مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

تعميم مسألة أولر إلى فضاء باناخ على الساحة العقدية

الدكتور حسن بدور *
صديقة طربيه**
هناء سكاف ***
عروبة حمادة ****

(تاريخ الإيداع 30 / 10 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/12/16)

□ الملخّص □

يعالج هذا البحث المسألة القصوى الشرطية الآتية: أوجد القيمة الصغرى للدالي التكاملي

$$\Phi_0(f)=re\int_\Gamma F_0[f(z),f'(z)]dz$$

تحت شروط إضافية من النوع

$$\Phi_1(f)=re\int_\Gamma F_1[f(z),f'(z)]dz\le 0\,,$$

$$f(a)-A=0,\ \ f(b)-B=0$$

حيث f تابع معرف في فضاء باناخ للتوابع التحليلية في قرص الواحدة .

لقد تم البرهان على أنه إذا كان f^* حلاً للمسألة أعلاه فإنه يحقق المعادلات التفاضلية

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=0$$

مع العلم أن λ متعلق بمضاريب لاغرانج.

الكلمات المفتاحية: المسائل القصوى
مبدأ القيمة القصوى

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين – اللاذقية – سورية – البريد الإلكتروني: hbadour@scs-net.org
** مديرة أعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** قائمة بالأعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**** قائمة بالأعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

Generalization of Lagrange Problem to the Complex Domain

Dr. Hassan Baddour *
Sadiqa Tarabeh **
Hanaa Skaf ***
Aroba Hamada ****

(Received 30 / 10 / 2008. Accepted 16/12/2008)

☐ ABSTRACT ☐

This paper deals with the following conditional external problem: find the minimum value of the integral functional

$$\Phi_0(f) = re\int_{\Gamma} F_0[f(z), f'(z)]dz$$

under some boundary conditions and additional constraints

$$\Phi_1(f) = re\int_{\Gamma} F_1[f(z), f'(z)]dz \le 0,$$

$$f(a) - A = 0,\ f(b) - B = 0$$

where f is some function defined in Banach Space of holomorphic functions in unit disc.

It has been shown that the solution f^* of the above problem satisfies the differential equations

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right) + \lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial f} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right) = 0$$

and λ is the Lagrange Multiplier.

Keywords: External Problem, maximum Principle.

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria, Email: hbadour@scs-net.org.**
** **Work Manager, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Academic Assistant Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Academic Assistant, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعود دراسة المسائل القصوى على الساحة الحقيقية إلى القرن السابع عشر . فقد وضع أولر في ذلك الحين عدة مسائل من هذا النوع ظهر على أساسها العلم المعروف بحساب التحولات (Calculus of Variations) ويمكن التعبير عن المسألة الكلاسيكية في حساب التحولات كما يلي:

أوجد القيمة الصغرى الشرطية للدالي:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

بشرط أن يكون:

$$I(y) = \int_a^b G(x, y, y')dx = l\ ,\ y(a) = A,\ y(b) = B$$

مع بعض الشروط الإضافية الأخرى على F و G ومشتقاتهما.

هذه المسألة عممت أكثر من مرة وفي اتجاهات مختلفة . فقد أدت مثلاً إضافة بعض الشروط على قيم التابع $y(x)$ ومشتقاته بالنسبة للدالي $I(y)$ إلى ما يعرف اليوم بنظرية الحلول المثلى (أو نظرية المثلويات the theory of optimization) . وعندئذ تبين أنه بالإمكان استخدام الطرق الحقيقية في دراسة المسائل القصوى على الساحة العقدية . وكذلك أصبح ممكناً تعميم المسائل المعروفة في حساب التحولات إلى الساحة العقدية ومنها المسألة المطروحة أعلاه ثم إيجاد الشرط اللازم لوجود الحل من خلال مبدأ القيمة القصوى (يوفي- تيخوميروف). ويمكن طرح هذا المبدأ بالشكل المناسب للمسألة التي سنعالجها كما يلي:

أوجد القيمة القصوى الصغرى للدالي Φ_0 بشرط أن يكون $\Phi_j \le 0,\ j = 1,2,...,m$ ، علماً أن هذه الداليات معرفة في فضاء ما X (باناخ مثلاً) . ويمكن أن تطرح هذه المسألة باختصار كما يلي:

مسألة 1. حل المسألة:

$$\Phi_0 = \Phi_0(x) \longrightarrow min\ ,\ x \in X$$
$$\Phi_j = \Phi_j(x) \le 0, \quad j = 1,2,...,m.$$

نذكر أن x^* تعد حلاً (دالة قصوى) للمسألة 1 [5] إذا كان $\Phi_0(x^*) \le \Phi_0(x)$ من أجل كل دالة x واقعة في جوار x^* وكان: $\Phi_j(x^*) \le 0, j = 1,2,...,m$.

يتم حل هذه المسألة بفرض أن x تنتمي إلى الصف C^1 (C^1 هو صف التوابع الشتقاقية من المرتبة الأولى مع فرض أن المشتق مستمر بالنسبة للنظيم) ثم بناء تابع لاغرانج الآتي:

$$L = L(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \Phi_j(x)$$

حيث تعرف $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ بمضاريب لاغرانج وتكتب اختصاراً بالشكل: $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$. وعندئذ بحسب مبدأ القيمة القصوى تكون x^* حلاً للمسألة 1 إذا كان مشتق فريشيه لتابع لاغرانج معدوماً أي إذا كان:

$$L_x(x^*, \lambda) \circ h = 0\ , \quad \forall h \in X \qquad (*)$$

يعرف هذا الشرط بشرط لاغرانج (Lagrange Condition).

أهمية البحث وأهدافه:

تتبع أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة في المسائل القصوى المتعلقة بالداليات العقدية وخصوصاً بعد أن أصبح بالإمكان – كما ذكرنا في المقدمة – استخدام الطرق الحقيقية ،متمثلة بنظرية الحلول المثلى، في دراسة مثل هذه المسائل. وفي هذا السياق نهدف في هذا البحث إلى دراسة المسائل الشرطية على الساحة العقدية كتعميم لبعض المسائل المعروفة في حساب التحولات .

طريقة البحث ومواده:

طريقة البحث المتبعة هي طريقة المثلويات (OPTIMIZATION) وقد تم تحديداً استخدام مبدأ القيمة القصوى (يوفي– تيخوميروفThe Extremum Principle of Ioffe- Tickhomirov) في سبيل إيجاد حلول بعض المسائل الشرطية

المناقشة والنتائج:

من المعلوم في حساب التحولات أن الشرط اللازم لوجود القيمة الصغرى الشرطية للدالي:

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

هو تحقيق $y(x)$ لمعادلة أولر الآتية: :

$$F_y' - \frac{d}{dx}F_{y'}' = 0 .$$

وهنا يتساءل المرء إذا كان بالإمكان طرح مثل هذه المسألة على الساحة العقدية من خلال البحث عن القيمة القصوى للدالي :

$$\Phi(f)=re\int_\Gamma F\left[f(z),f'(z)\right]dz$$

أو ما شابهه مع بعض الشروط الإضافية.

وقد تبين فعلاً أن ذلك ممكن باستخدام مبدأ القيمة القصوى . فقد تم بناء على ما تقدم طرح المسألة المناسبة في فضاء باناخ (وهي المسألة 2) وتم إيجاد الشرط اللازم لوجود القيمة القصوى (النظرية1) بواسطة معادلة مشابهة لمعادلة أولر السابقة ولكنها أكثر عمومية . وكنتيجة لهذه النظرية تم عرض بعض التطبيقات التي تبين كيفية البحث عن حل المسألة.

عرض المسألة في فضاء باناخ:

لكن E فضاء التوابع التحليلية في قرص الواحدة $D(|z|<1)$ وليكن E فضاء باناخ. ولنبحث عن القيمة القصوى الصغرى للدالي

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}F_0[f(z),f'(z)]dz$$

بشرط أن يكون

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma}F_1[f(z),f'(z)]dz=l\,,\ \ f(a)=A,\ \ f(b)=B$$

مع العلم أن مشتقات التابعين $F_0\ ,F_1$ بالنسبة لـِ f و f' مستمرة و Γ منحن نظامي في القرص D معادلته:

$$\Gamma: z=z(t),\ \ \alpha\le t\le\beta,\ z\in D$$

هذه المسألة مرادفة للمسألة الكلاسيكية في حساب التحولات التي عرضناها في المقدمة . و نستطيع هنا نفرض أن $l=0$ أو $l\le 0$ دون التقليل من عمومية المسألة . بذلك يمكن طرح المسألة هذه باختصار بالشكل:

مسألة 2. حل المسألة:

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}F_0[f(z),f'(z)]dz\longrightarrow min\,,\ \ f\in E \qquad (1)$$

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma}F_1[f(z),f'(z)]dz\le 0\,, \qquad (2)$$

$$f(a)-A=0,\ \ f(b)-B=0 \qquad (3)$$

سوف نحتاج فيما بعد إلى الاستفادة من التمهيدية الآتية:

تمهيدية1. إذا كان $G(z)$ تابعاً مستمراً في قرص الواحدة وكان

$$\int_0^1 re[G(z_0t)h(z_0t)]dt=0$$

من أجل كل تابع $h\in E$ محقق للشرط $h(0)=h(z_0t)=0$ حيث $z_o\in D$ فإن $G(z)\equiv 0$ من أجل كل النقاط z الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_0 .

البرهان. إذا كانت $G(z)$ لا تساوي الصفر على القطعة المستقيمة المذكورة فإنه يوجد نقطة ما مثل $z'=z_0t'$ حيث $t'\in[0,1]$ وبحيث يكون $reG(z_0t')\neq 0$. لنفرض جدلاً أن $reG(z_0t')>0$ (إذا كان $reG(z_0t')<0$ فإن البرهان مشابه) . في هذه الحالة يوجد مجال جزئي $[t_1,t_2]$ ضمن المجال $[0,1]$ يكون فيه $reG(z_0t')>0$.

لنعرف الآن التابع g ضمن المجال $[0,1]$ بالعلاقة:

$$g(t)=\begin{cases}(t-t_1)(t-t_2)t(1-t), & t\in[t_1,t_2]\\ 0, & t\notin[t_1,t_2]\end{cases}$$

من نظرية وايرشتراس [5] نستنتج وجود متتالية من كثيرات الحدود $W_n^0(t)$ المتقاربة بانتظام نحو التابع:

$$g_0(t)=\begin{cases}(t-t_1)(t-t_2), & t\in[t_1,t_2]\\ 0, & t\notin[t_1,t_2]\end{cases}$$

ومنه نستنتج تقارب المتتالية

$$W_n(t)=W_n^0(t)t(1-t)$$

نحو التابع $g(t)$. في هذه الحالة نلاحظ أن متتالية كثيرات الحدود العقدية $P_n(t)=W_n(z/z_0)$ حقيقية على القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_0 وإضافة إلى ذلك:

$$P_n(z_0)=P_n(0)=0, \quad P_n \in E$$

لذلك وبحسب الفرض سيكون

$$0=\int_0^1 re\left[G(z_0t)P_n(z_0t)\right]dt=\int_{t_1}^{t_2} re\left[G(z_0t)W_n(t)\right]dt$$

وبالتناهي بِ n نحو اللانهاية سيكون كذلك:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[reG(z_0t)\right](t-t_1)(t-t_2)t(1-t)dt=0$$

وهذا مستحيل لأن المقدار المكامل موجب دائماً ضمن المجال $[t_1,t_2]$ وعليه $re\,G(z_0t)=0$.

بمحاكمة مشابهة نبين أن $im\,G(z_0t)=0$ وبالتالي $G(z_0t)=0$ في كل نقاط القطعة المستقيمة المذكورة وهو المطلوب.

الشرط اللازم لوجود الحل:

نظرية1. إذا كان f^* حلاً للمسألة 2 فإن هذا الحل يحقق المعادلات التفاضلية:

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=0 \qquad (4)$$

حيث λ هو أحد مضاريب لاغرانج.

البرهان. نلاحظ أن الشرطين الإضافيين (3) يظهران بمقادير عقدية ولكي يكونا مناسبين لشروط مبدأ القيمة القصوى نضعها بالأشكال

$$re\left[f(a)-A\right]=0,\ im\left[f(a)-A\right]=0$$
$$re\left[f(b)-B\right]=0,\ im\left[f(b)-B\right]=0$$

أو ما يكافؤها

$$\Phi_2(f)=\mp re\left[f(a)-A\right]\le 0, \qquad \Phi_3(f)=\mp re\left[f(b)-B\right]\le 0$$
$$\Phi_4(f)=\mp im\left[f(a)-A\right]\le 0, \qquad \Phi_5(f)=\mp im\left[f(b)-B\right]\le 0$$

ويمكن أن يختصر تابع لاغرانج للمسألة 2 في هذه الحالة إلى الشكل:

$$L(f,\lambda)=\sum_{j=0}^{5}\lambda_j\,\Phi_j(f)=\lambda_0 re\int_\Gamma F_0\left[f(z),f'(z)\right]dz+\lambda_1 re\int_\Gamma F_1\left[f(z),f'(z)\right]dz$$
$$+\lambda_2 re\left[f(a)-A\right]+\lambda_3\, re\left[f(b)-B\right]+\lambda_4 im\left[f(a)-A\right]+\lambda_4 im\left[f(b)-B\right]$$

أو الشكل

$$L(f,\lambda)=re\left\{\int_\Gamma \lambda_0F_0\left[f(z),f'(z)\right]dz+\lambda_1F_1\left[f(z),f'(z)\right]\right\}dz$$

$$+re\{\lambda_2[f(a)-A]+\lambda_3\,[f(b)-B]\}+im\{\lambda_4[f(a)-A]+\lambda_5[f(b)-B]\}$$

والآن بحسب مبدأ القيمة القصوى $(*)$ يكون f^* حلاً لهذه المسألة إذا وجدت أعداد $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_5$ لا تساوي الصفر دفعة واحدة وتحقق شرط لاغرانج:

$$L_f\left(f^*,\lambda\right)\circ h=0$$

بالنسبة للعنصر h من E . وهذا يعني أن المساواة

$$re\int_\Gamma\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}h+\frac{\partial F_0}{\partial f'}h'\right)+\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}h+\frac{\partial F_1}{\partial f'}h'\right)\right]dz$$
$$+re[\lambda_2h(a)+\lambda_3\,h(b)]+im[\lambda_4h(a)+\lambda_5h(b)]=0$$

-محققة في نقطة القيمة القصوى f^* . ولكن وبما أن التزايد $f+h$ يجب أن يحقق الشروط الابتدائية فإننا نستطيع أن نفرض أن. $h(a)=0,\ h(b)=0$

وعندئذ

$$L_f\left(f^*,\lambda\right)\circ h=re\int_\Gamma\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}h+\frac{\partial F_0}{\partial f'}h'\right)+\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}h+\frac{\partial F_1}{\partial f'}h'\right)\right]dz=0$$

والآن وبدون التخلي عن العمومية نستطيع اعتبار المنحني Γ قطعة مستقيمة واصلة بين 0 و z_0 معادلتها:

$$\Gamma: z=z_0t,\ 0\le t\le 1,\ |z_0|<1$$

وبالتالي

$$re\int_0^1\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}h(z_0t)+\frac{\partial F_0}{\partial f'}h'(z_0t)\right)+\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}h(z_0t)+\frac{\partial F_1}{\partial f'}h'(z_0t)\right)\right]z_0dt=0$$

بالتكامل بالتجزئة آخذين بالحسبان أن $h(0)=0,\ \ h(z_0)=0$ نحصل على المساواة:

$$\int_0^1 re\left\{\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)\right]z_0h(z_0t)\right\}dt=0.$$

من التمهيدية1 نحصل على المعادلة

$$\left[\lambda_0\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)\right]=0$$

الصحيحة في كل نقطة من القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_0 . من تحليلية التابعين F_0 و F_1 نستنتج صحة العلاقة السابقة في كل قرص الواحدة. فإذا وضعنا $\lambda=\lambda_1/\lambda_0$ آخذين بالحسبان أن λ_0 مختلفة عن الصفر حصلنا في النهاية على المعادلة التفاضلية :

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=0$$

وهو المطلوب.

ملاحظة. باستخدام الشرطين الإضافيين نستطيع إيجاد ثابتي التكامل وبالتالي تحديد القيمة القصوى بدقة للمسألة المعطاة

تطبيقات ونتائج:

مسألة 3 . في فضاء التوابع التحليلية E حل المسألة الآتية:

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}\left(f^2+f'^2\right)dz \longrightarrow min\,,\ f\in E$$

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma}(f')^2dz\le 0\,,$$

$$f(0)-A=0,\ f(z_0)-B=0$$

$$\Gamma: z=z_0t,\ 0\le t\le 1,\ |z_0|<1$$

الحل. لكي يكون f^* حلاً للمسألة 3 يجب أن تحقق الدالتان:

$$F_0=f^2+f'^2\ ,\qquad F_1=f'^2$$

(بحسب النظرية 1) المعادلة التفاضلية (4).

في سبيل ذلك نحسب المشتقات:

$$\frac{\partial F_0}{\partial f}=2f\ ,\ \frac{\partial F_0}{\partial f'}=2f'\ ,\ \frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}=2f''\Rightarrow \frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}=2f-2f''$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial f}=0\ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial f'}=2f''\ ,\ \frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}=2f''\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}=-2f''$$

ثم نعوض في المعادلة(4) فيكون:

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=2f'-2f''+\lambda(-2f'')=0$$

نستنتج من ذلك أن الحل f^* يحقق المعادلة التفاضلية الآتية:

$$(1+\lambda)f''(z)-f'(z)=0$$

وحل هذه المعادلة-كما نعلم- هو:

$$f(z)=c_1e^{\alpha z}+c_2e^{-\alpha z}\,.$$

لإيجاد الثابتين c_1,c_0 نستفيد من الشرطين الإضافيين $f(0)=A,\ f(z_0)=B$ فنجد بعد حسابات بسيطة أن:

$$c_1=\frac{Ae^{-\alpha z_0}+B}{cosh z_0}\ ,\quad c_2=\frac{Ae^{\alpha z_0}-B}{cosh z_0}$$

مع العلم أن $\alpha=1/\sqrt{1+\lambda}$.

إذا كانت المسألة مشروطة بمساواة وليس بمتراجحة، كما سبق ورأينا سابقاً، فإننا نعوض كل مساواة بمتراجحتين مكافئتين لها، ثم نستخدم مبدأ القيمة القصوى، ونعمم النتيجة من خلال النظرية1. كمثال على ذلك لنأخذ المسألة السابقة بعد استبدال شرط المتراجحة بمساواة أي المسألة:

مسألة 4 . حل المسألة:

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}\left(f^2+f'^2\right)dz \longrightarrow min\,,\ f\in E$$

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma} f'^2 dz=0\,,$$

$$f(0)-A=0,\ f(z_0)-B=0$$

$$\Gamma: z=z_0 t,\ 0\le t\le 1,\ |z_0|<1$$

الحل. في هذه الحالة نضع شرط المساواة $\Phi_1(f)=0$ بواسطة شرطين مكافئين له هما:

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma} f'^2 dz\le 0\,,\ -\Phi_1(f)=-re\int_{\Gamma} f'^2 dz\le 0\,,$$

وعندئذ ولكي يكون f^* حلاً للمسألة 4 يجب أن تحقق الدوال:

$$F_0=f^2+f'^2\,,\ F_1=f'^2\,,\quad F_2=-f'^2$$

–اعتماداً على النظرية 1– المعادلة التفاضلية :

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\lambda'\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)+\lambda''\left(\frac{\partial F_2}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_2}{\partial f'}\right)=0$$

ولكن وبما أن $F_1=-F_2$ فإن

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=-\left(\frac{\partial F_2}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_2}{\partial f'}\right)$$

ولذلك

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_0}{\partial f'}\right)+\left(\lambda'-\lambda''\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_1}{\partial f'}\right)=0$$

بوضع $\lambda=\lambda'-\lambda''$ نلاحظ أن حل المسألة 4 لا يختلف شكلاً عن حل المسألة 3 حيث نستطيع أن نحسب λ من الشرط $\Phi_1(f)=0$ نفسه .

الاستنتاجات والتوصيات:

بالإمكان تعميم المسألة إلى فضاءات أخرى وبداليات متعددة المتحولات حيث يمكن الحصول على تعميمات أخرى لمسائل في حساب التحولات مثل مسألة لاغرانج ومسألة أولر بواسون .

المراجع:

[1] BADDOUR,H. *The izoperimetric problem in Hardy space* ,Irbid Journal of Research and Studies , Vol (6) No (1) 2003 (1-13)

[2] GELFAND, I. FOMIN, S. *Calculus of Variations* (Russian). Moscow 1979.

[3] IOFFE, A.D. TICHOMIROV, W.I. *The theory of extremal problems* North-Holland, Amsterdam, 1979.

[4] PONTRIGIN, S.BOLTIANSKI, V.GGAMRKLIDZE, R.VMISHCHENKO, E.F, *The mathematical theory of optimal processes* , Wiley (1962).

[5] RALSTON, A. *Introduction to numerical analysis* , Warsaw 1961

[6] ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[7] TICHOMIROV, V.M.*Fundamental principles of the theory of extremal problems,* Wiley & Sons 1986.