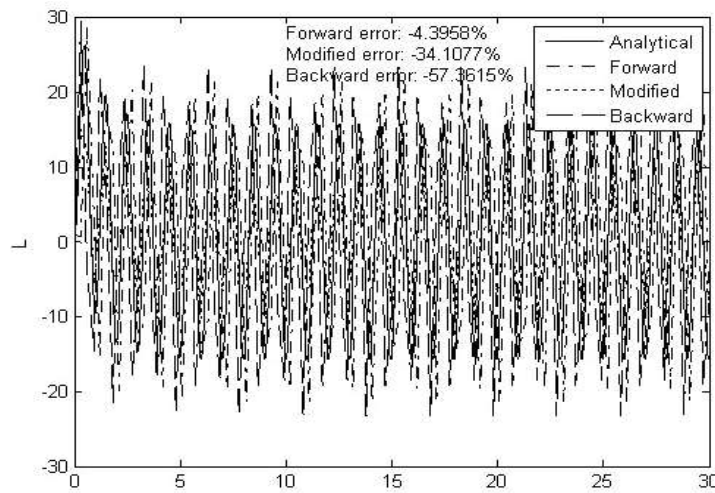
```
f=@(t,L) F(t)-L ;
% Calculate exact solution
g=@(t) (int_0^t F(s)e^s ds +1)e^-t ; (The exact solution of(4))
xe=[0:0.01:30];
ye=g(xe);
% Call functions
[x1,y1]=euler_forward(f,0,1,30,100);
[x2,y2]=euler_modified(f,0,1,30,100);
[x3,y3]=euler_backward(f,0,1,30,100);
% Plot
plot(xe,ye,'k-',x1,y1,'k-',x2,y2,'k:',x3,y3,'k--')
xlabel('t')
ylabel('L')
legend('Analytical','Forward','Modified','Backward')
axis([0 30 1 100])
% Estimate errors
error1=['Forward error: ' num2str(-100*(ye(end)-y1(end))/ye(end)) '%'];
error2=['Modified error: ' num2str(-100*(ye(end)-y2(end))/ye(end)) '%'];
error3=['Backward error: ' num2str(-100*(ye(end)-y3(end))/ye(end)) '%'];
error={error1;error2;error3};
text(15,20,error)
```

بتنفيذ الخوارزمية 4 من أجل الحالتين $\Gamma = 100 - L$ و $\Gamma = 100 \sin(2\pi t) - L$ نحصل على الشكل البياني الذي يمثل السلوك العددي لطرائق أولر مقارنة مع الحل التحليلي. يوضح الشكل (5) نتيجة هذا التنفيذ. بينما يوضح الجدول (4) الأخطاء الناتجة من تطبيق طرائق أولر على النموذج (4) و ذلك باستخدام الصيغة

$$\cdot Error = \frac{|L(k) - L_k|}{L(k)} \times 100$$



$$\Gamma = 100 - L$$



$$\Gamma = 100 \sin(2\pi t) - L$$

الشكل (5). سلوك النموذج (4) باستخدام طريقة أولر التقدمة و التراجعية و المعدلة و الحل التحليلي.

(I.2) مقارنة نتائج تنفيذ الخوارزمية 4 (Comparison of the Results).

النتائج المحسوبة موضحة بيانيا في الشكل (5) و مدونة في الجدول (4). لقد حصلنا على نتائج جيدة حتى من أجل قيم كبيرة نسبيا لحجم الخطوة و يمكن تحسين التقريب بتخفيض حجم الخطوة. وفقا للنتائج: الشكل (5) و الجدول (4) فإن جميع الطرائق تعطي نتائج جيدة جدا (أقل من 1% من الخطأ) مقارنة مع الحل التحليلي و خاصة أولر التقدمة و أولر المعدلة.

الجدول (4): مقارنة الحل الدقيق مع طرائق أولر عند $t = 15$ من أجل $\Gamma = 100 - L$.

h	Forward	Modified	Backward
0.01	9.2371e-012%	-6.9917e-012%	-0.57232e-009%

(II) خوارزمية أولر - شبه المنحرف (Euler-Trapezoid) باستخدام Matlab و Maple في الحالتين:

• دون طريقة نيوتن (Without Newton Method).

• مع طريقة نيوتن (With Newton Method).

تتقارب خوارزميتي أولر و أولر - شبه المنحرف بمعدلات تقارب مختلفة. تعتمد خوارزمية أولر - شبه المنحرف، التي يمكن أن تحسب حل معادلة تفاضلية بدقة من المرتبة الثانية، على قاعدة شبه المنحرف للتكامل العددي. لاحظ أنه يمكن كتابة $L_t = f(t, L)$ كما يلي:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} L_t dt = L((k+1)h) - L(kh) = \int_{kh}^{(k+1)h} f(t, L(t)) dt \quad (12)$$

يعطى الشكل المتقطع للمعادلة (12) بالصيغة التالية:

$$L^{k+1} - L^k = \frac{h}{2} f(kh, L^k) + f((k+1)h, L^{k+1}) \quad (13)$$

نلاحظ ظهور المجهول L^{k+1} على الطرف الأيمن للمعادلة (13). إنه تعقيد إضافي ينسب إلى خوارزمية أولر. نستخدم في الخوارزمية 6 إجراء بلغة Maple يدعى **fsolve** لإيجاد المجهول L^{k+1} . هناك فرقان هامان بين خوارزمية أولر و خوارزمية أولر - شبه المنحرف هما:

1. الأول: تملك خوارزمية أولر حد خطأ يتناسب مع h بينما تملك خوارزمية أولر - شبه المنحرف حد خطأ

يتناسب مع h^2 .

2. الثاني: في حالة أن f_L هو عدد سالب فإن حد الخطأ في خوارزمية أولر - شبه المنحرف محقق من أجل

جميع قيم k و ليس فقط من أجل جميع القيم بين 1 و K حيث $h = \frac{T}{K}$. هذا الفرق هام جدا عندما يكون f_L

عددا سالبا كبيرا.

خوارزمية 5: خوارزمية أولر - شبه المنحرف (Euler-Trapezoid's Algorithm)

1. Choose h
2. $L^0 = L(0)$
3. for $k = 1$ to $\max k$ do
 $oldf = f(kh, L(k))$
 Solve for $newL = L(k) + (h/2)(oldf + f((k+1)h, newL))$
 $L(k+1) = newL$
 end loop

نقدم فيما يلي خوارزمية بلغة Maple لتنفيذ خوارزمية أولر - شبه المنحرف التي استخدمنا فيها الإجراء **fsolve** لحل المسألة غير الخطية المتعلقة بكل خطوة تكرار. استخدمنا أيضا عددا مختلفا من أطوال الخطوات.

خوارزمية 6: خوارزمية بلغة Maple لتنفيذ خوارزمية أولر - شبه المنحرف مع الإجراء fsolve.

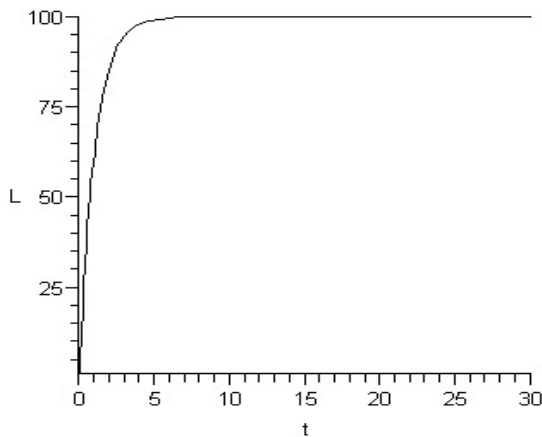
Maple Code for the Euler-Trapezoid Algorithm

Input Data:

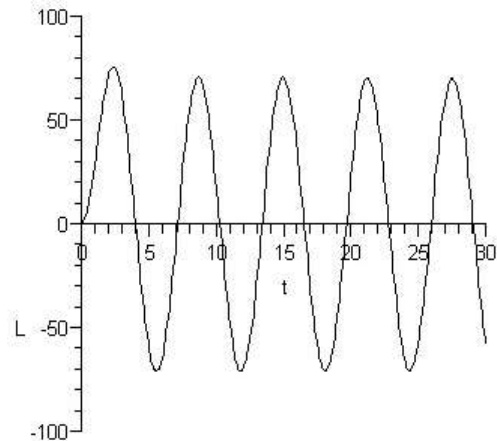
```

t:='t':
L:='L':
f:=(t,L)->(F(t)-L);
deq:=D(L)(t)= (F(t)-L);
t0:=0:
L0:=1:
T:=30:
K:=100:
init:=L(0)=1;
soln:=dsolve({deq,init});
LL:=unapply(rhs(soln),t);
p[0]:=plot(LL(t),t=0..30,L=1..100,color=red);
Procedure EULERT is Defined:
EULERT:=proc(f,t0,L0,T,K)
t(0):= t0:
h:=T/K:
L(0):= L0:
for k from 0 to K do
oldf:=f(t(k),L(k)):
t(k+1):= t(k) + h:
fsolve(x=L(k) + (h/2)(oldf + f(t(k+1),x)),x):
L(k+1):=x:
od:
end:
Output Data:
with(plots):
EULERT(f,0,1,30,100):
LL:=[seq([t(n),L(n)],n=0..100)]:
p[1]:=plot(LL(t),t=0..30,L=1..100,color=black);
display(p[0],p[1]);

```



$$\Gamma = 100 - L$$



$$\Gamma = 100 \sin(t) - L$$

الشكل (6). سلوك الحل العددي للنموذج (4) وفق الخوارزمية 6 مقارنة مع الحل التحليلي الموافق من أجل $h = 0.0001$. يتضح من الشكل (6) ومن الشكلين (1) و (2) أن خوارزمية أولر - شبه المنحرف قد تقاربت أسرع بكثير من خوارزمية أولر. نقدم فيما يلي خوارزمية باستخدام **Matlab** لتوضيح التقارب السريع لخوارزمية أولر - شبه المنحرف

للمنموذج المعمم (4). في هذه الخوارزمية خطوة الحل هي معادلة خطية بسيطة يسهل إيجاد حلها وبالتالي نتلافى حل معادلة غير خطية في كل خطوة تكرر في الخوارزمية 6 باستخدام Maple و هذا التطوير يفتح المجال واسعا أمام حل نماذج رياضية مشابهة ممثلة بمعادلات تفاضلية عادية.

$$\begin{aligned} newL &= L(k) + (h/2)(oldf + f((k+1)h, newL)) \\ &= L(k) + (h/2)((\Gamma - L(k)) + (\Gamma - newL)) \end{aligned}$$

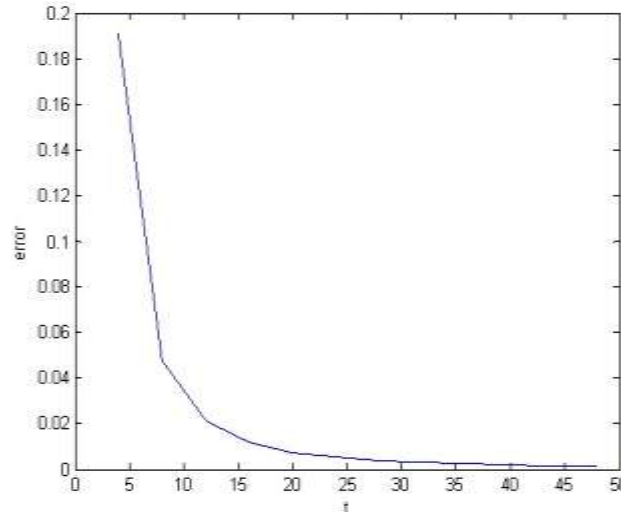
نحلها بالنسبة للمجهول نجد أن $newL = L(k) + (h/2) \frac{[2\Gamma - L(k)]}{1 + \frac{h}{2}}$. يمكن حساب الأخطاء العددية من

أجل قيم مختلفة لعدد نقاط التجزئة kk ($h = dt = \frac{T}{kk}$) في زمن يساوي 1 و نقارن الشكل الناتج الذي يبين الخطأ في خوارزمية أولر - شبه المنحرف مع الشكل المتعلق بالخطأ في خوارزمية أولر.

خوارزمية 7: خوارزمية بلغة Matlab لحساب الأخطاء العددية في خوارزمية أولر-شبه المنحرف لأجل $\Gamma = F(t)$.

Matlab Code for Learning Model (4)

```
clear;
i=0;
vec = zeros(12,1);
vect = zeros(12,1);
vecdt= zeros(12,1);
for kk=4:4:48
    T = 1.0;
    dt = T/kk;
    L0 = 1;
    gamma = F(t);
    Lk = L0;
    Lt = L0;
    for k = 1:kk
        Lk = Lk +dt*(gamma -Lk);
        Lex = The exact solution of (4)
        % when gamma =100, we set Lex= gamma + (L0 -gamma)*exp(-k*dt);
        Lt = (Lt +dt*gamma - dt*Lt/2)/(1+dt/2);
        error = abs(Lk - Lex);
        errorrt = abs(Lt - Lex);
    end
    i = i+1;
    vect(i) = errorrt;
    vec(i) = error;
    vecdt(i) = 1/dt;
end
plot(vecdt,vect)
```

الشكل (7). الخطأ في خوارزمية أولر- شبه المنحرف من أجل $\Gamma = 100$ و $h = 0.0001$ وفق الخوارزمية 7.

بمقارنة الشكلين (7) و (4) نجد أن خوارزمية أولر - شبه المنحرف أفضل بكثير من خوارزمية أولر لحل النموذج المعمم (4). مما سبق و عند تنفيذ خيارات أخرى وجدنا أن تنفيذ خوارزمية أولر-شبه المنحرف نفسه في Maple و Matlab و أن جميع الأخطاء تساوي الصفر من أجل $h = 0.0001$.
نقدم الآن تحليل الخطأ **Discretization** في خوارزمية أولر - شبه المنحرف للنموذج المعمم (4) باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى الموسعة مع العلاقة (1) و بالاستفادة من العلاقة (2) لدينا:

$$E_c^{k+1} = L^{k+1} - L((k+1)h) = \left[L^k + \frac{h}{2} [(\Gamma - L^k) + (\Gamma - L^{k+1})] \right] - \left[L(kh) + h(\Gamma - L^k) + L_t(\xi_{k+1}) \frac{h^2}{2} \right]$$

$$= \left(1 - \frac{h}{2} \right) E_c^k - \frac{h}{2} L^{k+1} + \frac{h}{2} L(kh) - L_t(\xi_{k+1}) \frac{h^2}{2}$$

نستخدم مبرهنة القيمة الوسطى

$$L((k+1)h) = L(kh) + L_t(\xi_{k+1})h \quad (14)$$

بإيجاد الحل بدلالة $L(kh)$ و التعويض في المعادلة (14) نجد أن:

$$E_c^{k+1} = \left(1 - \frac{h}{2} \right) E_c^k - \frac{h}{2} E_c^{k+1} - (L_t(\xi_{k+1}) + L_t(\xi_{k+1})) \frac{h^2}{2}$$

$$\left(1 + \frac{h}{2} \right) E_c^{k+1} = \left(1 - \frac{h}{2} \right) E_c^k - (L_t(\xi_{k+1}) + L_t(\xi_{k+1})) \frac{h^2}{2} \quad (15)$$

$$E_c^{k+1} = aE_c^k + b ; a \equiv \frac{\left(1 - \frac{h}{2} \right)}{\left(1 + \frac{h}{2} \right)} < 1 , \quad |b| \equiv \frac{-1}{\left(1 + \frac{h}{2} \right)} (L_t(\xi_{k+1}) + L_t(\xi_{k+1})) \frac{h^2}{2} < M \frac{h^2}{2}$$

نستخدم ثانياً التعويض التراجعي فنجد:

$$|E_c^{k+1}| \leq a |E_c^k| + M \frac{h^2}{2} \leq a^{k+1} |E_c^0| + (a^k + \dots + 1) M \frac{h^2}{2} \leq a^{k+1} |E_c^0| + \frac{1-a^{k+1}}{1-a} M \frac{h^2}{2}$$

لنفرض أن $E_c^0 = 0$ و نستخدم حقيقة أن $a < 1$ لنستنتج أن:

$$|E_c^{k+1}| \leq \frac{1}{1-a} M \frac{h^2}{2} \quad (16)$$

مبرهنة: (حد الخطأ في خوارزمية أولر - شبه المنحرف)

لنطبق خوارزمية أولر - شبه المنحرف على النموذج المعمم (4). و لنفرض أن h مثبتة و أن $E_c^0 = 0$. إذا كان المشتق الأول والثاني محدودين و كانت M و a معرفة كما هو مبين في (15) عندئذ فإن (16) محققة من أجل جميع قيم k .

خوارزمية نيوتن (Newton's Algorithm) في خوارزمية أولر - شبه المنحرف [2]

خوارزمية نيوتن هي إحدى الطرائق العددية الهامة جدا لأنها تحت شروط مناسبة تملك خواص التقارب الموضوعي (Local convergence) و التقارب التربيعي (Quadratic convergence) لتابع بمتغير وحيد. التقارب الموضوعي (Local convergence): يعني أنه إذا كان الحل الابتدائي (Initial guess) قريباً بقدر كاف من الجذر فإن الخوارزمية تتقارب إلى الحل. التقارب التربيعي (Quadratic convergence): يعني أن الخطأ في الخطوة التالية يتناسب مع مربع الخطأ في الخطوة الحالية. بما أن النموذج المدروس هو من شكل النقطة الثابتة $x = g(x)$ أو جذر للمعادلة $f(x) = 0$ حيث f أو g هي توابع معطاة، تصاغ خوارزمية نيوتن (Newton's algorithm) من أجل مسألة الجذر (The root problem) إلا أن مسألة النقطة الثابتة فيمكن صياغتها كمسألة جذر بأن نعرف $f(x) = x - g(x)$. الفكرة من خوارزمية نيوتن هي أن نقرب التابع $f(x)$ في نقطة معطاة بخط مستقيم. عندئذ نجد جذر المعادلة المرتبطة بهذا الخط المستقيم. يمكن أن نستمر بالمتابعة بالتكرارات في هذه الطريقة حتى نصل إلى تفاوت طفيف في الجذور التقريبية.

تعطى الصيغة التكرارية لإيجاد جذور معادلة $f(x) = 0$ وفق خوارزمية نيوتن بالصيغة

$$x^{m+1} = x^m - \frac{f(x^m)}{f'(x^m)}$$

هناك معياري توقف مألوفين لخوارزمية نيوتن هما:

الخطأ الأول: هو خطأ القيمة المطلقة المشترك (The common absolute error) الذي يتطلب تكرارين

متتاليين لتقريبه.

الخطأ الثاني: يقاس كم سيكون التابع قريباً من الصفر.

خوارزمية 8: خوارزمية نيوتن (Newton's Algorithm)

1. Choose $xold$, $eps1 > 0$ & $eps2 > 0$
 2. for $m = 1$ to $maxit$
 - $xnew = xold - f(xold)/f'(xold)$
 - if $|xnew - xold| < eps1$ & $|f(xnew)| < eps2$ go to end
 - $xold = xnew$
- End loop

خوارزمية 9: خوارزمية نيوتن في خوارزمية أولر - شبه المنحرف

Newton's Algorithm for Euler-Trapezoid's Algorithm

```

for m = 1 to maxit
    F = L(k) + (h / 2)(oldf + f((k + 1)h, oldL)) - oldL
    FP = (h / 2) f_L((k + 1)h, oldL) - 1
    newL = oldL - F / FP
    if |oldL - newL| < eps go to end
    oldL = newL
End loop

```

نعرض فيما يلي خوارزمية أولر - شبه المنحرف مع خوارزمية نيوتن باستخدام **Maple** لحل مسألة النقطة الثابتة في كل خطوة تكرار :

خوارزمية 10: خوارزمية أولر شبه المنحرف بلغة Maple لتنفيذ الخوارزمية 9.

Maple Code for Euler-Trapezoid's Algorithm with Newton Solver

```

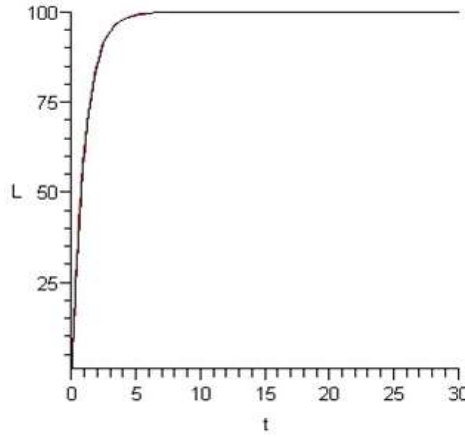
deq:=D(L)(t)=F(t)-L(t);
init:=L(0)=1;
soln:=dsolve({deq,init});
LL:=unapply(rhs(soln),t);
p[0]:=plot(LL(t),t=0..30,L=1..100,color=red):
t:='t':
L:='L':
f:=(t,L)->F(t)-L;
fp:=(t,L)->-1;
t0:=0:
L0:=1:
T:=30:
K:=100:
EULERTN:=proc(f,fp,t0,L0,T,K)
t(0):= t0:
h:=T/K:
L(0):= L0:
eps:=0.000001:
maxm:= 500:
for k from 0 to K do
    oldf:=f(t(k),L(k)):
    oldL:=L(k):
    t(k+1):= t(k) + h:
    test:=1:
    for m from 1 to maxm while(test > eps) do
        F:=L(k)+(h/2)*(oldf+f(t(k+1),oldL))-oldL:
        FP:=(h/2)*fp(t(k+1),oldL)-1:
        newL:=oldL-F/FP:
        test:=abs(oldL-newL):
        oldL:=newL:
    od:

```

```

L(k+1):=newL:
od:
end:
with(plots):
EULERTN(f,fp,0,1,30,100):
LLL:=seq([t(n),L(n)],n=0..100):
p[1]:=plot(LLL(t),t=0..30,L=1..100,color=black);
display(p[0],p[1]);

```



الشكل (11). سلوك الحل العددي للنموذج (4) وفق الخوارزمية 10 و الحل التحليلي من أجل $h = 0.0001$ ولأجل $\Gamma = 100$.

نبين فيما يلي الخطأ الناتج من تطبيق الخوارزمية 10 لإيجاد الحل العددي للنموذج (4) مقارنة مع الحل التحليلي من أجل $h = 0.0001$ باستخدام Maple. يتضح من الجدول أن أداء طريقة أولر-شبه المنحرف منافس قوي لطريقة أولر مقارنة مع الحل التحليلي.

الجدول (5). الخطأ الناتج من تطبيق الخوارزمية 10 لإيجاد الحل العددي للنموذج (4)

مقارنة مع الحل التحليلي من أجل $h = 0.0001$ باستخدام Maple.

Model	Exact	trap-Euler	Error
$100 - L$	100.00	99.999999999	1e-009
$100 \sin t - L$	-57.1142	-57.1142	0.00
$\sin t - L$	-0.5711	-0.5711	0.00
$100 \sin(2\pi t) - L$	-15.5223	-15.5223	0.00

نعلم أن $g(x) = \frac{x - f(x)}{f'(x)}$ و لنبين أن $|g'(x)| < 1$ كما يلي:

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = f(x) \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \quad (17)$$

إذا كانت \bar{x} حلاً للمسألة $f(\bar{x}) = 0$ و كان $f(x)$ مستمراً فإننا يمكن أن نجعل $f(x)$ صغيراً بالقدر الذي نريد باختيار x قريباً من \bar{x} . ففي (17) إذا كان $\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}$ محدوداً عندئذ سيكون $g(x)$ خزولاً (Contractive) من أجل x في جوار \bar{x} .

(4) تجارب محاكاة عددية إضافية لحل النموذج (4) في حالة Γ متغيرة.

أجرينا في هذه الفقرة تنفيذات عددية عديدة لطرائق عددية مختلفة بلغة **Matlab** لتوضيح سلوك الحل العددي للنموذج (4) مقارنة مع الحل التحليلي و لتحديد القيمة المثلى لطول الخطوة h . وجدنا من التجارب العددية التي أجريناها لحل النموذج (4) من أجل جميع حالات Γ أن القيمة المثلى لطول الخطوة هي $h = 0.0001$. الطرائق العددية التي درسناها في هذه الفقرة كانت طريقة أولر المعدلة ، rk4 (طريقة رانج - كوتا من المرتبة الرابعة) ، rk23 ، Embedded rk ، rk2 ، rk45 ، مقارنة مع الحل التحليلي. دونا النتائج في الجدولين التاليين:

الجدول (6). الخطأ الناتج من إيجاد الحل العددي للنموذج (4) وفق الطرائق العددية أولر المعدلة ، rk23 ، rk2 ، rk4 ، rk45 ، Embedded rk مقارنة مع الحل التحليلي من أجل $h = 0.0001$ باستخدام **Matlab**.

method		100-L	sint -L	100sint-L	100sin2 π t-L
Mod. Eul.	Sol.	100.00	-0.5711	-57.1141	-15.5223
	Error	-1e-0010	3.5e-009	1e-008	0.00
rk23	Sol.	99.999999998	-0.5267	-57.1142	-15.5223
	Error	2e-0010	0.00	0.00	0.00
rk45	Sol.	99.999999999	-0.5711	-57.1142	-15.5223
	Error	1e-0010	0.00	0.00	0.00
Embedded rk	Sol.	99.999999999	-0.5711	-57.1142	-15.5223
	Error	1e-0010	9e-0010	0.00	0.00
rk4	Sol.	99.999999997	-0.5711	-57.1142	-15.5223
	Error	3.e-009	0.00	0.00	0.00
rk2	Sol.	99.999999697	-0.5711	-57.1142	-15.5223
	Error	3.03e-007	0.00	0.00	0.00
Exact Sol.	Solution	100.0000	-0.5711	-57.1142	-15.5223

الاستنتاجات و التوصيات:

في هذه المقالة، قدمنا النموذج الرياضي المعمم لتعلم مشكلة الموصوف في [3]. درسنا سلوك الخطأ و التقارب لطريقتين عدديتين هما خوارزمية أولر و خوارزمية أولر - شبه المنحرف بتطبيقهما على النموذج الرياضي الناتج. لتوضيح سلوك الحل و الخطأ طبقنا هاتين الخوارزمتين على النموذج المعمم باستخدام **Maple** و **Matlab**. طورنا برمجيات لتنفيذ الخوارزمتين المدروستين لحل النموذج المعمم. وجدنا عددياً أن القيمة المثلى لطول الخطوة هي $h = 10^{-4}$ و أن الخطأ المطلق الموافق يساوي الصفر. علاوة على ذلك، أجرينا تجارب محاكاة عديدة لطرائق عددية مختلفة. كانت أفضل هذه الطرائق Modified Euler ، Embedded rk ، rk45 ، rk4 ، rk23 ، rk2 (حيث rk هي اختصاراً من Runge-Kutta). تبين من التجارب العددية أن القيمة المثلى لطول الخطوة هي أيضاً $h = 10^{-4}$. أخيراً، أجرينا تحسيناً هاماً على خوارزمية أولر - شبه المنحرف يتلخص بتقادي حل معادلة غير خطية

في كل خطوة تكرر عند تنفيذها باستخدام Maple دون الاعتماد على الإجراء fsolve. هذا التطوير يفتح المجال واسعا أمام خوارزمية أولر-شبه المنحرف في حل المعادلات التفاضلية لأن التقارب في خوارزمية أولر - شبه المنحرف هو تريبيعي. أخيرا، نوصي بتطبيق جميع الطرائق المدروسة في هذه المقالة في حل نماذج رياضية مشابهة للنموذج المدروس من أجل $h = 10^{-4}$.

المراجع:

- [1] SCHIESSER W. E. *Computational Mathematics in Engineering and Applied Science: ODE's, DAE's, and PDE's*, 3rd edition, CRC Press, Boca Raton, Finland, 1994, 736.
- [2] BURDEN L. R. and FAIRES J. D. *Numerical Analysis*, 8th edition, Thomson Brooks/Cole, United States, 2005, 847.
- [3] AL-KURDI A. H. *Mathematical Model for Learning of Problem*, R. J. of Aleppo Univ., Basic Sciences Series, Aleppo, 2007, accepted.