

تحليل الاستقرار لنظام فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي باستخدام طريقتي ليابونوف

*الدكتور أحمد الكردي

(تاريخ الإيداع 11 / 9 / 2008. قُبل للنشر في 25/11/2008)

□ الملخص □

النماذج الرياضية للتنافس بين الأنواع هي من بين المسائل الهامة لديناميكا السكان بعدة أنواع. في هذه المقالة، نجري تحليلاً رياضياً موضحاً بأشكال بيانية باستخدام **Matlab** لإعطاء تبصر عن حالة التعايش بين نوعين يخضعان لنظام فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي، كما نقدم تحليل الاستقرار لنظام فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي باستخدام طريقتي ليابونوف الأولى والثانية. نقترح في طريقة ليابونوف الثانية تابع ليابونوف جديداً يخص النموذج المدروس. نجري العديد من تجارب المحاكاة الحاسوبية باستخدام نظام جبر الحاسوب **Matlab** لتوضيح سلوك النظام المدروس على المدى الطويل.

الكلمات المفتاحية: نظام فولتيرا - لوتكا ، طريقة ليابونوف ، تحليل الاستقرار.

Stability Analysis of Lotka – Volterra System with Logistic Growth Using Lyapunov Methods

Dr. Ahmad Al-Kurdi*

(Received 11 / 9 / 2008. Accepted 25/11/2008)

□ ABSTRACT □

The mathematical models of competition between species are one of the most important problems for population dynamics with multi species. In this paper, we give stability analysis for a Lotka-Volterra system with logistic growth by Lyapunov methods. We also present new Lyapunov functions for second Lyapunov method. Many numerical simulations have been carried out on computer algebra system: Maple and Matlab to illustrate the behavior of the considered system for a long time.

Keywords: Lotka , Volterra System, Stability Analysis, Lyapunov Method.

*Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Al-Baath University, Homs, Syria.

مقدمة:

يمكن أن تتبع الفريسة (Prey) نموذجاً لوجيستي (Logistic model) عندما تعزل عن المفترس (Predator) [1]. من جهة أخرى، يتلاشى المفترس عندما لا توجد فرائس، لأن المفترس لا يملك إمكانية النجاة باستهلاك غذاء آخر. إذا كان كلا النوعين: المفترس والفريسة موجودين في نفس البيئة فإن معدل التقاط الفريسة من قبل المفترس يتناسب مع كثافة أعداد الفريسة. في هذه المقالة، نحاول أن ندرس هذا السلوك للنوعين في حال نمو الفريسة لوجيستياً ونمو المفترس أسياً. إذا وجد نوع لوحده في منطقة تمثل x كثافة عدده في الزمن t فإنه يزداد أسياً أي أن معدل نموه النسبي ثابت. وهكذا $\frac{dx}{dt} = rx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{rt}$ حيث x_0 هو كثافة الفريسة في الزمن $t = 0$. إذا كان النوع مقيداً بعوامل بيئية بحيث أن قدرة البيئة على النوع x هو ثابت و K استيعاب (Carrying capacity) فإن معدل النمو النسبي قد يكون تابعاً متناقصاً خطياً يتراوح من r عندما $x = 0$ إلى 0 عندما $x = K$ [2]. وهكذا $\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ ويدعى النموذج اللوجيستي.

مسألة التنافس بين نوعين من الكائنات قديمة وقد وصفت نماذج مختلفة لفهم آليتها [3,4]. لدراسة التعايش بين الفريسة والمفترس عندما تبدي الفريسة دفاعاً جماعياً (Group defense) نأخذ النموذج التالي [5,6]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rG(x, K) - yP(x) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-m + Q(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

حيث x و y هي توابع للزمن وتمثل كثافتي أعداد الفريسة والمفترس على الترتيب. و $K > 0$ هو قدرة البيئة على استيعاب الفريسة و $m > 0$ هو معدل وفيات المفترس. يمثل التابع $G(x, K)$ معدل النمو المحدد للفريسة في حال غياب المفترس و يفترض أن يحقق الشروط التالية:

$$\begin{aligned} G(K, K) = 0, \quad G(0, K) > 0, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} G(0, K) < \infty \\ G_x(x, K) < 0, \quad G_K(x, K) \geq 0, \quad G_{xK}(x, K) > 0, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} G_x(x, K) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

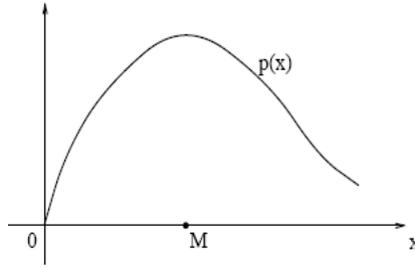
و ذلك من أجل $x \geq 0, K > 0$. يحقق $G(x, K) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ جميع الشروط (2). يرمز التابع

$P(x)$ إلى تابع رد المفترس (Predator response function) و يفترض أن يحقق الشروط التالية:

$$P(0) = 0, \quad P(x) > 0, \quad \text{for } x > 0 \quad (3)$$

لنمذجة الدفاع الجماعي يفترض أن يوجد ثابت $M > 0$ كما هو مبين في الشكل (1) بحيث أن:

$$P' \begin{cases} > 0 & , 0 \leq x < M \\ < 0 & , x > M \end{cases}$$

الشكل (1). تابع رد المفترس $P(x)$.

يحقق التابع $P(x) = bx$ الفرضيات (3). يوصف معدل تحول الفريسة إلى مفترس بالتابع $Q(x)$. ففي هذه المقالة لدينا $Q(x) = bP(x)$ من أجل ثابت ما $b > 0$. يفترض أن يملك التابع $Q(x)$ الخواص التالية:

$$Q(0) = 0, Q(x) > 0, \text{ for } x > 0$$

$$Q'(x) \begin{cases} > 0 & , 0 \leq x < M \\ < 0 & , x > M \end{cases}$$

وجود $M > 0$ هو بالضبط الفرضية التي تتمزج الدفاع الجماعي. علاوة على ذلك، يفترض أن تكون M نفسها في كلا التابعين $P(x)$ و $Q(x)$ لأن تحول الفريسة إلى مفترس قد يزداد و يتناقص عندما يزداد و يتناقص استهلاك الفريسة.

أهمية البحث و أهدافه:

نظرا لتطبيقات نموذج التعايش بين الأنواع المتعددة في بيولوجيا السكان ، الشبكات العصبونية ، والإصابة بالأمراض (العدوى) و التفاعلات الكيميائية و غيرها نقدم في هذه المقالة تحليل الاستقرار لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي لإعطاء توضيحات تبين حالة التعايش بين الأنواع تخضع للنموذج المدروس.

طريقة البحث و مواده:

نقدم في هذه الفقرة الصياغة الرياضية لنموذج فولتيرا- لوتكا بنمو لوجيستي و نجري العديد من تجارب المحاكاة الحاسوبية باستخدام **Matlab** لتوضيح حالة التعايش بين نوعين يخضعان للنموذج المدروس. علاوة على ذلك، نقدم تحليل الاستقرار للنموذج المدروس وفق طريقتي ليابونوف و نقترح تابع ليابونوف جديداً يخص النموذج.

النتائج و المناقشة:

(1) صياغة نموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي

(Math. Analysis for Lotka –Volterra Model with Logistic Growth)

يتألف النظام البيئي (Ecosystem) عادة من نوعين من الكائنات هما الفريسة (Prey) و المفترس (Predator). لنفرض أن x هو كثافة الفريسة و y هو كثافة المفترس. افترض فولتيرا (Volterra) أن عدد الفريسة ينمو أسياً في حال غياب المفترس بينما يتناقص عدد المفترس أسياً في حال غياب الفريسة [7]. هذا يقودنا إلى النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \\ \frac{dy}{dt} &= -my \end{aligned} \quad (4)$$

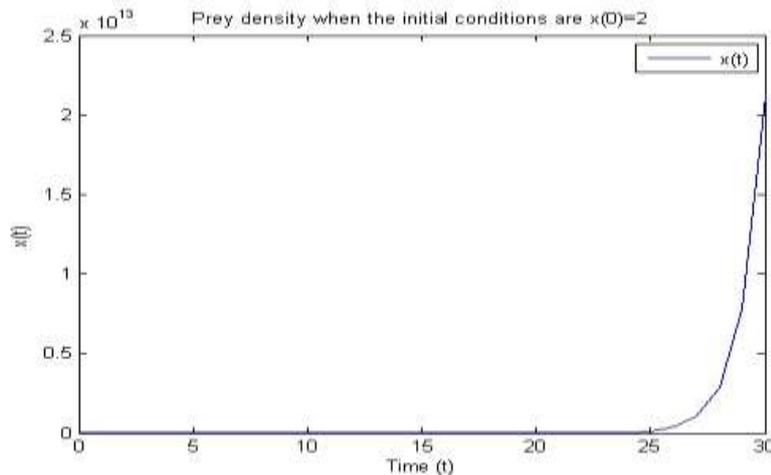
حيث $r > 0$ و $m > 0$. إذا كان $x(0) = 2$ و $y(0) = 0.2$ فإن حلول المعادلة (4) تعطى بالمحاكاة الحاسوبية في الشكلين 2 و 3. تبين المسارات (trajectories) أنه في حال غياب المفترس (الفريسة) فإن كثافة الفريسة (المفترس) تزداد (تتناقص) أسياً بمعامل r (على الترتيب). يعطى الحل التحليلي للمعادلة (4) من أجل جميع $t \geq 0$ بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{rt} \\ y(t) &= y(0)e^{-mt} \end{aligned} \quad (5)$$

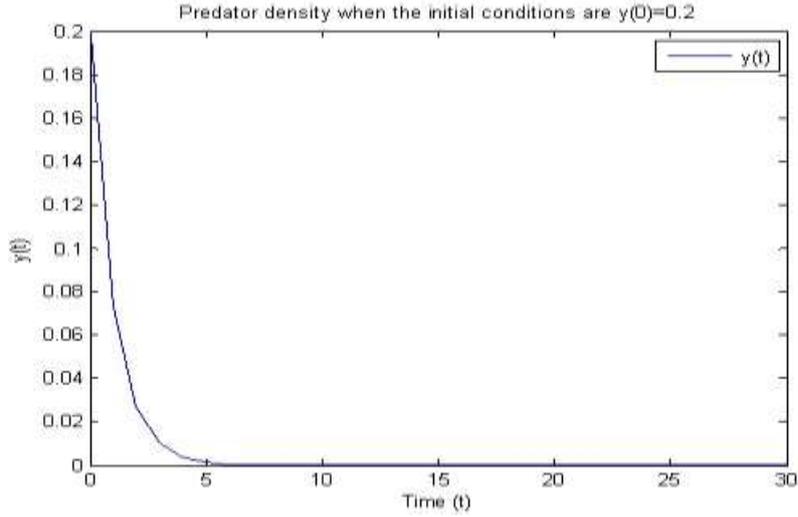
حيث $x(0) = x_0$ و $y(0) = y_0$ هي الشروط الابتدائية للنظام. هذا يعني أنه إذا كانت كثافة الفريسة أو المفترس تساوي الصفر فإنها ستبقى في الصفر طيلة الوقت. في حال غياب الفريسة فإن المفترس سينقرض و في حال غياب المفترس فإن عدد الفريسة سينمو أسياً. يتضح من المعادلة (5) أنه ليس هناك تعايش بين المفترس والفريسة. لتمثيل التعايش بينهما افترض فولتيرا أن عدد الفريسة يتناقص خطياً كتابع لكثافة المفترس و يزداد عدد المفترس خطياً كتابع لكثافة الفريسة. إذا أخذنا بعين الاعتبار هذه الفرضيات فإنه يمكن صياغة النموذج الرياضي الذي يصف التعايش بين النوعين بالمعادلة التالية [3,4,8]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - axy \\ \frac{dy}{dt} &= -my + bxy \end{aligned} \quad (6)$$

حيث a, b, r, m هي ثوابت موجبة. تعرف المعادلة (6) بنموذج فولتيرا - لوتكا الرياضي دون تنافس (Competition). و ينص هذا النموذج أنه في حال غياب المفترس فإن عدد الفريسة يزداد أسياً كما هو مبين في الشكل (2) و في حال غياب الفريسة فإن المفترس يتناقص أسياً كما هو مبين في الشكل (3). و أخيراً يصف الحدين $(-axy)$ و $(+bxy)$ التصادم بين الفريسة والمفترس الذي هو مناسب للمفترس و قاتل للفريسة.

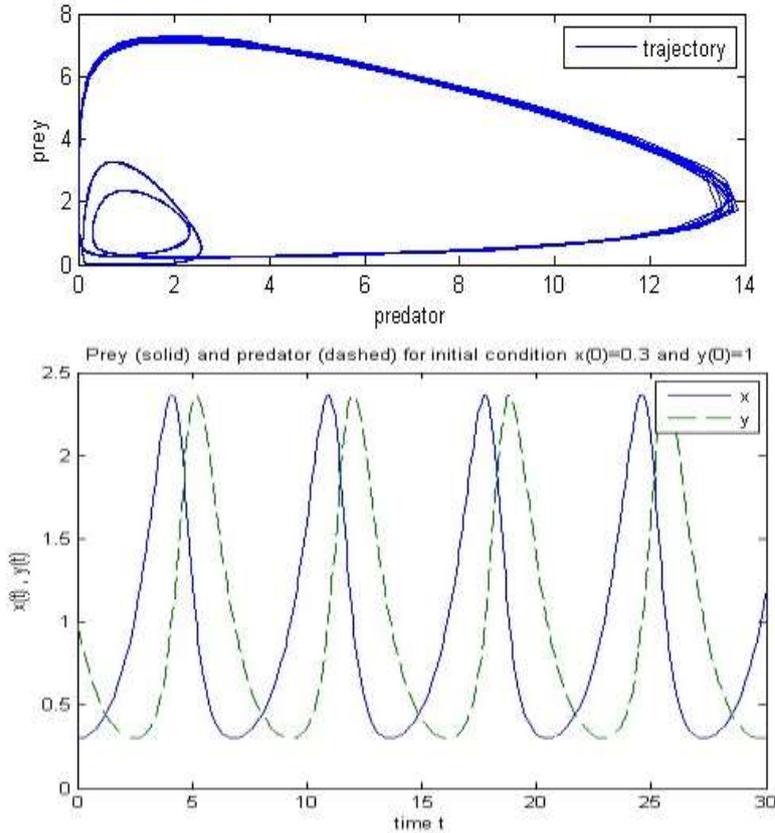


الشكل (2). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ عندما $x(0) = 2$ والثابت هو $r = 1$ من أجل 30 ثانية.

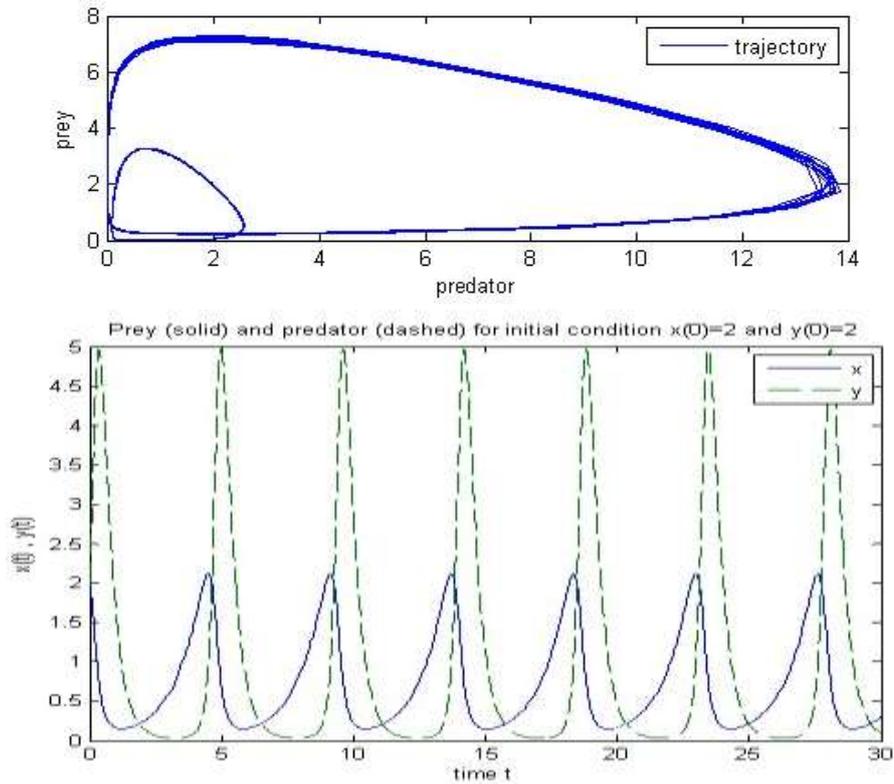


الشكل (3). يمثل كثافة المفترس $y(t)$ عندما $y(0) = 0.2$ والثابت هو $m = 2$ من أجل 30 ثانية.

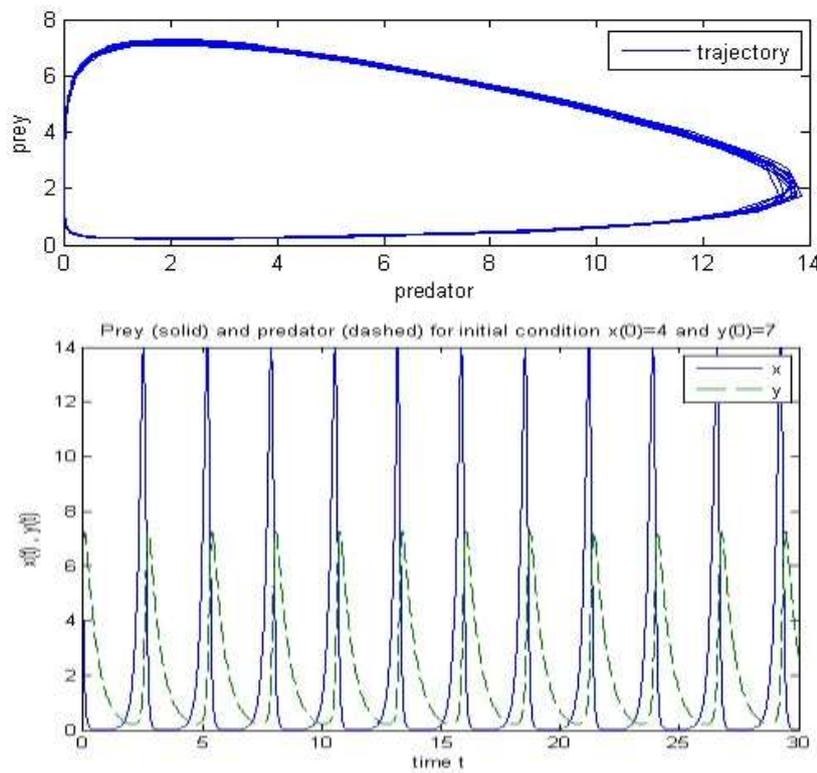
تبين الأشكال (4)–(6) الاستجابة الزمنية لثلاث حالات مختلفة. إذا أجرينا تحليل استقرار خطياً للنموذج الرياضي (6) فإننا نرى أن هناك سلوك اهتزاز واضح في حلول $x(t)$ و $y(t)$ في البيانات الموضحة في الأشكال (4)–(6).



الشكل (4). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ والمسارات في الشروط الابتدائية $x(0) = 0.3$ و $y(0) = 1$ والوسطاء هي $r = 1, a = 1, b = 1, m = 1$.



الشكل (5). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ والمسارات في الشروط الابتدائية $x_0 = 2$ و $y_0 = 2$ والوسطاء هي $r = 1, a = 2, b = 4, m = 3$



الشكل (6). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ والمسارات في الشروط الابتدائية $x_0 = 4$ و $y_0 = 7$ والوسطاء هي $r = 6, a = 3, b = 1, m = 2$

يمكن كتابة (6) بالشكل:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{a}{r} y\right) = rx (1 - \alpha y) \quad ; \quad \alpha = \frac{a}{r} \\ \frac{dy}{dt} &= -my \left(1 - \frac{b}{m} x\right) = -my (1 - \beta x) \quad ; \quad \beta = \frac{b}{m} \end{aligned} \quad (7)$$

لاحظنا في الأشكال (4) - (6) تأثير كل نوع على الآخر. لندرس الآن الحالة التالية: إذا كان النوعان في

حالة توازن عندما $x = x^*$, $y = y^*$. عندئذ $\alpha = \frac{1}{y^*}$, $\beta = \frac{1}{x^*}$. وبالتالي يمكن كتابة (7)

بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{y}{y^*}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= -my \left(1 - \frac{x}{x^*}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

واضح أن $\frac{dx}{dt} > 0$ عندما $y < y^*$ و سالب عندما $y > y^*$. تغيرات y حول y^* تسبب التغيرات في

إشارة $\frac{dx}{dt}$ التي تغير بدورها إشارة $\frac{dy}{dt}$ وبالنتيجة هي اهتزازات حول التوازن. لسوء الحظ لا تملك المعادلة (8) حلا

تحليليا بدلالة x و y و لذلك نبحث عن حلول تقريبية. إذا كانت n_1 و n_2 ترتيبات صغيرة حول x^* و y^* .

عندئذ $n_1 = x - x^*$, $n_2 = y - y^*$. من (8) نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= -m_2 \left(\frac{x^*}{y^*}\right) \left(1 + \frac{n_1}{x^*}\right) \approx -m_2 \left(\frac{x^*}{y^*}\right) \\ \frac{dn_2}{dt} &= mn_1 \left(\frac{y^*}{x^*}\right) \left(1 + \frac{n_2}{x^*}\right) \approx mn_1 \left(\frac{y^*}{x^*}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

بدمج معادلتنا (9) في معادلة واحدة و حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية نجد أن:

$$\begin{aligned} n_1(t) &= c \sqrt{\frac{r}{m}} \left(\frac{x^*}{y^*}\right) \sin(\sqrt{rm})t \\ n_2(t) &= c \cos(\sqrt{rm})t \end{aligned}$$

حيث تتحدد c من الشروط الابتدائية. و هكذا استنتجنا معلومات حول العلاقة بين x و y و بشكل خاص

التحليل التقريبي يوجي وضوحا بوجود اهتزاز.

يعطي نموذج فولتيرا - لوتكا الممثل بالمعادلة (6) وصفا مبسطا للتعايش بين الفريسة والمفترس. من المهم جدا

أن ندرس ماذا يحدث عندما نضيف عوامل خارجية أخرى كالنمو اللوجيستي مثلا (Logistic Growth). رأينا أن

المعادلة (6) تنمو أسيا في غياب المفترس و هذا غير واقعي لأنه عندما $t \rightarrow \infty$ فإن $x(t) \rightarrow \infty$. لجعل النظام

أكثر واقعية نضيف النمو اللوجيستي للمعادلة الأولى فقط أي إلى الفريسة في المعادلة الأولى من (6) بإضافة الحد

$x \left(r - r \frac{1}{K} x \right)$ حيث $K > 0$ يدعى قدرة البيئة للاستيعاب (Carrying capacity) والذي يصف الاستيعاب

البيئي للفريسة في حال غياب المفترس. يدعى النموذج الناتج والذي يصف الفريسة في حال غياب المفترس بالنموذج اللوجستي (Logistic Model) و يعطى بالصيغة التالية:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(r - r \frac{1}{K} x \right) \quad (10)$$

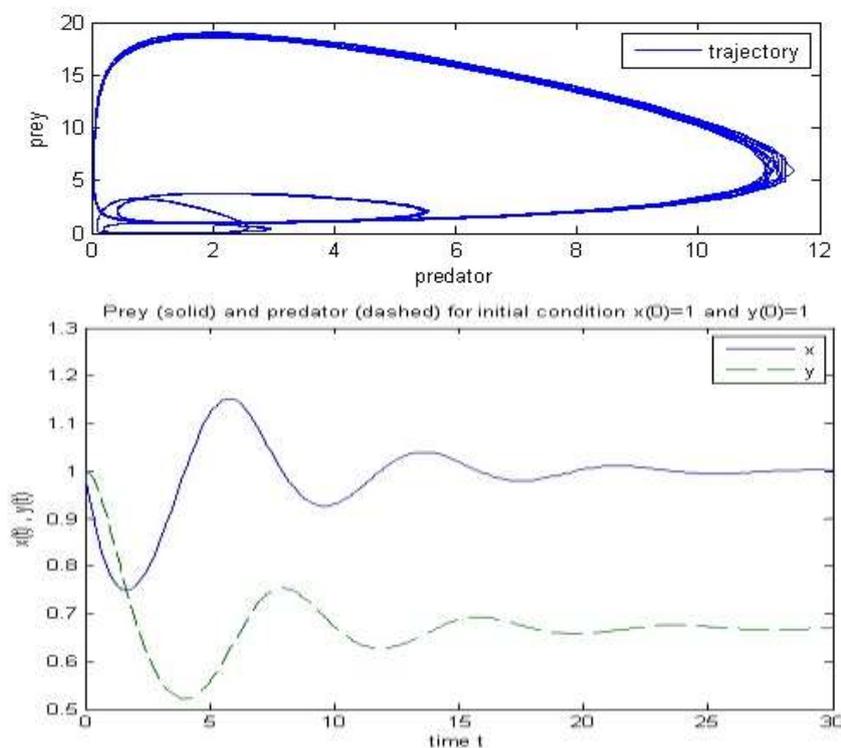
يعطى الحل التحليلي للمعادلة (10) بالصيغة التالية:

$$x(t) = \frac{Kx_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)}$$

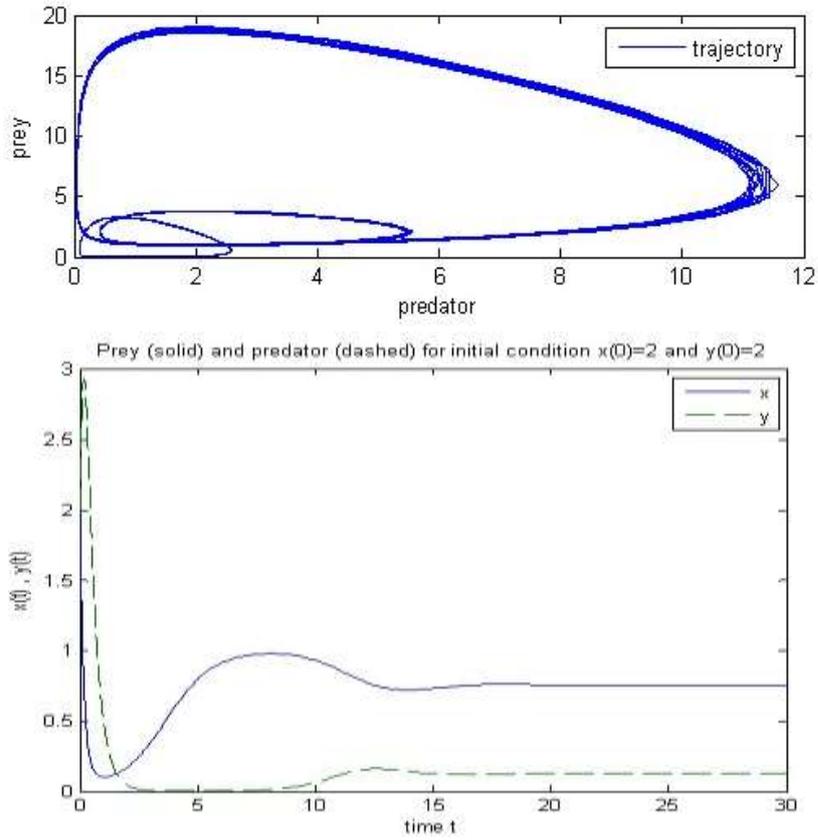
عندما $t \rightarrow \infty$ فإن $x(t) \rightarrow K$ وهذا بالطبع واقعي أي إن عدد الفريسة لا يتجاوز قدرة البيئة على الاستيعاب. و يمكن توضيح سلوك الحل على المدى الطويل كما يلي: بالاستفادة من المعادلة (10) يعطى النموذج الرياضي الجديد للتعايش بين الفريسة و المفترس بنمو لوجيستي للفريسة بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(r - r \frac{1}{K} x - ay \right) \\ \frac{dy}{dt} &= y (-m + bx) \end{aligned} \quad (11)$$

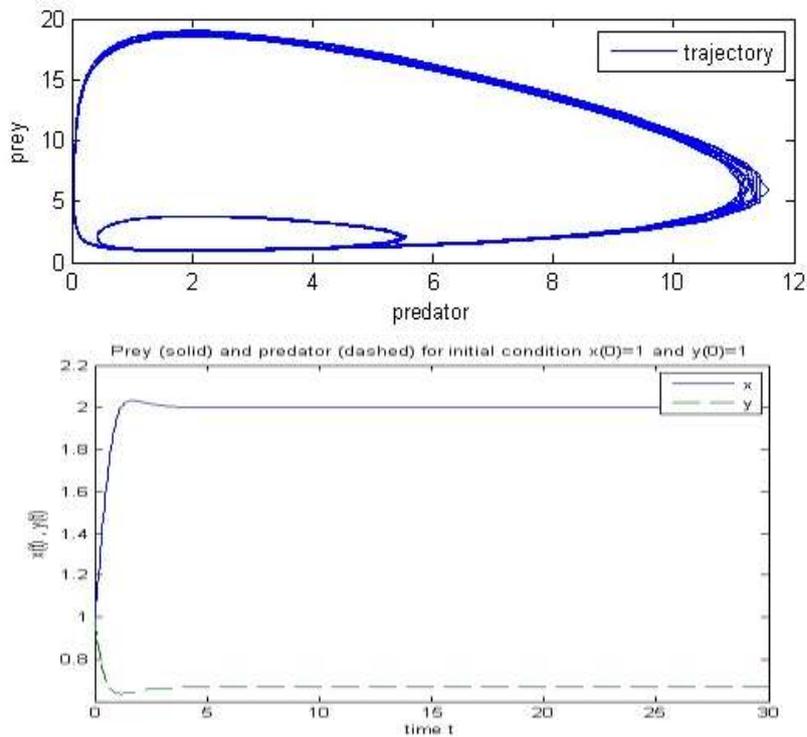
تبين الأشكال (7)–(9) كثافة الفريسة و المفترس بشروط ابتدائية ووسطاء مختلفة. الفرق الرئيسي بين الشكل 7 و الشكلين (8) و (9) هو أنه تأخذ الثوابت في الشكل 7 فيما بحيث أن $\frac{rbK - mr}{K} < 0$ و من أجل الشكلين المتبقين لدينا $\frac{rbK - mr}{K} > 0$ التي هي الفكرة الأساسية من المقالة و نتناولها بالتفصيل في فقرة تحليل التوازن.



الشكل (7). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ والمسارات في الشروط الابتدائية $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$ والوسطاء هي $r = 1, a = 1, b = 1, m = 1, K = 0.334$.



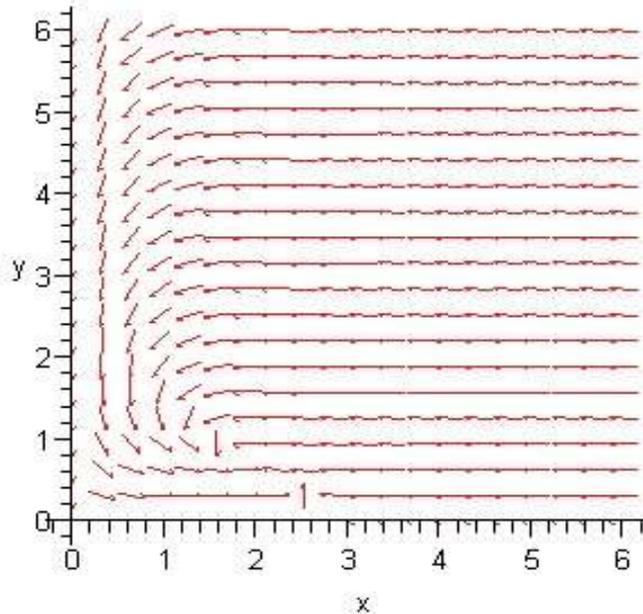
الشكل (8). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ والمسارات في الشروط الابتدائية $x_0 = 2$ و $y_0 = 2$ والوسطاء هي $. r = 1, a = 2, b = 4, m = 3, K = 1$



الشكل (9). يمثل كثافة الفريسة $x(t)$ و المفترس $y(t)$ في الشروط الابتدائية $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$ والوسطاء هي $. r = 6, a = 3, b = 1, m = 2, K = 3$

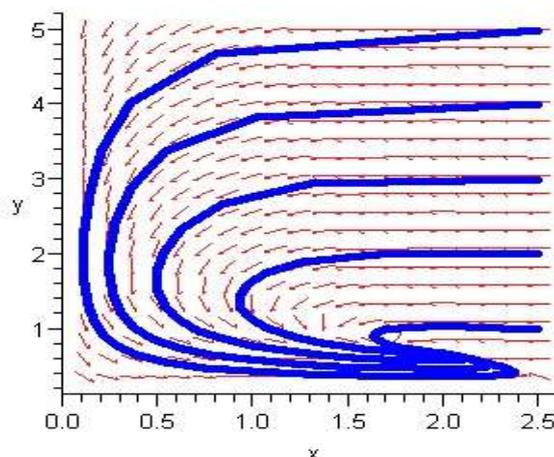
لاحظ أنه في الشكل (7) تؤول كثافة المفترس إلى الصفر و في الشكلين المتبقين فإنها تؤول إلى قيم مختلفة عن الصفر. يصبح سبب ذلك واضحا في تحليلنا للاستقرار. يمكن أن نعطي تبصرا عن سلوك النظم من المرتبة الثانية بطريقة أخرى بأن نرسم صورا طورية (مستوي الطور Phase plane). لتوضيح هذه النقطة نجري ثلاث تجارب محاكاة عددية لمستويات الطور كما هو مبين في الأشكال (10)-(12).

Direction Field for Lotka - Volterra Model with Logistic Growth

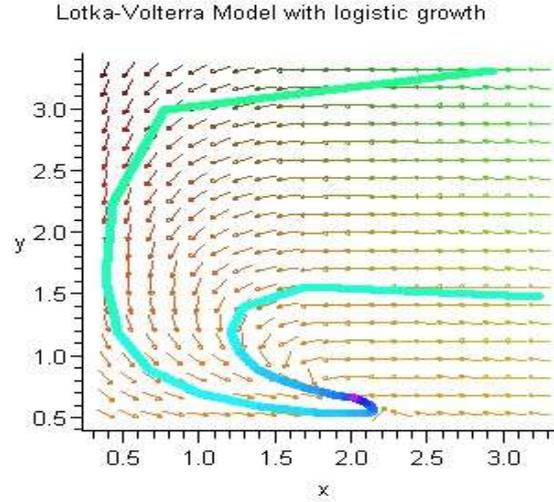


الشكل (10). مستوي الطور لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي وفق الشروط الابتدائية $x_0 = 0.6$ و $y_0 = 0.6$ والوسطاء هي $r = 6, a = 3, b = 1, m = 2, K = 3$.

Phase Portrait for Predator-Prey System

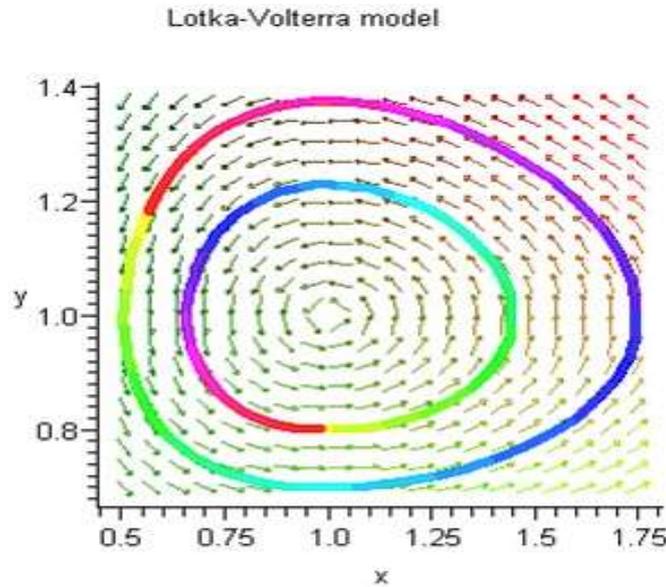


الشكل (11). مستوي الطور لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي وفق الشروط الابتدائية $x_0 = 2.5$ و $y_0 = 1.5$ والوسطاء هي $r = 6, a = 3, b = 1, m = 2, K = 3$.

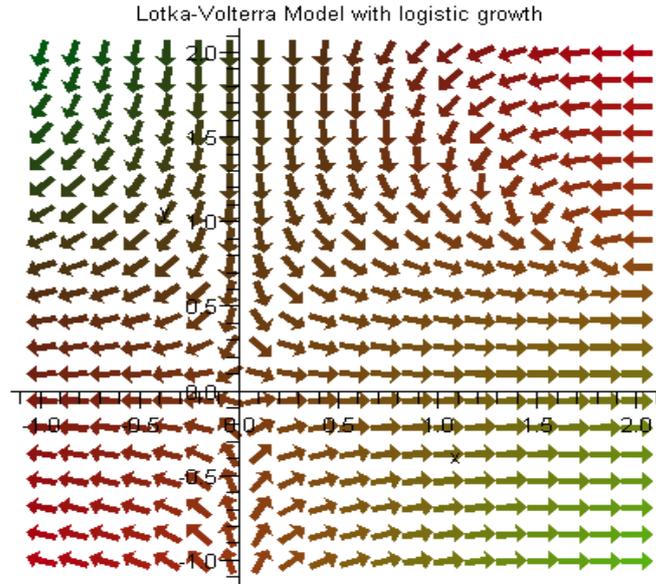


الشكل (12). مستوي الطور لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي وفق الشروط الابتدائية $x_0 = 1, 1.2$ و $y_0 = 1.2, 0.7$ والوسطاء هي $r = 6, a = 3, b = 1, m = 2, K = 3$.

نقدم فيما يلي شكلين إضافيين يمثلان مستوي الطور في شروط ابتدائية مختلفة ووسطاء مختلفة لنعطي توضيحا إضافيا عن سلوك النظام المدروس على المدى البعيد و ذلك من خلال تطوير برامج حاسوبية باستخدام **Matlab** للحصول على البيانات المبينة في الشكلين التاليين:



الشكل (13). مستوي الطور لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي وفق الشروط الابتدائية $x_0 = 1, 2$ و $y_0 = 0.7, 2$ والوسطاء هي $r = 1, a = 2, b = 4, m = 3, K = 1$.



الشكل (14). مستوي الطور لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي وفق الشروط الابتدائية $x_0 = -1 \dots 2$ و $y_0 = -1 \dots 2$ والوسطاء هي $r = 6, a = 3, b = 1, m = 2, K = 3$.

ننتقل بعد هذا التفصيل النظري المدعوم بتجارب محاكاة حاسوبية باستخدام Matlab إلى تحليل نقاط توازن النموذج المقترح لتوضيح ما يجري في مستويات الطور المبينة في الأشكال (8)-(10).

تحليل الاستقرار للنظام (11) (Stability Analysis of System (11))

للحصول على صورة عامة وواضحة عن النظام (11) و عن مستويات الطور المتعلقة به نأخذ التابع

$$G(x, K) = r \left(1 - \frac{x}{K} \right) \text{ و } Q(x) = bx \text{ و } P(x) = ax$$

1. استقرار النقاط الثابتة (Stability of fixed points)

إن أحد المسائل الأساسية هو معرفة سلوك النظام الديناميكي على المدى الطويل (Long time). بالتحديد نريد أن نعرف فيما إذا كان الحل مستقراً (Stable) أم لا. إلا أننا نريد أن نعرف أولاً ماذا يعني الاستقرار (Stability). يمكن أن نقرأ معلومات كثيرة من استقرار تدفق في جوار نقطة ثابتة (Fixed point) بتحويل النظام الديناميكي إلى نظام خطي في جوار النقطة الثابتة. نتمتع عادة في النقطة الثابتة و نريد أن نعرف ماذا يحدث إذا بدأنا بالقرب من النقطة الثابتة.

تعريف 1 (Definition): النقطة الثابتة (Fixed point):

ليكن $F: A \rightarrow A$ تابعا قابلا للمفاضلة، حيث A هي مجال على مجموعة الأعداد الحقيقية. نقول عن النقطة $a \in A$ إنها نقطة ثابتة إذا تحقق $F(a) = a$.

تعريف 2: النقطة الثابتة المستقرة (Stable fixed point):

نقول عن نقطة ثابتة x_0 للتابع $f(x)$ إنها مستقرة إذا كان من أجل أي جوار معطى $U(x_0)$ يوجد جوار آخر $V(x_0)$ بحيث أن أي حل يبدأ في $V(x_0) \subseteq U(x_0)$ يبقى في $U(x_0)$ من أجل جميع $t \geq 0$.

تعريف 3 (Definition): النقطة الثابتة المستقرة بالتقارب (Asymptotically stable fixed point): نقول

عن نقطة ثابتة x_0 للتابع $f(x)$ إنها مستقرة بالتقارب إذا:

1. كانت النقطة الثابتة x_0 مستقرة.

2. وجد جوار $U(x_0)$ بحيث أن:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi(t, x) - x_0| = 0, \text{ for all } x \in U(x_0) \quad (12)$$

مبرهنة [4] (Theorem): لنكن A مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية و لنكن

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \Delta\lambda + \Lambda, \quad \Delta = \text{tr}(A), \quad \Lambda = \det(A) \quad (13)$$

كثيرة حدوديتها المميزة. تكون المصفوفة A :

1. زائدية (Hyperbolic) إذا كان $\Lambda \neq 0$.

2. مستقرة بالتقارب (Asymptotically stable) إذا و فقط إذا كان $\Lambda > 0$ و $\Delta < 0$ (لاحظ أن

$$\Delta = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{و} \quad \Lambda = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2.$$

ينتج من المبرهنة ما يلي: نقول عن النقطة الثابتة x_0 إنها زائدية (Hyperbolic) إذا لم يكن الجزء الحقيقي

لأي قيمة ذاتية للمصفوفة A الموافقة للنظام المحول خطيا (Linearized system) مساويا للصفر.

(2). التوازن (Equilibria):

نوجد أولا نقاط توازن النظام المحدد بالمعادلة (11). نضع $x' = 0$ & $y' = 0$ ، أي أن:

$$x \left(r - \frac{r}{K}x - ay \right) = 0 \quad (14)$$

$$y(-m + bx) = 0$$

يمكن أن نرى أن هناك نقطة توازن هي النقطة المبتدلة $(x_{e_1}, y_{e_1}) = (0, 0)$. هل هناك نقاط أخرى؟ إذا

وضعنا $y = 0$ عندئذ لدينا $x = K$. وهكذا هناك نقطة توازن أخرى تتحدد بالشكل $(x_{e_2}, y_{e_2}) = (K, 0)$. في حالة

$x \neq 0$ & $y \neq 0$ فإننا نجد نقطة التوازن الوحيدة الأخرى هي $(x_{e_3}, y_{e_3}) = \left(\frac{m}{b}, \frac{rbK - mr}{abK} \right)$. بالطبع هذا

صحيح فقط في الحالة عندما $rbK - mr > 0$. يمكن أن نرى ذلك بسهولة في مستوي الطور المبين على الشكل 5

من أجل قيم الوسطاء التي تعطي $(x_{e_3}, y_{e_3}) = (2, 0.667)$. سنناقش ثانيا تحليل الاستقرار من أجل نقطة التوازن

(x_{e_3}, y_{e_3}) . يمكن إنجاز دراسة استقرار النقاط الثابتة بمساعدة تقنية الاستقرار الخطية (Linearized stability

technique).

(I). طريقة ليايونوف الأولى (Lyapunov First Method):

إحدى الطرائق لتحليل نقطة التوازن (x_{e_3}, y_{e_3}) هي تحويل النظام المدروس إلى نظام خطي (Linearize

the system) حول نقطة التوازن ثم نجري تحليل القيمة الذاتية (Eigenvalue analysis). لنفرض أنه لدينا معادلة

غير خطية من الشكل:

$$v' = f(v) \quad (15)$$

حيث $f(v)$ هو تابع قابل للمفاضلة باستمرار (Continuously Differentiable). يمكن تلخيص تقنية تحويل النظام إلى خطي (Linearization) وفق الخوارزمية التالية كما يلي:

خوارزمية 1. خوارزمية تحويل النظام إلى نظام خطي (Linearization of system).

تعطى الخوارزمية 1 لتحويل النظام إلى نظام خطي (Linearization) وفق الخطوات التالية:

1. إيجاد نقاط توازن النظام بوضع

$$f(v_e) = 0 \quad (16)$$

2. نأخذ مصفوفة جاكوبي (Jacobian) للتابع $f(v)$ التي نرسم لها اختصاراً بالرمز J و نقدر J في كل

نقطة من نقاط التوازن v_e .

3. تغيير الإحداثيات بطريقة بحيث أن $\xi = v - v_e$ التي تقتضي أننا بصدد دراسة مسارات (Trajectories)

v بالنسبة للموضع الثابت v_e .

4. من أجل كل توازن نكتب معادلة خطية جديدة من الشكل:

$$\xi' = J(v_e)\xi \quad (17)$$

و بعدئذ نحل سلوك المدارات (Orbits) للنظام الجديد في النقطة 0.

فمن أجل النموذج المدروس (11) لا بد من تحديد J الوارد في نص الخوارزمية 1 بأن نأخذ المشتقات الجزئية

بالنسبة للمتغيرين x و y في المعادلة (11) كما يلي:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(x \left(r - \frac{r}{K}x - ay \right) \right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(x \left(r - \frac{r}{K}x - ay \right) \right)}{\partial y} \\ \frac{\partial \left(y \left(-m + bx \right) \right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(y \left(-m + bx \right) \right)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ثم نقدر J في النقطة (x_{e_3}, y_{e_3}) . بحساب المشتقات الجزئية في (18) من أجل (x_{e_3}, y_{e_3}) نحصل على:

$$J = J(x_{e_3}, y_{e_3}) = \begin{bmatrix} -\frac{r}{K}x_{e_3} & -ax_{e_3} \\ by_{e_3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{bK} & -a\frac{m}{b} \\ \frac{rbK - mr}{aK} & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

نحول النظام إلى إحداثيات الخطأ كما يلي:

$$\begin{aligned} e_x &= x - x_{e_3} \\ e_y &= y - y_{e_3} \end{aligned} \quad (20)$$

يصبح النظام في الإحداثيات الجديدة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} e'_x &= \left(e_x + \frac{m}{b} \right) \left(-\frac{r}{K}e_x - ae_y \right) \\ e'_y &= (be_x) \left(e_y + \frac{rbK - mr}{abK}e_x \right) \end{aligned} \quad (21)$$

تحقق القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي J في النقطة (x_{e_3}, y_{e_3}) المعادلة المميزة المعطاة بالصيغة (13).

لنحسب

$$\begin{aligned}\Delta &= \text{tr} \left(J(x_{e_3}, y_{e_3}) \right) = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-r}{K} x_{e_3} < 0 \\ \Lambda &= \det \left(J(x_{e_3}, y_{e_3}) \right) = \lambda_1 \lambda_2 = abx_{e_3} y_{e_3} > 0\end{aligned}\quad (22)$$

الجزء الحقيقي للقيم الذاتية λ_1, λ_2 هو موجب دوماً لأننا افترضنا أن $rbK - mr > 0$. من هذا التحليل نستنتج أن نقطة التوازن (x_{e_3}, y_{e_3}) هي نقطة توازن مستقرة بالتقارب وذلك وفقاً للمبرهنة أعلاه.

(II). طريقة ليابونوف الثانية (Lyapunov Second Method)

توصلنا بعد دراسة عميقة لعدد من الأبحاث [1-10] التي تتناول إيجاد تابع ليابونوف إلى تابع جديد يلائم النموذج (11) و يعطي تبصراً واضحاً عن تحليل الاستقرار. يعطى التابع المقترح بالصيغة التالية:

$$X(e_x, e_y) = b \left(e_x - x_{e_3} \ln \frac{e_x + x_{e_3}}{x_{e_3}} \right) + a \left(e_y - y_{e_3} \ln \frac{e_y + y_{e_3}}{y_{e_3}} \right) \quad (23)$$

هذا التابع قابل للمفاضلة باستمرار. لنفرض أننا عرفنا:

$$\begin{aligned}X(e_x, e_y) &= bX_1(e_x) + aX_2(e_y) \\ X_1(e_x) &= b \left(e_x - x_{e_3} \ln \frac{e_x + x_{e_3}}{x_{e_3}} \right) \\ X_2(e_y) &= a \left(e_y - y_{e_3} \ln \frac{e_y + y_{e_3}}{y_{e_3}} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

إذا حللنا تابع ليابونوف المقترح يمكن أن نرى أن التابع المقدر في 0 يساوي:

$$X(0,0) = -bx_{e_3} \ln \frac{x_{e_3}}{x_{e_3}} - ay_{e_3} \ln \frac{y_{e_3}}{y_{e_3}} = 0 \quad (25)$$

نحل الآن $X_1(e_x)$ بشكل مشابه للتحليل من أجل $X_2(e_y)$ لأنه في كلتا الحالتين e_x و e_y هما موجبان تماماً والتابع في شكلين متشابهين. يمكن أن نرى من الشكل (15) العنصرين الرئيسيين اللذين يحلان $X_1(e_x)$. لفهم لماذا هذا التابع متزايد دوماً مما يجعله تابع ليابونوف المرشح للتحليل لذا نقوم بالتحليل التالي:

نعلم أنه من أجل جميع $e_x > 0$:

$$e^{\frac{e_x}{x_{e_3}}} \geq 0 \quad (26)$$

باستخدام منشور تايلور للتابع الأسّي في جوار الصفر نحصل على:

$$e^{\frac{e_x}{x_{e_3}}} = 1 + \frac{e_x}{x_{e_3}} + \frac{\left(\frac{e_x}{x_{e_3}} \right)^2}{2!} + \dots \quad (27)$$

بما أن $e_x > 0$ فإن جميع الحدود موجبة دوماً وبالتالي لدينا:

$$e^{\frac{e_x}{x_{e_3}}} > 1 + \frac{e_x}{x_{e_3}} = \frac{x_{e_3} + e_x}{x_{e_3}} \quad (28)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\frac{e_x}{x_{e_3}} > \ln\left(\frac{x_{e_3} + e_x}{x_{e_3}}\right) \quad (29)$$

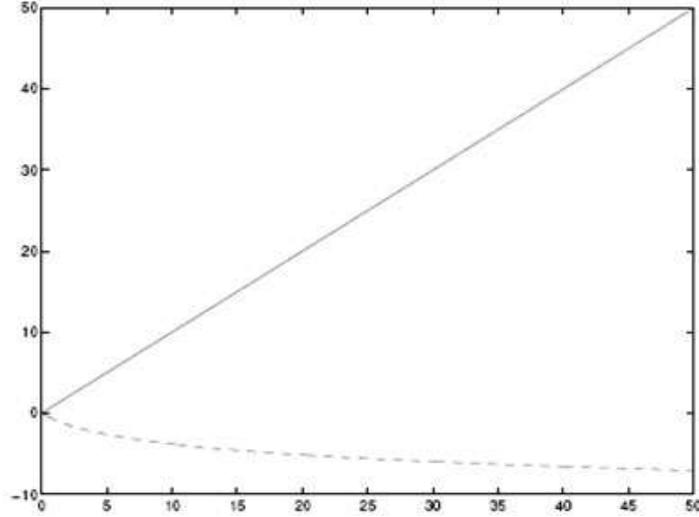
هذا يقتضي أنه إذا كان $e_x > 0$ فإن:

$$X_1(e_x) = e_x - x_{e_3} \ln\left(\frac{e_x + x_{e_3}}{x_{e_3}}\right) > 0 \quad (30)$$

يمكن إجراء نفس التحليل من أجل $X_2(e_y)$. بالنتيجة لدينا $X(e_x, e_y) > 0$ في جوار ما للنقطة (e_x, e_y) . لنبين الآن أن $X' < 0$. إذا أخذنا مشتق X على طول مسارات (Trajectories) النظام نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(e_x, e_y) &= b \left(e'_x - \frac{e'_x x_{e_3}}{e_x + x_{e_3}} \right) + a \left(e'_y - \frac{e'_y y_{e_3}}{e_y + y_{e_3}} \right) \\ &= b \left(\frac{e'_y (e_y + x_{e_3} - x_{e_3})}{e_x + x_{e_3}} \right) + a \left(\frac{e'_y (e_y + y_{e_3} - y_{e_3})}{e_y + y_{e_3}} \right) \\ &= a \left(-\frac{r}{K} e_x - a e_y \right) e_x + a e_y (b e_x) \\ &= -b - \frac{r}{K} e_x - a b e_y e_x + a e_y b e_x \\ &= -b - \frac{r}{K} e_x^2 \end{aligned} \quad (31)$$

إذا $\frac{d}{dt} X(e_x, e_y) \leq 0$ و منه $X'(e_x, e_y) = 0$ فقط عندما $e_x = 0$ & $e_y = 0$. نستنتج أن نقطة التوازن $(e_x, e_y) = (0, 0)$ هي نقطة مستقرة بالتقارب. لا يمكن أن نقول إنها مستقرة بالتقارب عموماً لأننا افترضنا أن e_x & e_y هي موجبة تماماً.



الشكل (15). العنصران الرئيسيان اللذان يخلان $X_1(e_x)$. يمثل الخط الغامق e_x

$$\text{بينما يمثل } -x_{e_3} \ln\left(\frac{e_x + x_{e_3}}{x_{e_3}}\right) \text{ الخط المتقطع..}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

في هذه المقالة، أجرينا تحليلاً رياضياً موضحاً بأشكال بيانية باستخدام Matlab لإعطاء تبصر عن حالة التعايش بين نوعين من الكائنات يحققان نموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي. كما قدمنا تحليل الاستقرار لنموذج فولتيرا - لوتكا بنمو لوجيستي باستخدام طريقتي ليابونوف الأولى والثانية. طورنا في طريقة ليابونوف الثانية تابع ليابونوف جديداً يخص النموذج المدروس. أجرينا العديد من تجارب المحاكاة الحاسوبية باستخدام Matlab لتوضيح سلوك النظام المدروس على المدى البعيد في وصف كائنات أخرى تتعايش معا و هذا يفتح المجال واسعا في تطبيقات عديدة مشابهة في مختلف العلوم.

المراجع:

- [1] COLLINGS, J. B. *The effects of the functional response on the bifurcation behavior of a mite predator-prey interaction model*. J. Math. Biol., U. S. A., Vol. 36, No. 7, 1997, 149–168.
- [2] FREEDMAN, H. I. and SO, J. W.-H. *Global stability and persistence of simple food chains*. Math. Biosci., U. S. A., Vol. 76, No. 1, 1985, 69–86.
- [3] BAZYKIN, A. D., BEREZOVSKAYA, F. S., DENISOV, G. A. and KUZNETZOV, Yu. A. *The influence of predator saturation effect and competition among predators on predator-prey system dynamics*. Ecological Model., U. S. A., Vol. 14, No. 1, 1981, 39-47.
- [4] KOOIJ, R. E. and ZEGELING, A. *A predator-prey model with Ivlev's functional response*. J. Math. Anal. Appl., U. S. A., Vol. 198, No. 2, 1996, 473–489.
- [5] KUANG, Y. and FREEDMAN, H. I. *Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator prey systems*. Math. Biosci., U. S. A., Vol. 88, No. 1, 1988, 67–84.
- [6] SUGIE, J., KOHNO, R. and MIYAZAKI, R. *On a predator-prey system of Holling type*. Proc. Amer. Math. Soc., U. S. A., Vol. 125, No. 7, 1997, 2041–2050.
- [7] VOLTERRA, V. *in Animal Ecology*, R. N. Chapman, ed. (McGraw Hill, New York, 1926).
- [8] MISCHAIKOW, K. and WOLKOWICZ, G. S. K. *A predator-prey system involving group defense: A connection matrix approach*. Nonlinear Anal., U. S. A., Vol. 14, No. 24, 1990, 955–969.
- [9] SUGIE, J. *Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type*. J. Math. Anal. Appl., U. S. A., Vol. 217, No. 2, 1998, 349–371.
- [10] KOOIJ, R. E. and ZEGELING, A. *Qualitative properties of two-dimensional predator-prey systems*. Nonlinear Anal., U. S. A., Vol. 29, No. 21, 1997, 693–715.
- [11] FREEDMAN, H. I. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. 1st Edition, Marcel Dekker, New York, 1980, 482.

