

## طرائق شرائحية من الدرجة السابعة في الفضاء $C^3$ مع أربع نقاط مجمعة لحل مسائل القيم الحدية الخطية من المرتبة الثالثة

الدكتور سليمان محمد محمود\*

الدكتور محمود عثمان\*\*

أحمد الخباز\*\*\*

(تاريخ الإيداع 12 / 3 / 2008. قَبِلَ للنشر في 25/6/2008)

### □ الملخص □

تم في هذا البحث استخدام كثيرات حدود شرائحية من الدرجة السابعة في الفضاء  $C^3$  لصياغة طرائق عددية لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثالثة [1,2,3,4]، وأيضا لحل مسألة القيمة الحدية المتعددة الحالات من المرتبة الثالثة [5,6,7,8,9,10]. تعتمد الطرائق على أربع نقاط مجمعة:  $x_i = a + hi$ ، حيث  $[x_{i-1}, x_i]$ ، في كل مجال جزئي  $(j=1,2,3,4)$ ،  $x_{i-1+t_j} = x_{i-1} + t_j h$ ،  $(i=1,2,\dots,n)$ ،  $x_0 = a$ ،  $x_n = b$ ،  $h = (b-a)/n$ ،  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$  و  $t_4 = 1$ . تبين الدراسة أن الطرائق المقدمة عندما تطبق لحل مثل هذه المسائل تكون متقاربة ومرتبطة التقارب هي السابعة على الأقل مهما تكن  $t_1, t_2, t_3 \in ]0, 1[$  و  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ . تشكل الطرائق المدروسة مناطق غير محدودة من الاستقرار المطلق في المستوي العقدي من أجل بعض القيم لـ  $t_1, t_2, t_3$  في المجال  $[0.51, 1[$ .  
أجرينا بعض تجارب المحاكاة العددية على بعض المسائل لتوضيح عمل الطريقة المقترحة مقارنة مع طرائق عددية موجودة في دراسات سابقة.

**الكلمات المفتاحية:** كثيرات حدود شرائحية، نقاط مجمعة، مسائل القيم الحدية الخطية من المرتبة الثالثة، مسائل متعددة الحالات، الاستقرار المطلق، التقارب، التناسق.

\* مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

\*\* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

\*\*\* طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## $C^3$ - Seventh Spline Methods with Four Collocation Points for Solving Third-Order Linear Boundary Value Problems

Dr.Suliman M. Mahmood\*

Dr. Mahmood Osman \*\*

Ahmad Al khabbath \*\*\*

(Received 12 / 3 / 2008. Accepted 25/6/2008)

### □ ABSTRACT □

We use  $C^3$ -seventh polynomial splines to establish numerical methods for solving third-order linear boundary value problems [1,2,3,4] and a system of third-order boundary value problems associated with third-order obstacle problems [5,6,7,8,9,10]. These methods depend on four collocation points  $x_{i-1+t_j} = x_{i-1} + t_j h, j=1, \dots, 4$  in each subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$ , where  $x_i = a + hi, i=1(1)n, h = (b-a)/n, x_0 = a, x_n = b, 0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$  and  $t_4 = 1$ . A study shows that the presented methods are convergent and their order of convergence is at least seven for all  $t_1, t_2, t_3 \in ]0, 1[$  and  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ . Moreover, analysis of stability appears that the method possesses unbounded regions of absolute stability for some  $t_1, t_2, t_3 \in [0.51, 1[$ . Numerical experiments and comparisons with other available results are given to illustrate the applicability and efficiency of the presented methods.

**Keywords:** spline polynomials, collocation points, third-order linear boundary value problems, obstacle problems, absolute stability, convergence, consistency.

---

\* Assistant Prof, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

\*\* Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

\*\*\* Postgraduate student, Dept. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

## مقدمة:

تعد مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية من المسائل الهامة والتي تظهر في تطبيقات واقعية عديدة كالفيزياء والكيمياء والاقتصاد والهندسة وعلوم الفلك والميكانيك وغيرها. فمثلا، توصف الدوائر الكهربائية ومسائل الحركة المقيدة وبعض التفاعلات الكيميائية وحركة الصواريخ بمعادلات تفاضلية. وفي الهندسة المدنية تظهر مسألة الانحراف لجسر حديدي يخضع لحمولة منتظمة وطرفية مثبتين بلا انحراف [14]. وأخيرا في الفيزياء مسائل الضغط الجداري الناتجة عن تدفق السوائل غير القابلة للانضغاط بالإضافة إلى مسائل شتى في الهيدروليك والتحكم الأمثل والعديد من الفروع الأخرى.

ندرس في هذا البحث مسألة القيمة الحدية الخطية المعممة في المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثالثة، ونتطرق أيضا إلى الحل العددي لمسائل القيم الحدية من المرتبة الثالثة المرتبطة بالمسائل متعددة الحالات (الحالة).

يمكن كتابة مسألة القيمة الحدية الخطية من المرتبة الثالثة وفق الصيغة العامة التالية [1,2,3,4]:

$$L[u] \equiv u^{(3)}(x) + r_2(x)u^{(2)}(x) + r_1(x)u^{(1)}(x) + r_0(x)u(x) = r(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.1)$$

$$Du(a) = g_a, \quad Du(b) = g_b,$$

حيث  $u(x)$  دالة مجهولة و  $u^{(i)} = \frac{d^i u}{dx^i}$  ،  $i=1,2,3$  ، و  $r(x)$  ،  $r_i(x)$  ،  $i=0,1,2$  ، دوال مستمرة في المجال

$[a, b]$  ، و  $g_a, g_b$  ثوابت عددية و  $D$  معامل تفاضلي سيتم تحديده لاحقا في هذا العمل.

ويمكن صياغة مسائل القيم الحدية ذات المرتبة الثالثة المتعددة الحالات [5,6,7,8,9,10]:

$$y''' = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)y(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases} \quad (1.2)$$

مع الشروط الحدية:

$$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, y'(b) = \beta_1. \quad (1.3)$$

حيث  $y$  و  $y'$  و  $y''$  مستمرة عند  $c$  و  $d$  ، و  $F(x)$  ،  $G(x)$  هما دالتان مستمرتان على المجالين  $[a, b]$  و  $[c, d]$  على الترتيب، و  $R$  ثابت حقيقي.

ظهرت مؤخرا العديد من الأبحاث التي تقترح طرائق عددية لحل مسائل القيم الحدية من الشكل (1.1). فعلى سبيل المثال، قدم في [1, 2002] طريقة عددية لحل مسائل الاضطراب الشاذة من الشكل (1.1) وذلك بضرب مشقاتها ببسيط صغير وموجب. تقوم الطريقة على تحويل المسألة المذكورة إلى معادلتين تفاضليتين تخضعان لشروط حدية وابتدائية مناسبة. كما اقترح في [2, 2003] طرائق شرائية من الدرجة الرابعة لحل المسألة (1.1) التي تخضع لنوع واحد من الشروط الحدية. ودعما نتائجها النظرية بحل بعض الأمثلة العددية. قدمت طريقة العنصر المنتهي المقارب في [3, 2007] لحل مسألة الاضطراب الشاذة من الشكل (1.1) وذلك باستخدام وسيط صغير وموجب مضروب بمشتقها. وعززا نتائجها النظرية ببعض الاختبارات العددية. وفي [4, 2007] دراسة لطريقة مجمعة باستخدام B-شرائح من مرتبة عالية لحل المسألة (1.1)، حيث تساوى في هذه الطريقة عدد B-شرائح الأساسية مع عدد النقاط المجمعة المستخدمة. وانتهى البحث بتقديم حلول لعدد من مسائل القيم الحدية من مراتب مختلفة ومقارنة النتائج الحاصلة مع طرائق أخرى.

كما أهتم الباحثون بدراسة طرائق شرانجية لمعالجة مسألة القيمة الحدية متعددة الحالات من المرتبة الثالثة (1.2)-(1.3). فنجد مثلاً، في [5, 2003] طريقة شرانجية بكثيرات حدود تكعيبية لحل المسألة المذكورة، واقترح في [6, 2004] طريقة شرانجية بكثيرات حدود من الدرجة الرابعة، وأيضاً في [7, 2005] طريقة عددية بشرائح من الدرجة الرابعة باستخدام دالتي  $\sin$  و  $\cos$ ، كذلك نجد في [8, 2006] طريقة تستخدم  $B$ -شرائح من الدرجة الرابعة، وفي العمل [9, 2007] طريقة عددية مطورة عن طريقة الفروق المنتهية، وقدم في العمل [10, 2007] تقنية شرانجية من الدرجة الرابعة بغير كثيرات حدود اعتمدت دالتي  $\sin$  و  $\cos$  كأساس لإنشاء التقريبات الشرانجية. وتم في جميع هذه الطرائق دراسة تحليل التقارب وتقدير الحد الأعلى للخطأ واختبارها بمثال عددي. في [11] طرائق شرانجية مجمعة بكثيرات حدود من الدرجة الخامسة في الفضاء  $C^2$  لحل مسائل في المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بشروط حدية، مع دراسة تحليل الخطأ والتقارب والاستقرار لهذه الطرائق عند تطبيقها على المسألة المطروحة. توصيف طرائق شرانجية مجمعة من المرتبة السابعة في [12,13]، لحل مسائل القيم الابتدائية في المعادلات التفاضلية العادية من المرتبتين الأولى والثانية شاملة معادلات تفاضلية قاسية، بالإضافة إلى اختبارات عددية ومقارنات مع طرائق شرانجية أخرى.

### هدف البحث وأهميته:

يمكن تلخيص هدف البحث في النقاط التالية:

- صياغة طريقة شرانجية بأربع نقاط مجمعة وتقديم الشروط اللازمة والكافية لضمان إمكانية تطبيق هذه الطرائق لحل المسائل المدروسة وفق الصيغتين (1.1) و (1.2)-(1.3).
- تحليل الخطأ للطريقة الشرانجية وإثبات التقارب والتناسق وتبيان مراتب الخطأ الموضوعي والكلي.
- دراسة استقرار الطريقة المقترحة وتحديد مناطق الاستقرار المطلق في الفضاء العقدي، ثم تصنيف الطرائق بحسب قوة وضعف الاستقرار من خلال كبر وصغر المساحات المرسومة في الفضاء المذكور.
- مقارنة الحل العددي مع الحل التحليلية.
- تكمن أهمية البحث في تطبيق الطريقة المقترحة في تطبيقات واقعية مشابهة في علوم أخرى.

### خطة الحل وتوصيف الطرائق:

تهدف هذه الفقرة إلى تقديم الخطوات اللازمة لحل المسائلتين (1.1) و (1.2)-(1.3)، وعرض وصف للطريقة الشرانجية المقترحة وفق الشروط الحدية المفروضة.

#### مسألة القيمة الحدية (1.1):

يمكن إعادة كتابة مسألة القيمة الحدية (1.1):

$$u'''(x) = P_2(x)u''(x) + P_1(x)u'(x) + P_0(x)u(x) + r(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.1)$$

بحيث تخضع لأحد الشروط الحدية التالية [1,3]:

$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1, \quad u(b) = b_0 \quad (2.1a)$$

$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1, \quad u'(b) = b_1 \quad (2.1b)$$

$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1, \quad u''(b) = b_2 \quad (2.1c)$$

نفرض للتبسيط أن  $P_2(x) = -r_2(x)$  ،  $P_1(x) = -r_1(x)$  ،  $P_0(x) = -r_0(x)$   
 بفرض أنه يوجد حل وحيد لمسألة القيمة الحدية الخطية (2.1) التي تخضع لأحد الشروط (2.1a)-(2.1c)  
 هذا الحل مرتبط بتركيب خطي من حلول المعادلات التفاضلية ذات القيم الابتدائية. ولتوضيح ذلك نفرض أن  $K(x)$  هو  
 الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية:

$$K''' = P_2(x) K''(x) + P_1(x) K'(x) + P_0(x) K(x) + r(x), \quad (2.2)$$

$$K(a) = a_0, K'(a) = a_1, K''(a) = 0.$$

ونفرض أيضا أن  $M(x)$  هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية المتجانسة التالية:

$$M''' = P_2(x) M''(x) + P_1(x) M'(x) + P_0(x) M(x), \quad (2.3)$$

$$M(a) = 0, M'(a) = 0, M''(a) = 1.$$

عندئذ فإن التركيب الخطي

$$u(x) = K(x) + \xi M(x) \quad (2.4)$$

يمثل حلا وحيدا للمسألة (2.1) وذلك للأسباب التالية:

$$u''' = K''' + \xi M''' =$$

$$[P_2(x) K''(x) + P_1(x) K'(x) + P_0(x) K(x) + r(x)] +$$

$$\xi [P_2(x) M''(x) + P_1(x) M'(x) + P_0(x) M(x)]$$

$$= P_2(x) [K''(x) + \xi M''(x)] + P_1(x) [K'(x) + \xi M'(x)] +$$

$$P_0(x) [K(x) + \xi M(x)] + r(x)$$

$$= P_2(x) u''(x) + P_1(x) u'(x) + P_0(x) u(x) + r(x)$$

حيث  $\xi$  مجهول سيتم تعيينه من الشروط الحدية. ومن جهة أخرى من (2.4) لدينا:

$$u'(x) = K'(x) + \xi M'(x)$$

$$u''(x) = K''(x) + \xi M''(x)$$

إن الحل الممثل في العلاقة (2.4) يجب أن ينسجم مع الشروط الحدية التي تخضع لها المسألة وبالتالي من أجل الشروط (2.1a)، لدينا:

$$u(a) = K(a) + \xi M(a) = a_0 + \xi(0) = a_0$$

$$u'(a) = K'(a) + \xi M'(a) = a_1 + \xi(0) = a_1.$$

$$u(b) = K(b) + \xi M(b)$$

يتم تحديد قيمة الثابت  $\xi$  من المعادلة الأخيرة بوضع  $u(b) = b_0$  كالاتي:

$$\xi = \frac{[b_0 - K(b)]}{M(b)} \quad (2.5)$$

وبالتالي، إذا كان  $M(b) \neq 0$  فإن الحل الوحيد لمسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.1a) هو:

$$u(x) = K(x) + \frac{[b_0 - K(b)]}{M(b)} M(x) \quad (2.6)$$

الآن نستطيع بسهولة إيجاد حل المسألة (2.1) مع الشروط الحدية من النوع الثاني (2.1b) ولأجل ذلك يكفي  
 تحديد قيمة الثابت  $\xi$  بتطبيق الشرط المختلف في النوع الثاني على المشتق الأول للحل (2.4):

$$u'(b) = K'(b) + \xi M'(b) = b_1$$

فمن أجل  $M'(b) \neq 0$  يكون الحل الوحيد لمسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.1b):

$$u(x) = K(x) + \frac{[b_1 - K'(b)]}{M'(b)} M(x) \quad (2.7)$$

وبشكل مشابه ، من أجل  $M''(b) \neq 0$  يكون الحل الوحيد لمسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.1c) كما يلي:

$$u(x) = K(x) + \frac{[b_2 - K''(b)]}{M''(b)} M(x) \quad (2.8)$$

حيث تم تطبيق النوع الثالث للشرط الحدي على المشتق الثاني للحل (2.4):

$$u''(b) = K''(b) + \xi M''(b) = b_2$$

### مسألة القيمة الحدية متعددة الحالات [5,6,7,8,9,10]:

يفرض أنه يوجد حل وحيد للمسألة متعددة الحالات (1.2)-(1.3). نرى أن هذا الحل مرتبط بحلين لمسألتين من مسائل القيم الابتدائية متعددة الحالات، ولهذا نفرض أن  $V(x)$  هو حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية متعددة الحالات التالية:

$$V''' = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)V(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.9a)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$V(a) = \alpha_0, V'(a) = \alpha_1, V''(a) = 0. \quad (2.9b)$$

ونفرض أيضا أن  $J(x)$  هو حل وحيد أيما كان شكله لمسألة القيمة الابتدائية المتجانسة المتعددة الحالات التالية:

$$J''' = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c \\ G(x)J(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.10a)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$J(a) = 0, J'(a) = 0, J''(a) = 1. \quad (2.10b)$$

عندئذ فإن التركيب الخطي

$$y(x) = V(x) + \gamma J(x) \quad (2.11)$$

يمثل حلا للمسألة متعددة الحالات (1.2)-(1.3) للأسباب التالية:

$$y''' = V''' + \gamma J''' = \begin{cases} F(x) + (\gamma)(0), & a \leq x \leq c \\ G(x)[V(x) + \gamma J(x)] + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x) + (\gamma)(0), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq c \\ G(x)y(x) + F(x) + R, & c \leq x \leq d \\ F(x), & d \leq x \leq b \end{cases}$$

حيث  $\gamma$  مجهول يتم تعيينه من الشروط الحدية. إن الحل  $y(x)$  الممثل في العلاقة (2.11) يجب أن يتطابق مع الشروط الحدية (1.3)، وبالتالي:

$$\begin{aligned} y(a) &= V(a) + \gamma J(a) = \alpha_0 + (\gamma)(0) = \alpha_0 \\ y'(a) &= V'(a) + \gamma J'(a) = \alpha_1 + (\gamma)(0) = \alpha_1. \\ y'(b) &= V'(b) + \gamma J'(b) \end{aligned}$$

وبوضع  $y'(b) = \beta_1$  نجد من المعادلة الأخيرة أن:

$$\gamma = \frac{[\beta_1 - V'(b)]}{J'(b)} \quad (2.12)$$

### صياغة التقريبات الشرائحية:

لتكن  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  تجزئة منتظمة للمجال  $[a, b]$ ، حيث  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$  و  $h = (b - a)/n$ ، وبالتالي نحصل على المجالات الجزئية  $I_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$ ، وبعدها باستخدام الترميز:

$$\begin{aligned} S_i^{[0]} &= S(x_i), \quad S_i^{[1]} = hS'(x_i), \\ S_i^{[2]} &= h^2 S''(x_i), \quad S_i^{[3]} = h^3 S'''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.13)$$

يمكن صياغة التقريبات الشرائحية  $S(x)$  من الدرجة السابعة في الفضاء  $C^3$  في كل مجال جزئي  $I_i$  كما يلي [12]:

$$\begin{aligned} S(x) &= \bar{\chi}^4 [(20\bar{\chi}^3 + 10\bar{\chi}^2 + 4\bar{\chi} + 1)S_{i-1}^{[0]} + (10\bar{\chi}^3 + 4\bar{\chi}^2 + \bar{\chi})S_{i-1}^{[1]} \\ &\quad + (2\bar{\chi}^3 + \frac{1}{2}\bar{\chi}^2)S_{i-1}^{[2]} + (\frac{1}{6}\bar{\chi}^3)S_{i-1}^{[3]}] \\ &\quad + \chi^4 [(20\bar{\chi}^3 + 10\bar{\chi}^2 + 4\bar{\chi} + 1)S_i^{[0]} - (10\bar{\chi}^3 + 4\bar{\chi}^2 + \bar{\chi})S_i^{[1]} \\ &\quad + (2\bar{\chi}^3 + \frac{1}{2}\bar{\chi}^2)S_i^{[2]} - (\frac{1}{6}\bar{\chi}^3)S_i^{[3]}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

حيث  $S(x)$  هي كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لهرميت (Hermite Interpolation) من الدرجة السابعة التي تتطابق مع دالة الحل ومشتقاتها حتى المرتبة الثالثة عند طرفي المجال الجزئي  $x = x_{i-1}$  و  $x = x_i$ ، ولدنا  $\bar{\chi} = 1 - \chi, \chi = (x - x_{i-1})/h \in [0, 1]$

الآن باشتقاق الدالة (2.14) ثلاث مرات متتالية، نحصل على مشتقات التقريبات الشرائحية حتى المرتبة الثالثة:

$$\begin{aligned} hS'(x) &= \bar{\chi}^3 [(-140\bar{\chi}^3)S_{i-1}^{[0]} - (70\bar{\chi}^3 - 6\bar{\chi}^2 - 3\bar{\chi} - 1)S_{i-1}^{[1]} \\ &\quad - (14\bar{\chi}^3 - 3\bar{\chi}^2 - \bar{\chi})S_{i-1}^{[2]} - (\frac{7}{6}\bar{\chi}^3 - \frac{1}{2}\bar{\chi}^2)S_{i-1}^{[3]}] \\ &\quad + \chi^3 [(140\bar{\chi}^3)S_i^{[0]} - (70\bar{\chi}^3 - 6\bar{\chi}^2 - 3\bar{\chi} - 1)S_i^{[1]} \\ &\quad + (14\bar{\chi}^3 - 3\bar{\chi}^2 - \bar{\chi})S_i^{[2]} - (\frac{7}{6}\bar{\chi}^3 - \frac{1}{2}\bar{\chi}^2)S_i^{[3]}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} h^2 S''(x) &= \bar{\chi}^2 [(840\bar{\chi}^3 - 420\bar{\chi}^2)S_{i-1}^{[0]} + (420\bar{\chi}^3 - 240\bar{\chi}^2)S_{i-1}^{[1]} \\ &\quad + (84\bar{\chi}^3 - 57\bar{\chi}^2 + 2\bar{\chi} + 1)S_{i-1}^{[2]} + (7\bar{\chi}^3 - 6\bar{\chi}^2 + \bar{\chi})S_{i-1}^{[3]}] \\ &\quad + \chi^2 [(840\bar{\chi}^3 - 420\bar{\chi}^2)S_i^{[0]} - (420\bar{\chi}^3 - 240\bar{\chi}^2)S_i^{[1]} \\ &\quad + (84\bar{\chi}^3 - 57\bar{\chi}^2 + 2\bar{\chi} + 1)S_i^{[2]} - (7\bar{\chi}^3 - 6\bar{\chi}^2 + \bar{\chi})S_i^{[3]}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
h^3 S'''(x) = & \bar{\chi} [(-4200\chi^3 + 4200\chi^2 - 840\chi)S_{i-1}^{[0]} - (2100\chi^3 - 2220\chi^2 + 480\chi)S_{i-1}^{[1]} \\
& - (420\chi^3 - 480\chi^2 + 120\chi)S_{i-1}^{[2]} - (35\chi^3 - 45\chi^2 + 15\chi - 1)S_{i-1}^{[3]}] \\
& + \chi [(4200\bar{\chi}^3 - 4200\bar{\chi}^2 + 840\bar{\chi})S_i^{[0]} - (2100\bar{\chi}^3 - 2220\bar{\chi}^2 + 480\bar{\chi})S_i^{[1]} \\
& + (420\bar{\chi}^3 - 480\bar{\chi}^2 + 120\bar{\chi})S_i^{[2]} - (35\bar{\chi}^3 - 45\bar{\chi}^2 + 15\bar{\chi} - 1)S_i^{[3]}]
\end{aligned} \quad (2.17)$$

### الطريقة المقترحة لحل المسألة المدروسة:

#### • الحل العددي لمسائل القيم الحدية (2.1)-(2.1a)-(2.1c):

إن الحل العددي للمسألة (2.1) مع إحدى الشروط الحدية (2.1a)-(2.1c) يتطلب كمرحلة أولى تطبيق التقريبات الشرانجية في نقاط التجميع الأربع  $x_{i-1+t_j} = x_{i-1} + t_j h$ ،  $j=1(1)4$ ، في كل مجال جزئي  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ،  $i=1, \dots, n$ ، مع الأخذ بعين الاعتبار أن  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$  و  $t_4 = 1$ ، ثم إيجاد الحل الشرانجي التقريبي لمسألتي القيم الابتدائية (2.2)-(2.3) على الترتيب:

$$\begin{aligned}
S_K'''(x_{i-1+t_j}) = & P_2(x_{i-1+t_j})S_K''(x_{i-1+t_j}) + P_1(x_{i-1+t_j})S_K'(x_{i-1+t_j}) + \\
& P_0(x_{i-1+t_j})S_K(x_{i-1+t_j}) + r(x_{i-1+t_j}), \quad j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \quad (2.18)$$

$$S_K(a) = a_0, \quad S_K'(a) = a_1, \quad S_K''(a) = 0.$$

$$\begin{aligned}
S_M'''(x_{i-1+t_j}) = & P_2(x_{i-1+t_j})S_M''(x_{i-1+t_j}) + P_1(x_{i-1+t_j})S_M'(x_{i-1+t_j}) + \\
& P_0(x_{i-1+t_j})S_M(x_{i-1+t_j}), \quad j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \quad (2.19)$$

$$S_M(a) = 0, \quad S_M'(a) = 0, \quad S_M''(a) = 1.$$

عند هذه المرحلة وبعد أن أصبح الحلان التقريبيان  $S_M(x_i), S_K(x_i)$  للمسألتين (2.18)-(2.19) معلومين مع مشتقاتهما حتى المرتبة الثالثة في جميع نقاط التجزئة، فإنه يمكن الحصول من العلاقة (2.6) على الحل العددي للمسألة الحدية الأولى (2.1)-(2.1a):

$$S_u(x_i) = S_K(x_i) + \frac{[b_0 - S_K(b)]}{S_M(b)} S_M(x_i), \quad i=1, \dots, n \quad (2.20)$$

وباستخدام العلاقة (2.7) يمكن الحصول على الحل العددي للمسألة الحدية الثانية (2.1)-(2.1b):

$$S_u(x_i) = S_K(x_i) + \frac{[b_1 - S_K'(b)]}{S_M'(b)} S_M(x_i), \quad i=1, \dots, n \quad (2.21)$$

وأيضاً باستخدام العلاقة (2.8) نحصل على الحل العددي للمسألة الحدية الثالثة (2.1)-(2.1c):

$$S_u(x_i) = S_K(x_i) + \frac{[b_2 - S_K''(b)]}{S_M''(b)} S_M(x_i), \quad i=1, \dots, n. \quad (2.22)$$

#### • الحل العددي لمسألة القيم الحدية متعددة الحالات (1.2)-(1.3):

لإيجاد الحل العددي للمسألة (1.2)-(1.3) نضع  $c = (3a+b)/4$ ، و  $d = (a+3b)/4$  ثم نطبق الطرائق الشرانجية في نقاط التجميع الأربع  $x_{i-1+t_j} = x_{i-1} + t_j h$ ،  $j=1, \dots, 4$ ، في كل مجال جزئي  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ،  $i=1, \dots, n$ ، على مسألتي القيم الابتدائية (2.9)-(2.10) على الترتيب:



$$S_V'''(x_{i-1+t_j}) = \begin{cases} F(x_{i-1+t_j}), & a \leq x_{i-1+t_j} \leq c \\ G(x_{i-1+t_j})V(x_{i-1+t_j}) + F(x_{i-1+t_j}) + R, & c \leq x_{i-1+t_j} \leq d \\ F(x_{i-1+t_j}), & d \leq x_{i-1+t_j} \leq b \end{cases} \quad (2.23a)$$

$$S_V(a) = \alpha_0, S_V'(a) = \alpha_1, S_V''(a) = 0. \quad (2.23b)$$

$$S_J'''(x_{i-1+t_j}) = \begin{cases} 0, & a \leq x_{i-1+t_j} \leq c \\ G(x_{i-1+t_j})J(x_{i-1+t_j}), & c \leq x_{i-1+t_j} \leq d \\ 0, & d \leq x_{i-1+t_j} \leq b \end{cases} \quad (2.24a)$$

$$S_J(a) = 0, S_J'(a) = 0, S_J''(a) = 1. \quad (2.24b)$$

لنحصل على الحلين التقريبيين  $S_V(x_i), S_J(x_i)$  للمسائلتين (2.23)-(2.24) في جميع نقاط التجزئة، وبعدها

استخدام (2.11) و (2.12) للحصول على الحل العددي لمسألة القيمة الحدية متعددة الحالات (1.2)-(1.3):

$$S_y(x_i) = S_V(x_i) + \frac{[\beta_1 - V'(b)]}{J'(b)} S_J(x_i) \quad (2.25)$$

### تحليل الخطأ ومرتبة التقارب للطرائق:

ندرس في هذه الفقرة خصائص ومرتبة التقارب للطرائق الشرائحية عندما تطبق لحل إحدى مسائل القيم الحدية من المرتبة الثالثة. من أجل ذلك نجعل  $S(x)$  ومشتقاتها تحقق شروط التجميع في النقاط الأربعة لجملة المسائل التالية:

$$\begin{cases} S_u'''(x_{i-1+t_j}) = f(x_{i-1+t_j}, S_u(x_{i-1+t_j}), S_u'(x_{i-1+t_j}), S_u''(x_{i-1+t_j})), & j = 1, \dots, 3, \\ S_u'''(x_i) = f(x_i, S_u(x_i), S_u'(x_i), S_u''(x_i)), & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$S_u(a) = a_0, S_u'(a) = a_1, S_u(b) = b_0, \quad (3.1a)$$

$$S_u(a) = a_0, S_u'(a) = a_1, S_u'(b) = b_1, \quad (3.1b)$$

$$S_u(a) = a_0, S_u'(a) = a_1, S_u''(b) = b_2. \quad (3.1c)$$

في كل مجال جزئي  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ،  $i=1, \dots, n$ ، مع مراعاة أنه لدينا  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$  و  $t_4 = 1$ .

عندئذ تؤول العلاقات (3.1) إلى جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} & [t_j (4200\bar{t}_j^3 - 4200\bar{t}_j^2 + 840\bar{t}_j)]S_i^{[0]} + [t_j (2220\bar{t}_j^2 - 2100\bar{t}_j^3 - 480\bar{t}_j)]S_i^{[1]} + \\ & [t_j (480\bar{t}_j^3 - 480\bar{t}_j^2 + 120\bar{t}_j)]S_i^{[2]} = \\ & [\bar{t}_j (4200t_j^3 - 4200t_j^2 + 840t_j)]S_{i-1}^{[0]} + [\bar{t}_j (480t_j - 2220t_j^2 + 2100t_j^3)]S_{i-1}^{[1]} + \\ & [\bar{t}_j (420t_j^3 - 480t_j^2 + 120t_j)]S_{i-1}^{[2]} + h^3 [\bar{t}_j (35t_j^3 - 45t_j^2 + 15t_j - 1)]f_{i-1} + \\ & h^3 f_{i-1+t_j} + h^3 [t_j (35\bar{t}_j^3 - 45\bar{t}_j^2 + 15\bar{t}_j - 1)]f_{i-1}, \quad j = 1, 2, 3, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

حيث للاختصار رمزنا  $(f_{i-1+t_j} \equiv f(x_{i-1+t_j}, S_u(x_{i-1+t_j}), S_u'(x_{i-1+t_j}), S_u''(x_{i-1+t_j})))$  و  $\bar{t}_j = 1 - t_j$

و  $t_4 = 1$ ، وبالتالي  $\bar{t}_4 = 0$ ، ونذكر بأن  $S_{i-1}^{[3]} = h^3 f_{i-1}$  و  $S_i^{[3]} = h^3 f_i$ ، كما تم التعويض بـ  $j=1, 2, 3$ .

الآن، نحصل من الجملة (3.2) على الصيغة التكرارية المكافئة التالية:

$$A \underline{S}_i = B \underline{S}_{i-1} + h^3 G f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} t_1(4200\bar{t}_1^3 - 4200\bar{t}_1^2 + 840\bar{t}_1) & -t_1(2100\bar{t}_1^3 - 2220\bar{t}_1^2 + 480\bar{t}_1) & t_1(420\bar{t}_1^3 - 480\bar{t}_1^2 + 120\bar{t}_1) \\ t_2(4200\bar{t}_2^3 - 4200\bar{t}_2^2 + 840\bar{t}_2) & -t_2(2100\bar{t}_2^3 - 2220\bar{t}_2^2 + 480\bar{t}_2) & t_2(420\bar{t}_2^3 - 480\bar{t}_2^2 + 120\bar{t}_2) \\ t_3(4200\bar{t}_3^3 - 4200\bar{t}_3^2 + 840\bar{t}_3) & -t_3(2100\bar{t}_3^3 - 2220\bar{t}_3^2 + 480\bar{t}_3) & t_3(420\bar{t}_3^3 - 480\bar{t}_3^2 + 120\bar{t}_3) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \bar{t}_1(4200t_1^3 - 4200t_1^2 + 840t_1) & \bar{t}_1(2100t_1^3 - 2220t_1^2 + 480t_1) & \bar{t}_1(420t_1^3 - 480t_1^2 + 120t_1) \\ \bar{t}_2(4200t_2^3 - 4200t_2^2 + 840t_2) & \bar{t}_2(2100t_2^3 - 2220t_2^2 + 480t_2) & \bar{t}_2(420t_2^3 - 480t_2^2 + 120t_2) \\ \bar{t}_3(4200t_3^3 - 4200t_3^2 + 840t_3) & \bar{t}_3(2100t_3^3 - 2220t_3^2 + 480t_3) & \bar{t}_3(420t_3^3 - 480t_3^2 + 120t_3) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \bar{t}_1(35t_1^3 - 45t_1^2 + 15t_1 - 1) & 1 & 0 & 0 & t_1(35\bar{t}_1^3 - 45\bar{t}_1^2 + 15\bar{t}_1 - 1) \\ \bar{t}_2(35t_2^3 - 45t_2^2 + 5t_2 - 1) & 0 & 1 & 0 & t_2(35\bar{t}_2^3 - 45\bar{t}_2^2 + 15\bar{t}_2 - 1) \\ \bar{t}_3(35t_3^3 - 45t_3^2 + 15t_3 - 1) & 0 & 0 & 1 & t_3(35\bar{t}_3^3 - 45\bar{t}_3^2 + 15\bar{t}_3 - 1) \end{bmatrix}$$

وأن:

$$\underline{S}_i = (S_i^{[0]}, S_i^{[1]}, S_i^{[2]})^T, \underline{S}_{i-1} = (S_{i-1}^{[0]}, S_{i-1}^{[1]}, S_{i-1}^{[2]})^T, \underline{f}_i \equiv (f_{i-1}, f_{i-1+t_1}, f_{i-1+t_2}, f_{i-1+t_3}, f_i)^T$$

**ملاحظة (1):** إذا كان  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ ، فإن الجملة (3.3) تكون موجودة وقابلة للحل وحلها الوحيد هو:

$$\underline{S}_i = A^{-1}B\underline{S}_{i-1} + h^3 A^{-1}G\underline{f}_i, i = 1(1)n, \quad (3.4)$$

لأن المصفوفة  $A$  نظامية وليست شاذة:

$$|A| = 3024000(\bar{t}_1 \bar{t}_2 \bar{t}_3)(t_1 t_2 t_3)(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)(t_1 - t_3) \neq 0,$$

ومن جهة أخرى:

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ولدينا أيضا:  $|A^{-1}B| = 1 \neq 0$ .

إن الطرائق الشرانحية المجموعة التي عرفناها في العلاقات (3.1) و(3.2) يتم تحليلها وفق الصيغة المكافئة

المعرفة في العلاقة (3.3).

**تعريف (1)** [15]: نقول عن الطريقة الشرانحية (3.3) أنها مستقرة إذا كان  $\|(A^{-1}B)^n\| \leq c = const$  مهما

$$\text{تكن } n \geq 0, \text{ حيث } (A^{-1}B)^n = [a_{i,j}^n], c = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{i,j}^n| \text{ هي المصفوفة (3.5).}$$

**نتيجة (1):** تكون الطريقة الشرانحية المجموعة (3.1) أو الصيغة المكافئة (3.3) مستقرة مهما تكن  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$

تنتمي إلى المجال  $[0,1]$  شريطة أن يكون  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ .

**البرهان:**

نلاحظ أولاً أنه إذا كان  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$  تنتمي إلى المجال  $[0,1]$ ، و  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$  فهذا يؤدي إلى أن يكون  $|A| \neq 0$ ، وبالتالي فالجملة (3.3) تملك حلاً وحيداً. أما إثبات الاستقرار فيتم بالاعتماد على التعريف (1)، وبالتالي يكفي التحقق من أن متتالية المصفوفات  $\{(A^{-1}B)^n\}$  محدودة بانتظام من أجل  $n \geq 0$  حيث  $A^{-1}B$  هي المصفوفة (3.5). ومن أجل ذلك يكفي ملاحظة أن:

$$(A^{-1}B)^n = \begin{bmatrix} 1^n & 1^n & (1/2)^n \\ 0 & 1^n & 1^n \\ 0 & 0 & 1^n \end{bmatrix} \Rightarrow \|(A^{-1}B)^n\|_{\infty} = \text{Max}\{2 + (1/2)^n, 2, 1\} = 2 + (1/2)^n$$

ولهذا فإن  $\|(A^{-1}B)^n\|_{\infty} \leq 3$ ، مهما يكن  $n > 0$ ، وهو المطلوب.

**تعريف (2) [16]:** نقول عن طريقة إنها متناسقة (consistent) من المرتبة  $p$  إذا كان  $\max_{0 \leq i \leq n} \|d_i\| = O(h^p)$ ، حيث  $d_i$  هو خطأ الاقتطاع الموضعي (Local truncation error) للطريقة عند  $x_i$ .

**مبرهنة (1):** لتكن  $f \in C^6([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ، عندئذ تكون الطريقة الشرائحية المجمعة (3.1) أو

المكافئة (3.3) متناسقة وتملك تقارب من المرتبة السابعة مهما تكن  $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$  و  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ .

**البرهان:** يمكننا من الجملة (3.4) الحصول على صيغة الخطأ المقتطع الموضعي والتعبير عنها بالشكل:

$$\underline{d}_i = \begin{bmatrix} u(x_i) \\ hu'(x_i) \\ h^2u''(x_i) \end{bmatrix} - A^{-1}B \begin{bmatrix} u(x_{i-1}) \\ hu'(x_{i-1}) \\ h^2u''(x_{i-1}) \end{bmatrix} - h^3 A^{-1}G \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-1+t_1} \\ f_{i-1+t_2} \\ f_{i-1+t_3} \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n \quad (3.6)$$

حيث:  $f_{i-1+t_j} \equiv f(x_{i-1+t_j}, H(x_{i-1+t_j}), H^{(1)}(x_{i-1+t_j}), H^{(2)}(x_{i-1+t_j})), j=1, \dots, 4$

ويعطى التقريب الشرائحي في نقاط التجميع وفق الصيغة:

$$\begin{aligned} H(x_{i-1+t_j}) &= \bar{t}_j^4 [(20\bar{t}_j^3 + 10\bar{t}_j^2 + 4\bar{t}_j + 1)u(x_{i-1}) + (10\bar{t}_j^3 + 4\bar{t}_j^2 + \bar{t}_j)hu'(x_{i-1}) \\ &+ (2\bar{t}_j^3 + \frac{1}{2}\bar{t}_j^2)h^2u''(x_{i-1}) + (\frac{1}{6}\bar{t}_j^3)h^3u'''(x_{i-1})] \\ &+ \bar{t}_j^4 [(20\bar{t}_j^3 + 10\bar{t}_j^2 + 4\bar{t}_j + 1)u(x_i) - (10\bar{t}_j^3 + 4\bar{t}_j^2 + \bar{t}_j)hu'(x_i) \\ &+ (2\bar{t}_j^3 + \frac{1}{2}\bar{t}_j^2)h^2u''(x_i) - (\frac{1}{6}\bar{t}_j^3)h^3u'''(x_i)] \end{aligned}$$

من جهة أخرى يمكننا من الجملة (3.6) كتابة:

$$\underline{\tilde{d}}_i = \begin{bmatrix} u(x_i) \\ hu'(x_i) \\ h^2u''(x_i) \end{bmatrix} - A^{-1}B \begin{bmatrix} u(x_{i-1}) \\ hu'(x_{i-1}) \\ h^2u''(x_{i-1}) \end{bmatrix} - h^3 A^{-1}G \begin{bmatrix} u'''(x_{i-1}) \\ u'''(x_{i-1+t_1}) \\ u'''(x_{i-1+t_2}) \\ u'''(x_{i-1+t_3}) \\ u'''(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

الآن، باستخدام منشور تايلور للدالة  $u(x)$  ومشتقاتها حتى المرتبة الثالثة حول  $x_i$  و  $x_{i-1}$  و  $x_{i-1+t_j}$  من أجل

$j=1,2,3$  والتعويض في العلاقة (3.7) نجد أن:

$$\tilde{d}_i = \frac{h^8}{10!} \begin{bmatrix} 18\{3 - 6t_3 + 2t_1(7t_3 - 3) - 2t_2[3 - 7t_3 + 7t_1(3t_3 - 1)]\} \\ 72\{4 - 7t_3 + 7t_1(2t_3 - 1) - 7t_2[1 - 2t_3 + t_1(5t_3 - 2)]\} \\ 504\{2 - 3t_3 + t_1(5t_3 - 3) + t_2[5t_3 + t_1(5 - 10t_3) - 3]\} \end{bmatrix} u^{(8)}(x_{i-1}) + O(h^9),$$

وبالتالي ينتج لدينا:

$$d_i = \tilde{d}_i + O(h^9), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

حيث تم استخدام منشور تايلور للدالة  $u$  حول  $x_{i-1}$  كالتالي:

$$u(x) = \sum_{k=0}^7 \frac{h^k}{k!} u^{(k)}(x_{i-1}) \chi^k + \frac{h^8}{8!} u^{(8)}(x_{i-1}) \chi^8 + O(h^9), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad u \in C^9[a, b].$$

وبملاحظة أن الطريقة تكون دقيقة (exact) من أجل كثيرات حدود تقريبية من درجة أصغر أو تساوي 7 (يعني

أنه من أجل  $u(x) \equiv \sum_{k=0}^7 \frac{h^k}{k!} u^{(k)}(x_{i-1}) \chi^k$  نحصل على  $\|\tilde{d}_i\| = \|d_i\| = 0$ ، لهذا السبب من التعريف (2)نستنتج أن الطرائق تكون متناسقة ومن المرتبة السابعة على الأقل مهما تكن الوسطاء  $t_1, t_2, t_3 \in ]0, 1[$  مع

$$t_1 \neq t_2 \neq t_3$$

علاوة على ذلك، نعلم أنه يتم تحديد طريقة شرانجية من أجل كل اختيار لقيم الوسطاء  $t_1, t_2, t_3$  في المجال $]0, 1[$  شريطة أن تكون هذه القيم مختلفة، وبالتالي يمكن لهذه الوسطاء أن تلعب دورا في تحديد الطريقة الأفضل (يعني

الطريقة التي تحقق أعلى مرتبة من الدقة). من أجل ذلك يمكننا إيجاد حلا تقريبا للمعادلات:

$$3 - 6t_3 + 2t_1(7t_3 - 3) - 2t_2[3 - 7t_3 + 7t_1(3t_3 - 1)] = 0$$

$$4 - 7t_3 + 7t_1(2t_3 - 1) - 7t_2[1 - 2t_3 + t_1(5t_3 - 2)] = 0$$

$$2 - 3t_3 + t_1(5t_3 - 3) + t_2[5t_3 + t_1(5 - 10t_3) - 3] = 0$$

في المجال  $]0, 1[$  نجد أن  $t_3 = 0.8273268353539885$ ،  $t_2 = 0.5$ ،  $t_1 = 0.172673164646$ 

نلاحظ أن هذه القيم للوسطاء تحدد طريقة ذات دقة أعلى من الطرائق الأخرى بمرتبة واحدة فهي من المرتبة

الثامنة وهذا ما ستؤكدته النتائج والاختبارات العددية في فقرة الحل العددي.

**نتيجة (2):** بفرض أن  $u, y \in C^9[a, b]$  تحققان استمرارية ليبنتشز، عندئذ فإن التقريبات الشرانجية  $S_u(x)$ تتقارب من الحلول  $u(x)$  المعطاة بـ (2.6)-(2.8) للمسائل (2.1)-(2.1a)-(2.1c) والتقريبات الشرانجية  $S_y(x)$  تتقاربمن الحل  $y(x)$  للمسألة (1.2)-(1.3) عندما  $h \rightarrow 0$  مهما تكن  $t_1, t_2, t_3 \in ]0, 1[$  و  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ ، حيث لدينا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-j} S_u^{[j]}(x_e) = u^{(j)}(x_e), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad e = a, b \quad (3.9a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-j} S_y^{[j]}(x_e) = y^{(j)}(x_e), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad e = a, b \quad (3.9b)$$

ومن جهة أخرى، مرتبة التقارب هي السابعة على الأقل، يعني لدينا:

$$|S_u(x) - u(x)| = |S_y(x) - y(x)| \leq \frac{\chi^4 \bar{\chi}^4 u^{(8)}(x_{i-1})}{50320} h^8 + O(h^9) \quad (3.10)$$

$$|S'_u(x) - u'(x)| = |S'_y(x) - y'(x)| \leq \frac{\chi^3 \bar{\chi}^3 (1 - 2\chi) u^{(8)}(x_{i-1})}{12580} h^7 + O(h^8) \quad (3.11)$$

$$|S''_u(x) - u''(x)| = |S''_y(x) - y''(x)| \leq \frac{\chi^2 \bar{\chi}^2 (3 - 14\chi\bar{\chi}) u^{(8)}(x_{i-1})}{12580} h^6 + O(h^7) \quad (3.12)$$

$$|S_u'''(x) - u'''(x)| = |S_y'''(x) - y'''(x)| \leq \frac{3\chi\bar{\chi}(1-9\chi+21\chi^2-14\chi^3)u^{(8)}(x_{i-1})}{6290} h^5 + O(h^6) \quad (3.13)$$

حيث:  $\bar{\chi} = 1 - \chi$  و  $\chi = (x - x_{i-1})/h \in [0,1]$

ملاحظة(2): نلاحظ أن دالة الخطأ  $O(h^p)$  عندما تعبر عن الخطأ الموضعي فيكون الخطأ الكلي (أي على كامل المجال  $[a,b]$ ) أقل بمرتبة من الخطأ الموضعي.

### الاستقرار المطلق للطرائق:

لدراسة خصائص الاستقرار الخطي المطلق للطرائق يمكننا تطبيق التقريبات (2.14) و (2.17) على معادلة الاختبار الخطية النموذجية التالية:

$$U''' = \lambda^3 U, \quad (4.1)$$

حيث  $\lambda$  ثابت عقدي اختياري. بعدئذ باستخدام النقاط المجمعة الأربع نحصل على المعادلات:

$$S_U'''(x_{i-1+t_j}) = \lambda^3 S_U(x_{i-1+t_j}), \quad j=1,2,3, \quad i=1,\dots,n,$$

$$S_i^{[3]} = Z S_i^{[0]},$$

التي يمكن كتابتها باستخدام التقريبات الشرائحية على الشكل:

$$\begin{aligned} & [t_j(4200\bar{t}_j^3 - 4200\bar{t}_j^2 + 840\bar{t}_j) - Z(4t_j - 30t_j^2 + 60t_j^3 - 84t_j^5 + 70t_j^6 - 20t_j^7) + \\ & Z^2(t_j^4\bar{t}_j^3/6)]S_i^{[0]} + [t_j(2220\bar{t}_j^2 - 2100\bar{t}_j^3 - 840\bar{t}_j) - Zt_j^4(\bar{t}_j + 4\bar{t}_j^2 + 10\bar{t}_j^3)]S_i^{[1]} + \\ & [t_j(420\bar{t}_j^3 - 480\bar{t}_j^2 + 120\bar{t}_j) - Zt_j^4(2\bar{t}_j^3 + 0.5\bar{t}_j^2)]S_i^{[2]} = \\ & [\bar{t}_j(4200t_j^3 - 4200t_j^2 + 840t_j) + Z(4\bar{t}_j - 30\bar{t}_j^2 + 60\bar{t}_j^3 - 84\bar{t}_j^5 + 70\bar{t}_j^6 - 20\bar{t}_j^7) + \\ & Z^2(\bar{t}_j^4t_j^3/6)]S_{i-1}^{[0]} + [\bar{t}_j(2100t_j^3 - 2220t_j^2 + 840t_j) + Z\bar{t}_j^4(t_j + 4t_j^2 + 10t_j^3)]S_{i-1}^{[1]} + \\ & [\bar{t}_j(420t_j^3 - 480t_j^2 + 120t_j) + Z\bar{t}_j^4(2t_j^3 + 0.5t_j^2)]S_{i-1}^{[2]}, \quad j=1,2,3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

حيث وضعنا  $Z = (h\lambda)^3$  واستبدلنا  $S_i^{[3]} = Z S_i^{[0]}$ ,  $S_i^{[3]} = Z S_i^{[0]}$

تؤول المعادلات (4.2) إلى الصيغة المصفوفية:

$$C(z) \cdot \underline{S}_j = D(z) \underline{S}_{j-1}, \quad (4.3)$$

حيث  $D(Z)$  و  $C(Z)$  مصفوفتان معرفتان بالشكل:

$$C(z) = \begin{bmatrix} t_1(4200\bar{t}_1^3 - 4200\bar{t}_1^2 + 840\bar{t}_1) & t_1(2220\bar{t}_1^2 - 2100\bar{t}_1^3) & t_1(420\bar{t}_1^3 - 480\bar{t}_1^2) \\ -Z(4t_1 - 30t_1^2 + 60t_1^3 - 84t_1^5) & -840\bar{t}_1) - Zt_1^4(\bar{t}_1 + & +120\bar{t}_1) - Zt_1^4(2\bar{t}_1^3 \\ +70t_1^6 - 20t_1^7) + Z^2(t_1^4\bar{t}_1^3/6) & 4\bar{t}_1^2 + 10\bar{t}_1^3) & +0.5\bar{t}_1^2) \\ t_2(4200\bar{t}_2^3 - 4200\bar{t}_2^2 + 840\bar{t}_2) & t_2(2220\bar{t}_2^2 - 2100\bar{t}_2^3) & t_2(420\bar{t}_2^3 - 480\bar{t}_2^2) \\ -Z(4t_2 - 30t_2^2 + 60t_2^3 - 84t_2^5) & -840\bar{t}_2) - Zt_2^4(\bar{t}_2 + & +120\bar{t}_2) - Zt_2^4(2\bar{t}_2^3 \\ +70t_2^6 - 20t_2^7) + Z^2(t_2^4\bar{t}_2^3/6) & 4\bar{t}_2^2 + 10\bar{t}_2^3) & +0.5\bar{t}_2^2) \\ t_3(4200\bar{t}_3^3 - 4200\bar{t}_3^2 + 840\bar{t}_3) & t_3(2220\bar{t}_3^2 - 2100\bar{t}_3^3) & t_3(420\bar{t}_3^3 - 480\bar{t}_3^2) \\ -Z(4t_3 - 30t_3^2 + 60t_3^3 - 84t_3^5) & -840\bar{t}_3) - Zt_3^4(\bar{t}_3 + & +120\bar{t}_3) - Zt_3^4(2\bar{t}_3^3 \\ +70t_3^6 - 20t_3^7) + Z^2(t_3^4\bar{t}_3^3/6) & 4\bar{t}_3^2 + 10\bar{t}_3^3) & +0.5\bar{t}_3^2) \end{bmatrix}$$

$$D(z) = \begin{bmatrix} \bar{t}_1(4200t_1^3 - 4200t_1^2 + 840t_1) & \bar{t}_1(2100t_1^3 - 2220t_1^2) & \bar{t}_1(420t_1^3 - 480t_1^2) \\ +Z(4\bar{t}_1 - 30\bar{t}_1^2 + 60\bar{t}_1^3 - 84\bar{t}_1^5) & +840t_1) + Z\bar{t}_1^4(t_1 + & +120t_1) + Z\bar{t}_1^4(2t_1^3 \\ +70\bar{t}_1^6 - 20\bar{t}_1^7) + Z^2(\bar{t}_1^4t_1^3/6) & 4t_1^2 + 10t_1^3) & +0.5t_1^2) \\ \bar{t}_2(4200t_2^3 - 4200t_2^2 + 840t_2) & \bar{t}_2(2100t_2^3 - 2220t_2^2) & \bar{t}_2(420t_2^3 - 480t_2^2) \\ +Z(4\bar{t}_2 - 30\bar{t}_2^2 + 60\bar{t}_2^3 - 84\bar{t}_2^5) & +840t_2) + Z\bar{t}_2^4(t_2 + & +120t_2) + Z\bar{t}_2^4(2t_2^3 \\ +70\bar{t}_2^6 - 20\bar{t}_2^7) + Z^2(\bar{t}_2^4t_2^3/6) & 4t_2^2 + 10t_2^3) & +0.5t_2^2) \\ \bar{t}_3(4200t_3^3 - 4200t_3^2 + 840t_3) & \bar{t}_3(2100t_3^3 - 2220t_3^2) & \bar{t}_3(420t_3^3 - 480t_3^2) \\ +Z(4\bar{t}_3 - 30\bar{t}_3^2 + 60\bar{t}_3^3 - 84\bar{t}_3^5) & +840t_3) + Z\bar{t}_3^4(t_3 + & +120t_3) + Z\bar{t}_3^4(2t_3^3 \\ +70\bar{t}_3^6 - 20\bar{t}_3^7) + Z^2(\bar{t}_3^4t_3^3/6) & 4t_3^2 + 10t_3^3) & +0.5t_3^2) \end{bmatrix}$$

•  $\underline{S}_i = (S_i^{[0]}, S_i^{[1]}, S_i^{[2]})^T, \underline{S}_{i-1} = (S_{i-1}^{[0]}, S_{i-1}^{[1]}, S_{i-1}^{[2]})^T$  ولدينا

وهكذا نجد بالتعريف أن  $Z = (h\lambda)^3$  تنتمي إلى منطقة الاستقرار المطلق  $\Omega \equiv \Omega_{t_1, t_2, t_3}$  للطرائق إذا كانت

القيم المميزة الثلاث  $\mu_1 = \mu_1(z)$  و  $\mu_2 = \mu_2(z)$  و  $\mu_3 = \mu_3(z)$  لمسألة القيمة المميزة المعممة:

$$\mu C(Z) \cdot \underline{X} = D(Z) \cdot \underline{X}, \quad \underline{X} \neq 0, \quad (4.4)$$

تقع ضمن قرص الوحدة في المستوي العقدي، يعني إذا تحقق:

$$|\mu_1|, |\mu_2|, |\mu_3| < 1. \quad (4.5)$$

وبما أن المعاملات (في  $\mu$ ) للمعادلة المميزة  $\det(\mu C(Z) - D(Z)) = 0$ ، هي حدودية من الدرجة الرابعة

في  $Z$ ، هذا يعني أنه ليس من السهل إيجاد توصيف صريح ومباشر لمنطقة الاستقرار المطلق  $\Omega_{t_1, t_2, t_3}$  وفق (4.4)-

(4.5). عوضاً عن ذلك سندرس السلوك المقارب للطرائق عندما  $Z \rightarrow \infty$ ، ومن أجل ذلك نضرب المعادلة المميزة بـ

$Z^{-4}$ ، لنحصل على:

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} Z^{-4} \det(\mu C(Z) - D(Z)) =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1^4(\bar{t}_1^3/6)\mu - \bar{t}_1^4(t_1^3/6) & -t_1^4(\bar{t}_1 + 4\bar{t}_1^2 + 10\bar{t}_1^3)\mu & -t_1^4(2\bar{t}_1^3 + \frac{1}{2}\bar{t}_1^2)\mu \\ \hline -\bar{t}_1^4(t_1 + 4t_1^2 + 10t_1^3) & -\bar{t}_1^4(2t_1^3 + \frac{1}{2}t_1^2) & \\ \hline t_2^4(\bar{t}_2^3/6)\mu - \bar{t}_2^4(t_2^3/6) & -t_2^4(\bar{t}_2 + 4\bar{t}_2^2 + 10\bar{t}_2^3)\mu & -t_2^4(2\bar{t}_2^3 + \frac{1}{2}\bar{t}_2^2)\mu \\ \hline -\bar{t}_2^4(t_2 + 4t_2^2 + 10t_2^3) & -\bar{t}_2^4(2t_2^3 + \frac{1}{2}t_2^2) & \\ \hline t_3^4(\bar{t}_3^3/6)\mu - \bar{t}_3^4(t_3^3/6) & -t_3^4(\bar{t}_3 + 4\bar{t}_3^2 + 10\bar{t}_3^3)\mu & -t_3^4(2\bar{t}_3^3 + \frac{1}{2}\bar{t}_3^2)\mu \\ \hline -\bar{t}_3^4(t_3 + 4t_3^2 + 10t_3^3) & -\bar{t}_3^4(2t_3^3 + \frac{1}{2}t_3^2) & \\ \hline \end{array}$$

$$= (a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d),$$

حيث إن  $a, b, c, d$  ثوابت عددية معلومة يمكن حسابها من المعين السابق مباشرة. وبالتالي فإنه يوجد جوار ما

لـ  $Z \rightarrow \infty$  في منطقة الاستقرار المطلق  $\Omega_{t_1, t_2, t_3}$  إذا حققت الجذور  $\mu_1 = \mu_1(\infty), \mu_2 = \mu_2(\infty)$  ،

المميزة للطريقة  $\mu_3 = \mu_3(\infty)$  للمعادلة  $(a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d) = 0$  العلاقات (4.5). نلاحظ مثلاً أننا نحصل على المعادلة

$$\text{المميزة للطريقة } \mu_3 = \mu_3(\infty) \text{ للمعادلة } (a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d) = 0 \text{ العلاقات (4.5). نلاحظ مثلاً أننا نحصل على المعادلة}$$

$$6449725\mu^3 - 568668240\mu^2 + 840695\mu + 1 = 0$$

وقيمها المميزة:  $\mu_1 = -0.118854E-6, \mu_2 = 0.148204E-2, \mu_3 = 0.880213$  تقع بقيمها المطلقة

ضمن قرص الوحدة.

الآن، من أجل القيم المختلفة للوسطاء  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$  التي تحقق العلاقات (4.5) دوماً، يمكن الحصول على

مناطق الاستقرار المطلق  $\Omega_{t_1, t_2, t_3}$  عددياً بتعيين المنحني الحدي  $z = z(\varphi)$  الموافق للمعادلة المميزة

$$\det(e^{\varphi i} C(z) - D(z)) = 0 \text{ [16]. تشير الاختبارات العددية إلى أنه من أجل } 0.888 \leq t_1 < t_2 < t_3 < 1,$$

تملك الطرائق الشرائحية مساحات لانهائية من الاستقرار المطلق بشكل مستقل عن كيفية اختيار نقاط التجميع الثلاث

(المرتبطة بالوسطاء الثلاث) ضمن المجالات المحددة. علاوة على ذلك، لأجل قيم مختلفة أخرى لـ  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$

تملك الطرائق أيضاً مساحات لانهائية من الاستقرار المطلق انظر الجدول (1).

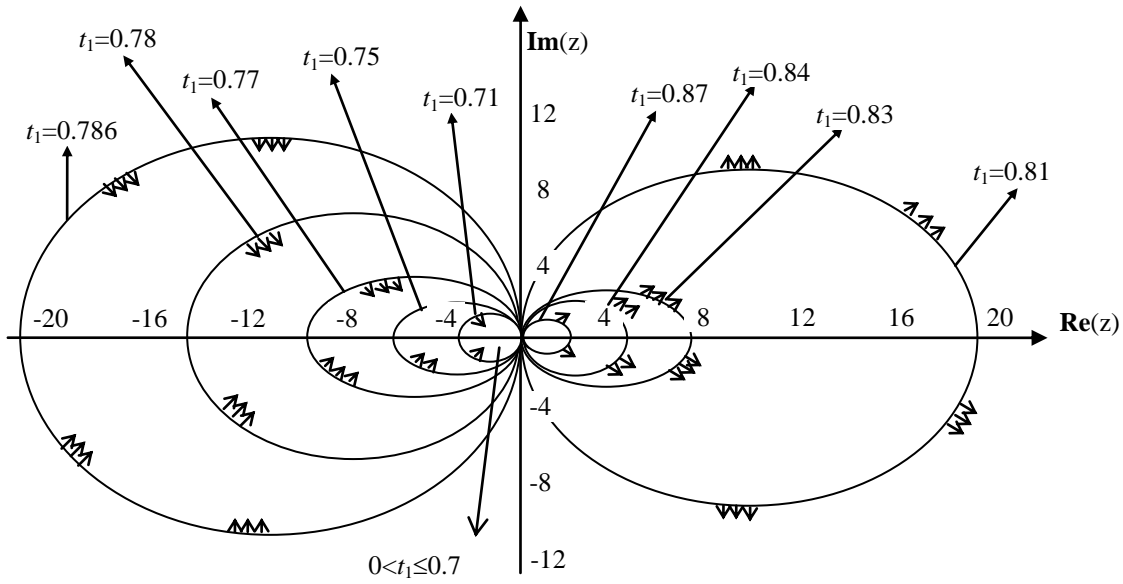
يصف الشكل (1) مناطق الاستقرار المطلق من أجل  $t_3 = 0.96, t_2 = 0.88$  و قيم مختلفة لـ  $t_1$  .

ونحدد منطقة الاستقرار المطلق للطريقة  $t_3 = 0.827326835339885$  في الشكل (2).

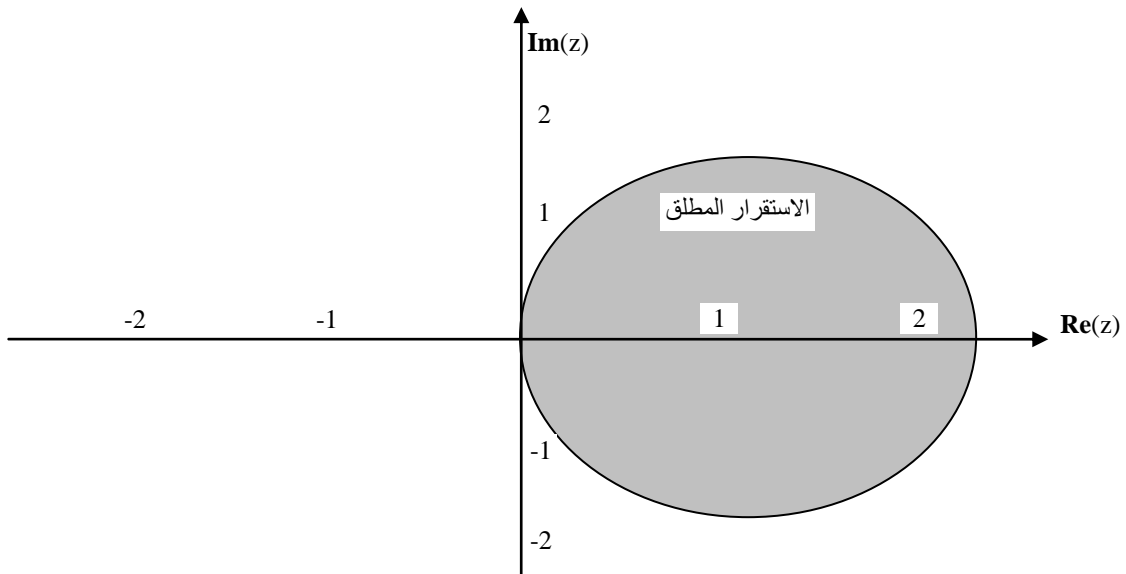
في الشكل (2).

الجدول (1): بعض المجالات التي تحدد مناطق لانهائية من الاستقرار المطلق

$0.51 \leq t_1$	$0.999 \leq t_2 < t_3 < 1$
$0.6 \leq t_1$	$0.981 \leq t_2 < t_3 < 1$
$0.7 \leq t_1$	$0.957 \leq t_2 < t_3 < 1$
$0.8 \leq t_1$	$0.925 \leq t_2 < t_3 < 1$
$0.85 \leq t_1$	$0.9 \leq t_2 < t_3 < 1$
$0.888 \leq t_1 < t_2 < t_3 < 1$	



الشكل (1): مناطق الاستقرار المطلق من أجل  $t_2 = 0.88$ ،  $t_3 = 0.96$  و قيم مختلفة لـ  $t_1$ .



الشكل (2): منطقة الاستقرار المطلق للطريقة  $t_1 = 0.17267316464601143$ ،  $t_2 = 0.5$ ،  $t_3 = 0.8273268353539885$ .

**ملاحظة (3):** إن منطقة الاستقرار المطلق للطريقة الشرانجية ( $t_1 = 0.17267316464601143$ ،  $t_2 = 0.5$ ،  $t_3 = 0.8273268353539885$ ) في الشكل (2) تشغل المنطقة الواقعة داخل الدائرة المظلمة و يبلغ طولها على المحور الحقيقي  $2.34033 \times 10^{18}$ .

**ملاحظة (4):** تم استخدام المقياس  $1/10^3$  لرسم الشكل (1) والمقياس  $1/10^{18}$  لرسم الشكل (2) في الفضاء

العدي.



## النتائج العددية:

نقدم في هذه الفقرة بعض الاختبارات والمقارنات العددية لمسائل في المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثالثة تتراكم حلولها في أبحاث مختلفة وذلك لقياس فعالية الطريقة المقدمه. تملك المسائل المذكورة حولا تحليلية لتمكننا من حساب أخطائها الفعلية. نستخدم الترميز  $\|E^{(k)}\| = \max \|S^{(k)}(x) - u^{(k)}(x)\|$ ،  $k=0,1,2,3$ ، في بعض المسائل ليشير إلى أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي، حيث  $(k)$  يرمز إلى درجة المشتق. وتجدر الإشارة إلى أنه تم استخدام برنامج Mathematica5 في دراسة الجوانب التحليلية، كما تم أيضا إنجاز النتائج العددية باستخدام لغة باسكال 7 في الدقة المضاعفة (double precision) وبنفس الدقة المعتمدة في الأبحاث الأخرى.

مسألة (1): لتكن لدينا مسألة القيمة الحدية الخطية التالية [2]:

$$u'''(x) = xu(x) + (x^3 - 2x^2 - 5x - 3)e^x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

والحل التحليلي:  $u(x) = x(1-x)e^x$ . نلخص في الجدول (2) نتائج عددية لأكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي ومشتقاته حتى الدرجة الثالثة للطريقة المقترحة من أجل  $(t_1=0.172673164646, t_2=0.5, t_3=0.8273268353)$  مع نتائج أكبر الأخطاء المطلقة في الحل العددي لطريقة تعتمد على شرائح-B من المرتبة الرابعة [17]، وطريقة ثنائية تستخدم كثيرات حدود شرائحية من الدرجة الخامسة [2].

الجدول (2) نتائج عددية لأكبر الأخطاء المطلقة في المجال  $[0,1]$  للمسألة (1) لإحدى الطرائق المقدمه مع طريقتين شرائحيتين.

h	fourth-degree B-spline functions [17, 1999]	fourth-order method using quintic splines [2,2003]	Presented method $t_1=0.172673164646, t_2=0.5,$ $t_3=0.8273268353$			
	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E^{(1)}\ $	$\ E^{(2)}\ $	$\ E^{(3)}\ $
1/4	---	---	1.10E-09	2.11E-08	2.29E-08	5.34E-10
1/8	8.36E-02	1.84E-06	4.36E-12	8.30E-11	9.30E-11	2.40E-11
1/16	4.22E-02	1.04E-07	1.71E-14	3.25E-13	3.65E-13	9.86E-15
1/32	2.146E-02	6.32E-09	2.85E-16	1.23E-15	7.94E-15	2.11E-16

مسألة (2): لتكن لدينا مسألة القيمة الحدية الخطية التالية [4]:

$$u'''(x) = -\frac{1}{x}u''(x) + \frac{1}{x^2}u'(x) + \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

مع الشروط الحدية:

$$u(1) = \frac{99}{104} + \frac{26 \log^2(2)}{21}, \quad u'(1) = -\frac{5}{13} - \frac{40 \log(2)}{21}, \quad u''(2) = \frac{3}{26} + \frac{\log(2)}{7}.$$

تصف هذه المسألة الحدية الانحناء المتناسق لصفحة دائرية محملة الجانب تملك الحل التحليلي الوحيد:

$$u(x) = \left[ \frac{26}{104} \log(x) - \frac{33}{104} - \frac{\log(2)}{3} \right] x^2 + \log(2) \left[ \frac{7}{21} - \frac{26 \log^2(2)}{21} \right] + \frac{26 \log^2(2)}{21} + \frac{33}{26}$$

ندون في الجدول (3) نتائج أكبر الأخطاء المطلقة للحل العددي ومشتقاته حتى الدرجة الثالثة في المجال [1,2] للطريقة المقدمية من أجل  $(t_3=0.8273268353, t_2=0.5, t_1=0.172673164646)$  مع نتائج مماثلة للطريقة مجموعة تعتمد على شرائح-B من مرتبة عالية في الفضاء  $C^3$  وفترات نقاط التجميع أطولها  $r=3/5$  [4,2007].

الجدول(3): أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي ومشتقاته حتى الدرجة الثالثة في المجال [1,2] للمسألة(2).

h	$C^3$ A high order B-spline collocation method with $r=3/5$ [4, 2007]				<b>Presented method</b> $t_1=0.172673164646, t_2=0.5,$ $t_3=0.8273268353$			
	$\ E\ $	$\ E^{(1)}\ $	$\ E^{(2)}\ $	$\ E^{(3)}\ $	$\ E\ $	$\ E^{(1)}\ $	$\ E^{(2)}\ $	$\ E^{(3)}\ $
1/5	3.13E-05	3.65E-05	2.31E-04	3.74E-03	2.41E-10	1.36E-10	8.84E-11	1.57E-10
1/7	8.22E-06	9.52E-06	6.79E-05	1.45E-03	1.74E-11	9.89E-12	8.32E-12	1.31E-11
1/9	3.02E-06	3.48E-06	2.76E-05	7.96E-04	2.40E-12	1.37E-12	1.35E-12	1.97E-12

مسألة(3): لتكن المعادلة التفاضلية الخطية الشاذة [1]:

$$Lu \equiv -\varepsilon u''' - 2u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

التي تخضع للشروط الحدية:

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u'(1) = 1,$$

ونحقق الحل التحليلي:

$$u(x) = e^{-\frac{2x}{\varepsilon}} \left[ \varepsilon e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2(x+1)}{\varepsilon}} (x^2 - 6x - 4 + \varepsilon) + e^{\frac{2x}{\varepsilon}} (x^2 - 4x - 4) \right] / (4e^{\frac{2}{\varepsilon}} - 4)$$

حيث  $\varepsilon$  عدد حقيقي موجب صغير. ندرج في الجدول (4) الحل العددي والخطأ المطلق في الحل العددي للطريقة المقدمية من أجل  $(t_3=0.8273268353, t_2=0.5, t_1=0.172673164646)$  مع نتائج مماثلة للطريقة العددية في [1] لأجل  $\varepsilon = 10^{-4}$ . وفي الجدول (5) نقدم أيضا الحل العددي والخطأ المطلق للطريقة المقدمية من أجل  $(t_3=0.99, t_2=0.8, t_1=0.38)$  و  $(t_3=0.8273268353, t_2=0.5, t_1=0.172673164646)$  و  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

الجدول(4): الحل العددي والخطأ المطلق في الحل العددي والحل الحقيقي للمسألة(3).

x	A computational method [2002,1] $\varepsilon = 10^{-4}$		<b>Presented method</b> $(t_1=0.172673164646, t_2=0.5,$ $t_3=0.82732683535),$ $\varepsilon = 10^{-4}$		
	الحل العددي	الخطأ المطلق	الحل العددي	الحل الدقيق	الخطأ المطلق
0.100	1.147979	1.124173E-04	1.14747499999984	1.147475000000	1.60094E-13
0.200	1.290673	3.622702E-04	1.28997499999984	1.289975000000	1.59872E-13
0.300	1.428371	6.121230E-04	1.42747499999984	1.427475000000	1.1382E-12
0.400	1.561071	8.619561E-04	1.55997499999984	1.559975000000	1.60094E-13
0.500	1.688774	1.111791E-03	1.68747499999984	1.687475000000	1.60094E-13
0.600	1.811481	1.361662E-03	1.80997499999984	1.809975000000	3.13238E-12
0.700	1.929190	1.611532E-03	1.92747499999984	1.927475000000	3.34621E-12

0.800	2.041902	1.861400E-03	2.03997499999984	2.03997500000	1.59872E-13
0.900	2.149618	2.111204E-03	2.14747499999984	2.14747500000	1.59872E-13
1.000	2.252336	2.361072E-03	2.24997499999984	2.24997500000	1.59872E-13

الجدول(5): الحل العددي والخطأ المطلق في الحل العددي والحل الحقيقي لأجل  $\varepsilon = 10^{-5}$  للمسألة(3).

x	Presented method $t_1=0.38, t_2=0.8,$ $t_3=0.99$	Presented method $t_1=0.172673164646, t_2=0.5, t_3=0.82732683535$		
	الخطأ المطلق	الحل العددي	الحل الدقيق	الخطأ المطلق
0.100	2.19732 E-07	1.14749750006206	1.1474975000	6.17433E-11
0.200	2.19803 E-07	1.28999750003131	1.2899975000	1.32664E-10
0.300	2.19766 E-07	1.42749750000328	1.4274975000	9.50899E-11
0.400	2.19811 E-07	1.55999749997839	1.5599975000	1.40472E-10
0.500	2.19791 E-07	1.68749749995673	1.6874975000	1.19606E-10
0.600	2.19713 E-07	1.80999749993829	1.8099975000	4.23621E-11
0.700	2.19710 E-07	1.92749749992342	1.9274975000	3.89226E-11
0.800	2.19825 E-07	2.03999749991270	2.0399975000	1.54381E-11
0.900	2.19766 E-07	2.14749749990605	2.1474975000	9.50098E-11
1.000	2.19766 E-07	2.24999749990387	2.2499975000	9.50098E-11

مسألة (4): لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتعددة الحالات، الممثلة وفق النظام التالي [5,6,7,8,9,10]:

$$u''' = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ u-1 & \text{for } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{for } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

والخاضعة لشروط حدية من الشكل:

$$u(a) = a_0, \quad u'(a) = a_1, \quad u'(b) = b_1,$$

مع الحل الحقيقي :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 1 + a_2 e^x + e^{-x/2} [a_3 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + a_4 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x)], & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2} a_5 x(x-1) + a_6, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

حيث:  $a_3 = -0.8745473677079637, a_2 = -0.11525244860537857, a_1 = 0.24391096222648$

$a_6 = -0.06537630092111, a_5 = -0.24213890868443, a_4 = -0.478030291153926$

نلخص في الجدول(6) نتائج كمقارنات للطريقة المقدمه من أجل  $(t_3=0.75, t_2=0.5, t_1=0.25)$  مع مجموعة

من الطرائق: الأولى شرائحية بحدوديات تكعيبية [5] والثانية شرائحية بحدوديات من الدرجة الرابعة [6]، والثالثة شرائحية تستخدم دوال من الدرجة الرابعة من غير كثيرات الحدود [7]، والرابعة تستخدم شرائح-B من الدرجة الرابعة [8]، والخامسة طريقة مطورة عن طريقة الفروق المنتهية [9]، والأخيرة شرائحية تستخدم دالة من الدرجة الرابعة تعتمد على دالتي  $\sin$  و  $\cos$  [10].

الجدول(6): أكبر الأخطاء المطلقة على كامل مسار الحل العددي للمسألة(4).

$h$	Cubic spline [5,2003]	Quartic spline [6, 2004]	non-poly. spline [7,2005]	Quartic B-spline [8,2006]	AL-SAID et al. [9,2007]	Quartic non-poly. spline [10,2007]	<b>Presented method</b> $t_1=0.25, t_2=0.5, t_3=0.75$
	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $	$\ E\ $
<b>1/16</b>	1.23E-03	1.15E-03	7.12E-04	1.13E-03	----	7.302E-07	8.87667E-13
<b>1/32</b>	5.53E-04	5.32E-04	4.05E-04	5.30E-04	2.98E-05	1.829E-07	1.60564E-13
<b>1/64</b>	2.61E-04	2.56E-04	2.24E-04	5.52E-04	7.44E-06	4.574E-08	7.07916E-15
<b>1/128</b>	1.27E-04	1.26E-04	1.15E-04	1.23E-04	1.86E-06	1.143E-08	3.79877E-15

### الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث طريقة شرائحية مجموعة من المرتبة السابعة في الفضاء  $C^3$ ، استخدمت لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية الخطية المعممة من المرتبة الثالثة التي لها تطبيقات هامة في الفروع العلمية. أظهرت الدراسة أن الطريقة موجودة بشكل وحيد عندما تطبيق لمثل هذه المسائل وهي مستقرة ومتناسقة ومتقاربة وتغطي نطاقا من الاستقرار المطلق في الفضاء العنقدي الشكليين (1) و(2). كما تم تأكيد الدراسة النظرية في فقرة النتائج العددية خلال حل مجموعة متنوعة من المسائل وفق شروط حدية متنوعة، تلك المسائل التي تداول حلها في العديد من المراجع الحديثة. أشارت المقارنات العددية لنتائج طريقنا مع نتائج لطرائق أخرى إلى فعالية وكفاءة الطريقة المقدمة، فمثلا بمراجعة الجداول (2) و(3) و(4) و(5) نجد أن الطريقة الشرائحية المقدمة من أجل  $(t_1=0.172673164646, t_2=0.5, t_3=0.82732683535)$  تجاوزت في الدقة الطرائق الشرائحية المقدمة من الأعمال [1,2,4,17]، وأن الطريقة الشرائحية المقدمة من أجل  $(t_1=0.25, t_2=0.5, t_3=0.75)$  هي أيضا أكثر دقة من الطرائق المذكورة في الأعمال [5,6,7,8,9,10]. وأخيرا يمكننا القول إن الطريقة أثبتت فعاليتها في حل المسائل المطروحة وخاصة المسائل القاسية (مسألة3) والمسائل الحائلة (مسألة4).

### المراجع:

1. VALARMATHI S. and RAMANUJAM N., *A computational method for solving boundary value problems for third-order singularly perturbed ordinary differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 129, (2002), pp. 345–373.
2. KHAN,A. and AZIZ, T., *The numerical solution of third-order boundary-value problems using quintic splines*, Applied Mathematics and Computation, 137, (2003) ,pp. 253–260.
3. BABU, A. R. and RAMANUJAM, N., *An asymptotic finite element method for singularly perturbed third and fourth order ordinary differential equations with discontinuous source term*, Applied Mathematics and Computation, Vol. (191), Issue 2, (2007), pp. 372-380.
4. JATOR, S. and SINKALA, Z., *A high order B-spline collocation method for linear boundary value problems*, Applied Mathematics and Computation Vol.(191), No.(1), (2007), pp. 100-116.

5. AL-SAID, E., A. and NOOR, M., A., *Cubic splines method for a system of third-order boundary value problems*, Applied Mathematics and Computation, 142, (2003), pp. 195-204.
6. NOOR, M., A. and AL-SAID, E. E., *Quartic splines solutions of third-order obstacle problems*, Applied Mathematics and Computation, 153, (2004), pp. 307-316.
7. SIRAJ-ul-Islam, KHAN, M., A., TIRMIZI, I., A. and TWIZELL, E., H., *Non polynomial spline approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems*, Applied Mathematics and Computation, Vol.(168), No.(1), (2005), pp. 152-163.
8. GAO, F. and CHI, Chun-Mei, *Solving third-order obstacle problems with quartic B-splines*, Applied Mathematics and Computation, 180, (2006), pp. 270-274.
9. AL-SAID, E., A. and NOOR, M., A., *Numerical solutions of third-order system of boundary value problems*, Applied Mathematics and Computation, 190, (2007), pp. 332-338.
10. SIRAJ-ul-Islam, , TIRMIZI, I. A. and KHAN, M. A., *Quartic non-polynomial spline approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems*, J. Math. Anal. Appl., 335, (2007), pp.1095-1104.
11. MAHMOUD, S. M., *Quintic Spline Collocation Methods for the Solution of Linear Second-Order Boundary Value Problems* , Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series, Vol. (29), No (1), (2007), pp. 204-219.
12. EL-HAWARY, H. M and MAHMOUD, S. M., *On Some 4-Point Spline Collocation Methods for Solving Ordinary Initial Value Problem*, International J. Computer Mathematics, Vol. (79), No. 8, (2002), pp. 931-944.
13. EL-HAWARY, H. M and MAHMOUD, S. M., *On Some 4-Point Spline Collocation Methods for Solving Second-Order Initial Value Problems*, Applied Numerical Mathematics, 38, (2001), pp. 223-236.
14. BURDEN, R. L. and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS-KENT, Boston Massachusetts, (1993), 559-560.
15. HAIRER, E., NORSETT, S., p. and WANNER G., *Solving ordinary differential equations-Nonstiff problems*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, (1993).
16. HALL, G. and J. M. Watt, *Modern numerical methods for ordinary differential equations*, Clarendon Press, Oxford, (1976).
17. CAGLAR, H.N., CAGLAR, S.H. and TWIZELL E.H., *The numerical solution of third-order boundary-value problems with fourth-degree B-spline functions*, International J. Computer Mathematics. 71, (1999), pp. 373–381.

