مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (3) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (3) 2008

العلاقة بين المجموعات المحدبة إحداثياً والمجموعات النجمية في R^3

الدكتور عدنان ظريف *
الدكتور سهيل محفوض**
براءة عفيصة ***

(تاريخ الإيداع 11 / 6 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/8/27)

□ الملخّص □

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها محدبة إحداثياً إذا وفقط إذا كان تقاطع أيٍّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX, oY, oZ مع المجموعة عبارة عن مجموعة محدبة.

ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد أيضاً إنها مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة حيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a, x]$ من أجل كل x من A واقعة في A وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجمية بالنسبة للنقطة a ،وإن جميع نقاط المجموعة A مرئية ضمن A من النقطة a .

في هذا البحث سوف نبرهن مجموعة من المبرهنات والنتائج من أهمها:

1. إذا كانت A مجموعة محدبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد عندئذ تكون المجموعة A اجتماعاً لست مجموعات نجمية إذا و فقط إذا وجد في A ست نقاط a, b, c, d, e, f حيث تكون كل نقطة من A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a, b, c, d, e, f على الأقل.
2. كل مجموعة محدبة هي مجموعة محدبة إحداثياً، ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.
3. ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة إحداثياً مجموعة نجمية بالنسبة لنقطة ما.

الكلمات المفتاحية :المجموعة المحدبة ،المجموعة المحدبة إحداثياً ،المجموعة النجمية ،المجموعة المتراصة،المجموعة أحادية الترابط ،نقطة مرئية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
*** طالبة دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (3) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (3) 2008

The Relationship between Coordinate Convex and Star-shaped Sets in R^3

Dr. A.Zarif *
Dr. S.Mahfod **
Bara'a Afisa **

(Received 11 / 6 / 2008. Accepted 27/8/2008)

☐ ABSTRACT ☐

Let A be a set in R^3. A is said to be a coordinate convex set if and only if any parallel line to any coordinate axes oX , oY , oZ was intersected with A is convex set A is called a star-shaped set, if and only if ,there exists a points in A as (a) ,such that ,every line segment[a, x] for all $x \in A$ lies in A, in this case this set is star-shaped with respect to (a) ,and every point in A was visible via A from a.

In this paper we will prove a set of theorems, some of which are:

1) -If the set A is coordinate convex in the Euclidean space (R^3) then: The set A is union of six star-shaped sets, if and only if, there exists a point in the set A six points as a, b, c, d, e, f , so that , each point in A would be visible via A from a, b , c, d, e, f at least .

2)-Each convex set is coordinate convex set, but the opposite in general is not true

3) –It is not necessary for each coordinate convex to be a star-shaped set.

Key Words: Convex set, coordinate convex set, star-shaped set, compact set, connected set, visible point.

*Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها مجموعة نجمية بالنسبة للنقطة a إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة بحيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل x من A واقعة في A وعندئذ يقال إن جميع نقاط المجموعة A مرئية ضمن A من النقطة a.

ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها مجموعة محدبة إذا وفقط إذا كانت $[x,y]\subset A$ مهما تكن $x,y\in A$. (الرمز $[x,y]$ يعني القطعة المستقيمة التي طرفاها x,y)

كما ويقال عن A في نفس الفضاء بأنها مجموعة محدبة إحداثياً إذا وفقط إذا كان تقاطع أيٍّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX,oY,oZ مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y ضمن A . رؤية خطية . إذا وفقط إذا كانت $[x,y]\subset A$.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y بوضوح ضمن A إذا وجدت مجاورة لـ y في R^3 مثل N ، حيث إن النقطة x ترى ضمن A المجموعة $N\cap A$.

إن مسألة إيجاد الشروط اللازمة والكافية لكون مجموعة متراصة ما في الفضاء R^n اجتماعاً منتهياً لمجموعات نجمية، تلعب دوراً في غاية الأهمية في نظرية المجموعات النجمية .وهذا ما جعل الكثير من الباحثين يهتمون بدراستها ،فقد تمت دراسة هذه المسألة في حالات كثيرة في المستوي الإقليدي سواءً في حالة المفهوم الخطي للنجمية أو في حالة المفهوم المتري لها ،وذلك في الأعمال التالية:

.[17] – [16]– [15]– [13]–[12]–[11]–[10]–[9] –[3] – [1]

أما في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ،فتمت دراستها في العمل [8] من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين بإضافة شرط الرؤية بوضوح ،وفي العمل [14] تم التوصل إلى أنها غير محققة حتى في حالة اجتماع مجموعتين نجميتين في حالة الرؤية الخطية العادية .

ونحاول الآن دراسة هذه المسألة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد بإضافة شرط على المجموعة المدروسة في حالة الرؤية العادية ، أما في هذا البحث سندرس بعض العلاقات والمبرهنات التي تربط بين مفهوم المجموعة المحدبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ومفهوم المجموعة النجمية وكذلك المجموعة المتراصة .

أهمية البحث و أهدافه:

هذا البحث يسلط الضوء على المجموعات المحدبة إحداثياً والمجموعات النجمية في الفضاء ثلاثي البعد. ودراسة العلاقات بين هذه المجموعات من جهة وبينها وبين المجموعات المتراصة من جهة أخرى.

طريقة البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم نجمة نقطة أو المجموعة النجميّة بالنسبة للنقطة والمفهوم الخطي للرؤية.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة(1):

إن أية مجموعة محدبة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد (R^3,d) هي مجموعة محدبة إحداثياً.

البرهان:

لتكن A مجموعة محدّبة كيفية في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد (R^3,d) عندئذ نجد أنّ:

$$[x,y]\subset A \quad ;\forall x,y\in A$$

إذا كان l_1 مستقيماً كيفياً يمر من A ويوازي $0X$ فإنّ :

$$A\cap l_1=[x,y]\subset A \quad ;\forall x,y\in A \quad \&[x,y]\ //\ oX$$

وذلك لكون A مجموعة محدّبة .

وبما أنّ القطعة المستقيمة هي مجموعة محدّبة ، فإنّ $A\cap l_1$ مجموعة محدّبة .

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ l_1 من أسرة المستقيمات L التي توازي $0X$وتمر من A نجد أنّ:

$$A\cap l=k \qquad (1) \qquad (\text{حيث } k \text{ مجموعة محدّبة من أجل كلّ } l\in L)$$

وبالطريقة نفسها نبرهن أنّ تقاطع A مع أيّ مستقيم يوازي oY و oZهو مجموعة محدّبة أي:

$$A\cap l^{'}=k^{'} \qquad (2) \qquad \& A\cap l''=k'' \qquad (3)$$

حيث k' مجموعة محدّبة من أجل كلّ l' من L' & L' أسرة كلّ المستقيمات التي توازي oY وتمرّ من A.

& k'' مجموعة محدّبة من أجل كلّ l'' من L'' & L'' أسرة كلّ المستقيمات التي توازي oZ وتمرّ منA.

من (1) و(2) و(3) نجد أنّ A مجموعة محدّبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد (R^3,d). □

نتيجة(1):

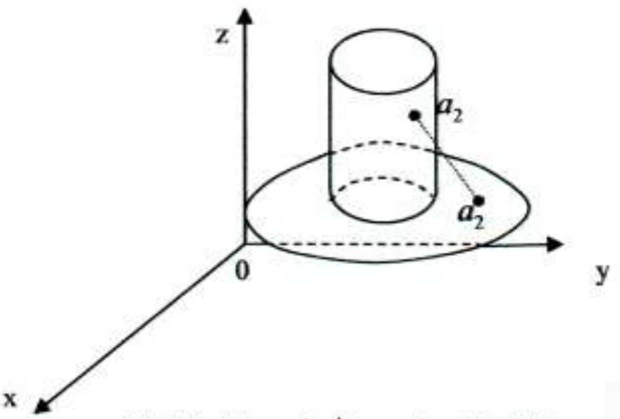
إنّ عكس المبرهنة (1)غير صحيح بصورة عامّة أي أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة إحداثياً في R^3 مجموعة محدبة .

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (1):

لتكن $A\subseteq R^3$ المجموعة المبينة بالشكل (1) هذه المجموعة محدبة إحداثياً في R^3 لأن أي مستقيم موازٍ لأي من المحاور الإحداثية يتقاطع مع هذه المجموعة بقطعة مستقيمة والقطعة المستقيمة هي مجموعة محدبة.

ولكن كما نلاحظ من الشكل (1)أن هذه المجموعة ليست محدبة في R^3 لأنه توجد : $a_1,a_2\in A$ بحيث أن $[a_1,a_2]\not\subset A$.



الشكل (1):يبين المجموعة A المدروسة في المثال (1)

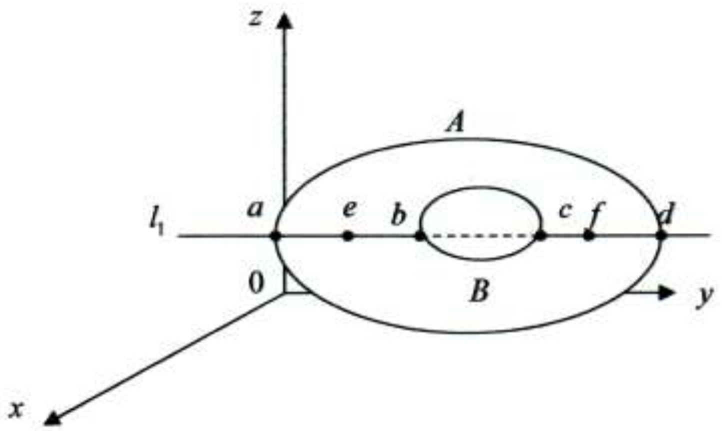
مبرهنة(2):

كل مجموعة متراصة ومحدّبة إحداثياً هي مجموعة أحادية الترابط في R^3 .

البرهان :

لتكن $A \subset R^3$ مجموعة متراصّة ومحدّبة إحداثياً ولنفرض جدلاً أنّ A ليست أحادية الترابط، فهذا يعني أنّه توجد مركّبة محدودة واحدة على الأقلّ لـ $A \setminus R^3$ مثل B

انظر الشكل (2)



الشكل (2):يبين المجموعة A المدروسة في المبرهنة (2)

ولنأخذ المستقيم l_1 الموازي للمحور oX والذي يتقاطع مع A ومع B أيضاً عندئذ نجد أنّ: $l_1 \cap A = [a,b] \cup [c,d] \subset A$ ولكنّ المجموعة $D = [a,b] \cup [c,d]$ ليست محدّبة لأنّنا نستطيع إيجاد $e, f \in D$ حيث تكون $[e, f] \not\subset A$ لأنّ $[e, f] \cap B \neq \phi$ وهذا تناقض مع كون المجموعة A محدّبة إحداثياً وبذلك تكون المجموعة A أحادية الترابط . □

إن دراسة العلاقة بين المجموعات النجمية والمجموعات المحدبة إحداثياً والمجموعات المتراصة قادتنا إلى أهم النتائج الآتية:

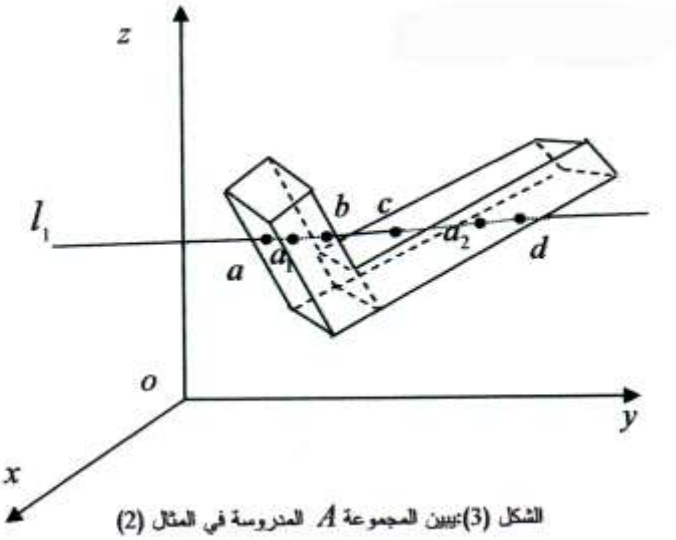
نتيجة(2):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة متراصة محدبة إحداثياً.

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (2):

لتكن المجموعة $A \subseteq R^3$ المبينة بالشكل (3).



الشكل (3):يبين المجموعة A المدروسة في المثال (2)

كما نلاحظ من الرسم أن A مجموعة مغلقة ومحدودة $\Leftarrow$ A مجموعة متراصة.

ولكن :

$$\exists l_1 : l_1 \;//\, oY \quad \& \quad l_1 \cap A = B$$

حيث : $B = [a,b] \cup [c,d]$

وكما نلاحظ أن B ليست مجموعة محدبة لأننا نستطيع إيجاد :

$a_1 \in [a,b] \;\; \& \;\; a_2 \in [c,d]$ بالتالي : $a_1, a_2 \in B$ مع كون $[a_1, a_2] \not\subset B$

وبهذه الحالة وجدنا مستقيماً l_1 موازياً للمحور الإحداثي oY وتقاطعه مع المجموعة A مجموعة غير محدبة لذا فإن المجموعة A ليست محدبة إحداثياً.

نتيجة(3):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة إحداثياً متراصة.

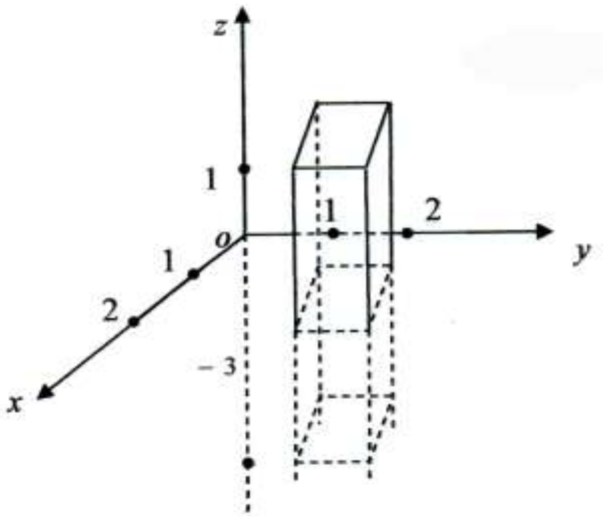
ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (3):

لتكن المجموعة $A \subset R^3$ الآتية :

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \in R^3 \;\; : 1 \le x \le 2 \;\& 1 \le y \le 2 \\ \& -3 < z \le 1 \end{array} \right\}$$

المبينة بالشكل(4)



الشكل (4):يبين المجموعة A المدروسة في المثال (3)

سنبرهن أن هذه المجموعة هي مجموعة محدبة إحداثياً:

ليكن l_1 مستقيماً موازياً للمحور الإحداثي oX ومارّاً بالمجموعة A .عندئذ فإن:

$$A \cap l_1 = [a,b]$$

بحيث أن $a \in B$ حيث

$B = \{(1, y, z) \in R^3 : 1 \le y \le 2 \ \& \ -3 \le z \le 1\}$ و $a \in C$ حيث أن:

$C = \{(2, y, z) \in R^3 : 1 \le y \le 2 \ \& \ -3 \le z \le 1\}$ مع كون $[a,b] \ // \ oX$.

وبمراعاة الاختيار الكيفي للمستقيمات التي توازي oX وتتقاطع مع A فإننا نجد أن تقاطع أي مستقيم من هذه المستقيمات مع المجموعة A سوف يكون قطعة مستقيمة وبالتالي مجموعة محدبة .

وبالطريقة نفسها نبرهن أن تقاطع المجموعة A مع أي مستقيم موازٍ للمحور oY سيكون مجموعة محدبة (قطعة مستقيمة أيضاً).وأن تقاطعها مع أي مستقيم موازٍ للمحور oZ سيكون مجموعة محدبة (هنا المجموعة المحدبة عبارة عن نصف مستقيم).وبالتالي A مجموعة محدبة إحداثياً .

وكما هو واضح من الرسم أن المجموعة A مجموعة غير مغلقة وهذا يعني أن A ليست متراصة .فهذا المثال يؤكد على أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدّبة إحداثياً مجموعة متراصة .

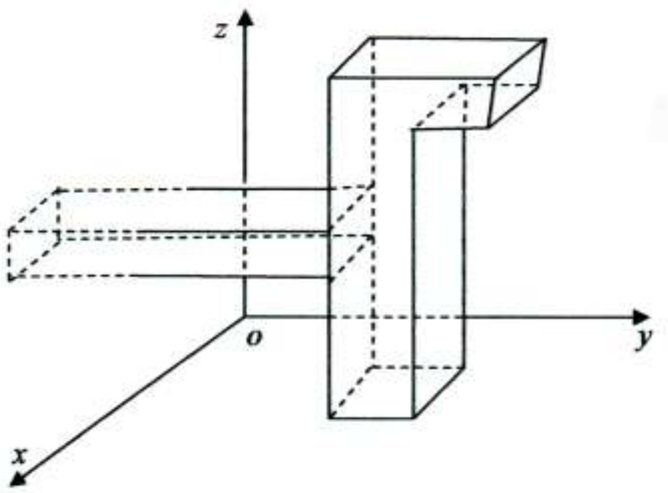
نتيجة(4):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدّبة إحداثياً مجموعة نجميّة بالنسبة لنقطة ما من نقاطها.

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (4):

لتكن لدينا $A \subset R^3$ المبينة بالشكل(5).



الشكل (5)يبين المجموعة A المدروسة في المثال (4)

" A عبارة عن الحيز من الفراغ المكون من اجتماع ثلاثة متوازيات مستطيلات أوجهها توازي المستويات الإحداثية " إن المجموعة Aمجموعة محدبة إحداثياً لأن أي مستقيم موازٍ لأي من المحاور الإحداثية ومار منها سوف يتقاطع معها بمجموعة محدبة (وهنا هي قطعة مستقيمة).ولكن نلاحظ من الشكل (5) أنه لاتوجد نقطة مثل $x_0 \in A$ بحيث أن $[x_0, x] \subset A$ مهما تكن $x \in A$.وهذا يعني أن A ليست نجمية.

وهذا المثال يؤكد على أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدّبة إحداثياً مجموعة نجمية .

نتيجة(5):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة نجميّة بالنسبة لنقطة ما من نقاطها مجموعة محدّبة إحداثياً.

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

المثال (5):

إن أبسط مثال يوضح هذه النتيجة أن نأخذ كرة مركزها الصفر محذوفاً منها أحد أنصاف الأقطار المنطبق على أحد المحاور الإحداثية.

كما نلاحظ أن هذه المجموعة نجمية بالنسبة لمركزها ولكنها ليست محدبة إحداثياً.

نتيجة(6):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة متراصة وأحادية الترابط مجموعة محدّبة إحداثياً في R^3 .

والمثال (2) يوضح ذلك.

حيث نلاحظ أن المجموعة A متراصة لأنها مغلقة ومحدودة ،وأحادية الترابط لأن متممتها في R^3 تملك مركبة مترابطة واحدة. ووجدنا أنها ليست محدبة إحداثياً في R^3 .

نتيجة(7):

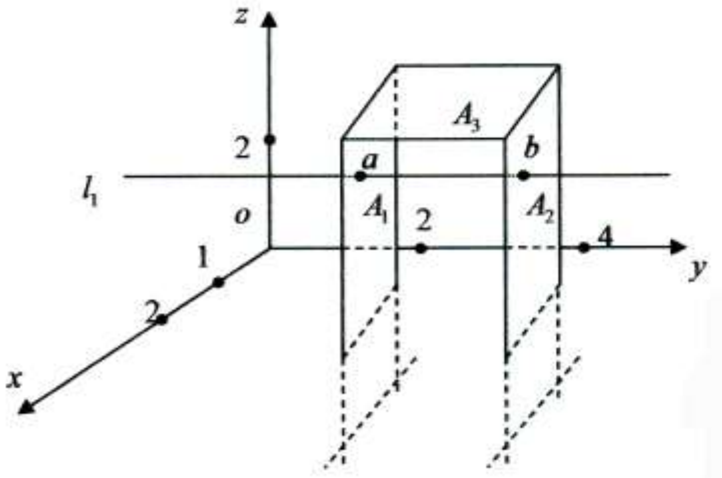
ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة أحادية الترابط مجموعة محدّبة إحداثياً في R^3 .

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (6):

لتكن المجموعة $A \subset R^3$ الآتية :

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$



الشكل (7)يبين المجموعة A المدروسة في المثال (6)

المبينة بالشكل(7). حيث أن:

$$A_1 = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \in R^3 : 1 \le x \le 2 \ \& \\ y = 2 \ \& \ z \le 2 \end{matrix} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \in R^3 : 1 \le x \le 2 \ \& \\ y = 4 \ \& \ z \le 2 \end{matrix} \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \in R^3 : 1 \le x \le 2 \ \& \\ 2 \le y \le 4 \ \& \ z = 2 \end{matrix} \right\}$$

إن هذه المجموعة مجموعة أحادية الترابط لأن متممتها في R^3 تملك مركبة مترابطة واحدة . ولكنها ليست محدبة إحداثياً لأننا نستطيع إيجاد المستقيم l_1 الموازي للمحور الإحداثي oY والمتقاطع مع A بالنقطتين $a \in A_1 \ \& \ b \in A_2$ ونلاحظ أن $[a,b] \not\subset A$ فهذا يعني أن المجموعة الناتجة عن التقاطع ليست مجموعة محدبة ،بالتالي A ليست محدبة إحداثياً.

نتيجة(8):

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدّبة إحداثياً مجموعة أحادية الترابط في R^3 .

ونوضّح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (7):

لنأخذ المجموعة A المكونة من مجموع (اجتماع) الكرتين:

$$x^2+y^2+z^2 \le 1$$
$$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2 \le 1 \quad ; r \ge 2.$$

مبرهنة(3):

إذا كانت A مجموعة محدبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد (R^3,d) عندئذ : تكون المجموعة A اجتماعاً لست مجموعات نجمية إذا و فقط إذا وجد في A ست نقاط a,b,c,d,e,f حيث تكون كل نقطة من A مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c,d,e,f على الأقل.

البرهان :

***برهان لزوم الشرط* :**

لنفرض أنّ A تكتب بالشكل الآتي : $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$ (1)

حيث إنّ A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 مجموعات نجمية في R^3.

$\forall x\in A \Rightarrow \quad x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$ {وذلك من (1)} .

وهذا يعني أنّ :

$$\begin{aligned}
&either\ \ x\in A_1\ \&\ \text{نجمية}\ A_1 \Rightarrow \exists a\in A_1:[a,x]\subset A_1\subset A\\
&or\ \ x\in A_2\ \&\ \text{نجمية}\ A_2 \Rightarrow \exists b\in A_2:[b,x]\subset A_2\subset A\\
&or\ \ x\in A_3\ \&\ \text{نجمية}\ A_3 \Rightarrow \exists c\in A_3:[c,x]\subset A_3\subset A\\
&or\ \ x\in A_4\ \&\ \text{نجمية}\ A_4 \Rightarrow \exists d\in A_4:[d,x]\subset A_4\subset A\\
&or\ \ x\in A_5\ \&\ \text{نجمية}\ A_5 \Rightarrow \exists e\in A_5:[e,x]\subset A_5\subset A\\
&or\ \ x\in A_6\ \&\ \text{نجمية}\ A_6 \Rightarrow \exists f\in A_6:[f,x]\subset A_6\subset A
\end{aligned}$$

وهذا يعني وجود ست نقاط في A a,b,c,d,e,f بحيث تكون النقطة x الكيفية من A مرئيّة ضمن A من إحدى هذه النقاط وقد تكون النقطة x مرئيّة من أكثر من نقطة من هذه النقاط في حال انتمت x إلى أكثر من مجموعة من المجموعات A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 . □

***برهان كفاية الشرط*:**

بفرض وجود ست نقاط في A a,b,c,d,e,f بحيث تكون كلّ نقطة من A مرئيّة ضمن A من إحدى النقاط a,b,c,d,e,f على الأقلّ . ولنضع :

$$A_1:=\{x\in A:[a,x]\subset A\} \quad \& \quad A_2:=\{x\in A:[b,x]\subset A\}$$
$$A_3:=\{x\in A:[c,x]\subset A\} \quad \& \quad A_4:=\{x\in A:[d,x]\subset A\}$$
$$A_5:=\{x\in A:[e,x]\subset A\} \quad \& \quad A_6:=\{x\in A:[f,x]\subset A\}$$

نلاحظ أنّه بحسب تعريف المجموعة A_1 تكون A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a لأنّه أيّاً كان x من A_1 فإنّ $[a,x]\subset A_1$. وبالطريقة نفسها نجد أنّ A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 مجموعات نجمية بالنسبة لـ b,c,d,e,f على الترتيب .

ولكي يتمّ المطلوب يجب أن نبرهن أنّ: $\boxed{A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6}$

من تعريف المجموعات $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ نلاحظ أنّ:

وبالتالي يكون: $A_1 \subset A \,\&\, A_2 \subset A \,\&\, ... \,\&\, A_6 \subset A$

$$\boxed{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \subset A} \qquad \boxed{1}$$

ومن جهة أخرى :

لدينا من الفرض أنّه أيّاً كانت x من A فإنّ xستكون مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c,d,e,f على الأقلّ أي أنّ :

$$\begin{aligned}
&either\ [a,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_1 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&or\ [b,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_2 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&or\ [c,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_3 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&or\ [d,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_4 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&or\ [e,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_5 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\
&or\ [f,x] \subset A \ \Rightarrow x \in A_6 \quad \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6
\end{aligned}$$

كما نجد أنّ $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ في حال كانت x مرئية من أكثر من نقطة من النقاط a,b,c,d,e,f أي إنّ xمنتمية إلى أكثر من مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ x من A نجد أنّ :

$$\boxed{A \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6} \qquad \boxed{2} \ .$$

ومن$\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أنّ : $\boxed{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6}$

وهذا يعني أنّ A تكتب على شكل اجتماع لست مجموعات نجمية $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. □

الاستنتاجات والتوصيات:

عندما نستبدل في المبرهنة (3) النقاط a,b,c,d,e,f من A بنقاط من جبهة Aنكون أمام مجموعة من المسائل المطروحة للبحث :

1.مناقشة المبرهنة في حالة اجتماع مجموعتين نجميتين.

2.مناقشة المبرهنة في حالة اجتماع ثلاث مجموعات نجمية.

3.مناقشة المبرهنة في حالة اجتماع أربع مجموعات نجمية.

4.مناقشة المبرهنة في حالة اجتماع خمس مجموعات نجمية.

5.مناقشة المبرهنة في حالة اجتماع ست مجموعات نجمية.

المراجع:

1 – ZARIF, A .1990– *About Unions of Starshaped Sets in Normal Space*. (in Russian). Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR N12P. 35-47.

2- TABALE. A .E ., ZARIF,A .1994 –*One Theorem a Starshaped Sets* (in Russian) .Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR N14-P .16-20.

3- ZARIF .A.1991-*Union of Starshaped Sets in Metric Space* (in Russian) . Ezvistia . Akad .Nauk .NSSR N13-P .20-31.

4- BOLTYANSKI.V.G,SOLTAN,P.S.1978-,*Combinotorial Geometry of Classes of Convex Sets* , (in Russian) . Stinica .Kishinev.279P .

5– Krasnonsel'skii , M.A.1946 -*Surun critere qu'un domaine soit etoite* , Math . sb.19(61) ,P.309-310.

6 – LEICHTWEISS,K.1980 – *Convex Set* , Berlin.335 p (translate into Russian).

7 – SOLTAN,V.P. 1984 – *Introduction to Convexity Theory*(in Russian). Stinica.Kishinev.225 P.

8-BREEN,M.1987-*Characterizing Compact Unions of Two Starshaped Sets in* R^3 , pacific .J .of Math ., Vol 128, P.63-72.

9-BREEN,M .,ZAMFIRESCU,T.1987-*A Characterization Theorem for Certain Unions of Two Starshaped Sets in* R^2,Geom.dedic-22-N1-P.95-103.

10-BREEN,M .1989- *Clear Visibility and Unions of Two Starshaped Sets in the Plane* ,Pacific . J. Math ., Vol 115 , P.267-275.

11-BREEN,M .1991-*Unions of Three Starshaped Sets in* R^2, J.of Geometry , Vol . 36 , P.8-16.

12– ظريف، عدنان.، أحمد، غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية في* R^2–مجلة جامعة تشرين– ،المجلد 25 ،العدد 13– 2003 . ص 35–45 .

13– ظريف، عدنان.، أحمد،غياث.، حسن، نجود. *المجموعات ثنائية الترابط و اجتماع المجموعات النجمية في* R^2– مجلة جامعة البعث–، المجلد 27،العدد 2– 2005 . ص 84–107.

14– ظريف، عدنان.، أحمد،غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية (أطروحة ماجستير)*–جامعة تشرين–2003 م.

15– ظريف ، عدنان.، الوسوف ،أحمد .،عفيصة ، براءة. *التحدّب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في* R^2 – مجلة جامعة تشرين–،المجلد 27 ،العدد 1–2005.ص 111–138.

16– ظريف ، عدنان.، الوسوف ،أحمد .،عفيصة ، براءة. *العلاقة بين المجموعات المحدّبة إحداثياً والمجموعات النجمية في* R^2 (بحث مقبول للنشر في مجلة بحوث جامعة حلب بتاريخ 2005/10/25م).

17–ظريف، عدنان.، الوسوف،أحمد.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في* R^2 *(أطروحة ماجستير)*–جامعة تشرين–2006 م.