مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة

الدكتور محمود باكير*

(تاريخ الإيداع 24 / 7 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/10/20)

□ الملخّص □

تعد مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة تعميماً لمبرهنة بروورْ للنقطة الثابتة Brouwer's Fixed Point Theorem التي تنص على أنّ: كل مجموعة جزئية غير خالية متراصة compact ومحدبة convex من E^n تتمتع بخاصة النقطة الثابتة fixed point property، (حيث $E^n = R^n$ أو $E^n = C^n$ ، R مجموعة الأعداد الحقيقية، و Cمجموعة الأعداد العقدية و n عدد صحيح موجب). وإثبات صحة مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة يعتمد على مبرهنة بروورْ آنفة الذكر، انظر مثلاً الصفحة 61 من [5]. كما أنَّ هناك إثباتاً آخر لها يعتمد على توطئة (تمهيدية) سبيرنر Sperner's Lemma، انظر[2]. سنثبت صحتها دون استخدام مبرهنة بروور للنقطة الثابتة، وذلك اعتماداً على توطئة متعلقة بـ ε – النقطة الثابتة fixed point – ε .

الكلمات المفتاحية: مبرهنة شاودر، نقطة ثابتة.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

*مدرس – قسم الرياضيات – جامعة دمشق– ومعار حالياً إلى جامعة القلمون الخاصة– سورية.

Schauder's Fixed Point Theorem

Dr. Mahmoud Bakir*

(Received 24 / 7 / 2008. Accepted 20/10/2008)

□ ABSTRACT □

Schauder's Fixed Point Theorem is considered to be one of the most prominent and well-known theorem in Fixed Point Theory, since it is used in Economy, Game Theory, and Deferential Equations. It was proved by the Polish mathematician Juliusz Schauder in 1930. It is a generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem; and its proof depends on Brouwer's Fixed Point Theorem; see, for example, [5]. It has also another proof using Sperner's Lemma; see [2]. We will prove it without using Brouwer's Fixed Point Theorem; our proof will depend on a lemma about ε - fixed point.

Keywords: Schauder's Theorem, Fixed Point.

مقدمة:

* **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University, Damascus, Syria.**

قدّم الرياضي الهولندي براوور (L.E.J. Brouwer) مبرهنته الشهيرة حول النقطة الثابتة سنة 1912، والتي تعد من المبرهنات التي تتبوأ موقعاً متميزاً في الأدبيات الرياضية. وينبع ذلك من كونها أحد مبادئ الوجود existence principle في الرياضيات. كما أنّ لها العديد من التطبيقات في مجال التحليل، وفي مجال الاقتصاد وغير ذلك من المجالات. وفي سنة 1930 قام الرياضي البولوني شاودر Juliusz Schauder بتعميم هذه المبرهنة وقدّم مبرهنته حول النقطة الثابتة Schauder's Fixed Point Theorem.

أهمية البحث وأهدافه:

تعد مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة من المبرهنات الهامة والمعروفة في نظرية النقطة الثابتة Fixed Point Theory. وتنبع أهميتها من استخدامها في مجال الاقتصاد، ونظرية المبارزة (الألعاب) Game Theory، وفي مسائل وجود حلول المعادلات التفاضلية Deferential Equations، وفي غيرها من المجالات. وسنعمل الآن على إثبات صحتها دون الاعتماد على مبرهنة براوور للنقطة الثابتة.

في البدء لابدَّ من الإشارة إلى أنَّ معظم التعاريف المستخدمة في هذا البحث نجدها في [5] أوفي [3].

طريقة البحث ومواده:

تعاريف:

– لتكن X مجموعة ما غير خالية. وليكن $f : X \to X$ تابعاً (دالة) function ما. نقول إن x من X نقطة ثابتة fixed Point للتابع f إذا كان $f(x)=x$ ، أي إذا كانت صورتها وفق التابع هي النقطة ذاتها.

– نقول عن الفضاء المتري metric space X إنه يتمتع بخاصة النقطة الثابتة إذا كان لكل تابع مستمر continuous function من X إلى X نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

– نقول عن مجموعة جزئية من فضاء متري X إنها مغلقة closed إذا كانت تحوي هذه المجموعة كل نقاطها الحدية limit points. ونقول عن نقطة $x \in X$ إنها نقطة حدية لمجموعة جزئية A من X إذا كانت كل كرة مفتوحة open sphere مركزها x تحوي نقطة واحدة على الأقل من A مختلفة عن x.

– ونقول عن فضاء متري إنه متراص إذا كانت كل متوالية sequence فيه تحوي متوالية جزئية متقاربة convergent subsequence إلى عنصرٍ ما من هذا الفضاء.

– الفضاء المنظم normed space X هو فضاء خطي (متجهي) linear space (vector) معرّف عليه نظيم norm، والمساواة $d(x,y)=\|x-y\|$، من أجل كل x و y من X، تعرّف على X مسافة (مترك metric)، تسمى المسافة المشتقة من النظيم $\|.\|$ أو المولدة منه. والنظيم تابع يخصص لكل عنصر x من الفضاء الخطي عدداً حقيقياً $\|x\|$ بحيث يتحقق من أجل كل x و y من X:

$$(1)\ \|x\| \geq 0\ \ \&\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$(2)\ \|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|, \qquad \forall \alpha \in R$$
$$(3)\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

– لنفرض أن X فضاء متري و $0 < \varepsilon$. نقول عن مجموعة جزئية A من X إنها ε – شبكة ε - net إذا كانت A منتهية، وكان $X=\cup_{a\in A} B(a;\varepsilon)$ حيث $B(a;\varepsilon)$ الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها ε. ونقول عن الفضاء المتري X إنه محدود كلياً totally bounded إذا كان له ε – شبكة من أجل كل $0 < \varepsilon$.

– نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء خطي X إنها محدبة إذا اقتضى انتماء أي نقطتين x و y إلى A، إلى انتماء أي عنصر من عناصر المجموعة الآتية:

$$M=\{z\in X: z=\alpha x+(1-\alpha)y, 0\leq\alpha\leq 1\}$$

إلى A.

– المغلف المحدب convex hull أو convex envelope لمجموعة جزئية A من الفضاء الخطي X هو أصغر مجموعة محدبة في X تحوي A. يُرمز للمغلف المحدب بالرمز conv A.

– لنفرض أن X فضاء متري. نقول عن الجماعة $\{G_i\}_{i\in I}$ من مجموعة أجزاء X إنها تشكل تغطية cover للمجموعة X إذا كانت كل نقطة من X تنتمي لواحدة على الأقل من G_i، أي إذا كان $X=U_{i\in I} G_i$.

– لنفرض أنَّ (X, d) فضاء متري، ولتكن E و F مجموعتين جزئيتين من X، وليكن $f: F\to E$ تابعاً لـF في E، و ε عدداً موجباً. نقول إنَّ x نقطة ε – ثابتة للتابع f إذا كان $d(x, f(x))<\varepsilon$.

– لنفرض أنّ X فضاء خطي و x_1، ....، x_n من X، و λ_1، ....، λ_n أعداد حقيقية غير سالبة تحقق $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$؛ يسمى الشعاع $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ تركيباً محدّباً convex combination للعناصر x_1، .....، x_n.

وفي هذه الحالة يمكن التعبير عن المغلف المحدب كما يلي:

$$conv\,A=\left\{z\in A: z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, x_i\in A, \lambda_i\geq 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\}$$

في البدء سنمهد لإثبات صحة مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة بإثبات صحة توطئة نجد نسخة معدّلة منها في [1] أو في [4].

النتائج والمناقشة:

توطئة:

لنفرض أن (X, d) فضاء متري، وأن F و E مجموعتان جزئيتان من X، حيث E متراصة، و F مغلقة. ولنفرض أن $f: F\to E$ تابع مستمر، وله نقطة ε – ثابتة من أجل كل $0 < \varepsilon$، فإن للتابع f نقطة ثابتة.

البرهان:

من أجل كل n من N (مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers المغايرة للصفر) نفرض أن x_n نقطة $\frac{1}{n}$ – ثابتة للتابع f، أي أن: $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. ومنه فإننا نحصل على المتوالية (x_n) من نقاط F. ومن ثمَّ فإنَّ المتوالية $\{f(x_n)\}$ من E تحوي متوالية جزئية متقاربة لأن E متراصة. ولتكن هذه المتوالية الجزئية $\{f(x_{n_k})\}$، حيث $f(x_{n_k})\to y$ مثلاً.

ومن متراجحة المثلث triangle inequality نجد أن:

$$d(x_{n_k}, y) \le d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), y)$$

وبما أن: $d\left(f\left(x_{n_k}\right), y\right) \to 0$ و $d\left(x_{n_k}, f\left(x_{n_k}\right)\right) < \dfrac{1}{n_k}$ وفق ما فرضنا.

إذن $d(x_{n_k}, y) \to 0$ ، أي أن $x_{n_k} \to y$.

وبما أن f مستمر، فإن: $f\left(x_{n_k}\right) \to f(y)$. ومن وحدانية نهاية المتوالية في الفضاء المتري نجد أن: f(y) = y.
وبما أن F مغلقة، فإن y (نهاية المتوالية $\left(x_{n_k}\right)$) من F، ومن ثمَّ فإن f(y) موجودة، أي أنه يوجد للتابع f نقطة ثابتة y.

مبرهنة:

ليكن E فضاء منظماً، ولتكن C مجموعة جزئية متراصة من E. فإنه من أجل كل 0 < ε ، يوجد مجموعة جزئية منتهية F من C، وتابع مستمر f، حيث $f : C \to Conv\,F$,($Conv\,F$ هو المغلَّف المحدب للمجموعة F)، بحيث إن $\|x - f(x)\| < \varepsilon$ من أجل كل x من C.

الإثبات:

نظراً إلى أنَّ C مجموعة متراصة، فإنها محدودة كلياً، لذلك يوجد مجموعة جزئية منتهية F من C بحيث إن $\{B(\upsilon;\varepsilon) : \upsilon \in F\}$ تغطي C. من أجل كل نقطة υ في F لنضع $\varsigma_\upsilon(u) = max\{0, \varepsilon - \|u - \upsilon\|\}$. ومن ثمَّ فإنَّ ς_υ تابع مستمر، و $\varsigma_\upsilon(u) > 0 \Leftrightarrow u \in B(\upsilon;\varepsilon)$. ومنه من أجل كل نقطة u في C، لدينا $\varsigma_\upsilon(u) > 0$ من أجل نقطة واحدة على الأقل υ في F.

لنضع الآن، من أجل u في C، $f(u) = \dfrac{\sum_{\upsilon \in F} \{\varsigma_\upsilon(u).\upsilon\}}{\sum_{w \in F} \varsigma_w(u)}$ (مؤثر شاودر Schauder operator) (انظر الصفحة41 من [5]. ومن ثمَّ فإنَّ f(u) موجود في E. وأنَّ $f : C \to E$ تابع مستمر، نظراًإلى أنَّ أياً كان ς_υ فهو مستمر، وأننا نستخدم عمليات الفضاء الشعاعي (المتجهي) في تركيب القيم.

كذلك فإنَّ f(u) ينتمي إلى conv F نظراً إلى أنَّ υ . $f(u) = \sum_{\upsilon \in F} \dfrac{\varsigma_\upsilon(u)}{\sum_w \varsigma_w(u)}$.

ولكن $\sum_\upsilon \dfrac{\varsigma_\upsilon(u)}{\sum_w \varsigma_w(u)} = 1$ ، و $\dfrac{\varsigma_\upsilon(u)}{\sum_w \varsigma_w(u)} \ge 0$ من أجل كل υ.

لذلك فإن $f(u) \in conv\,F$.

كذلك فإنّ f(u) تركيب محدب في العناصر υ التي تحقق $\varsigma_\upsilon(u) > 0$ ، أي إنه من أجل $u \in B(\upsilon;\varepsilon)$.
ولكن $B(u;\varepsilon)$ مجموعة محدبة، ومنه فإنّ $f(u) \in B(u;\varepsilon)$. ومن ثمَّ فإن $\|u - f(u)\| < \varepsilon$. وهو المطلوب إثباته.

مبرهنة (شاودر):

إذا كان E فضاءً منظماً، و D مجموعة جزئية غير خالية ومغلقة ومحدبة من E، وكان $\Phi : D \to D$ تابعاً مستمراً بحيث إنّ $\Phi(D) \subseteq C \subseteq D$ من أجل مجموعة متراصة C، فإنّ للتابع Φ نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

الإثبات:

سنثبت أنَّ للتابع Φ نقطة $\varepsilon-$ ثابتة، من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon >0$، وعندها يكون لهذا التابع نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

من المبرهنة السابقة يوجد مجموعة جزئية منتهية F_ε من C، وتابع مستمر $f_\varepsilon : C \to conv\ F_\varepsilon$، بحيث $\|f_\varepsilon(x)-x\|<\varepsilon$ من أجل كل x في C.

ومن المعروف أنَّ المجموعة conv F_ε تتمتع بخاصة النقطة الثابتة، نظراً إلى أنَّ F_ε منتهية. ومن ثمَّ فإن التابع المستمر $f_\varepsilon \circ \Phi|_{convF_\varepsilon} : conv\, F_\varepsilon \to conv\, F_\varepsilon$ (مقصور restriction التابع $f_\varepsilon \circ \Phi$ على $conv\ F_\varepsilon$) له نقطة ثابتة، ولتكن، مثلاً، Z_ε. ومنه $f_\varepsilon \Phi(Z_\varepsilon)=Z_\varepsilon$، بحيث إن $\|\Phi(Z_\varepsilon)-Z_\varepsilon\|<\varepsilon$. أي أن Z_ε هي نقطة

ε – ثابتة للتابع Φ. وهو المطلوب إثباته.

الاستنتاجات:

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة اعتماداً على توطئة حول النقطة $\varepsilon-$ ثابتة.

المراجع:

[1] DUGUNDJI, J.; GRANAS, A - "*Fixed Point Theory"*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1982.

[2] RIZZOLO, D.; EDWARD, F - "*A Fixed Point Theorem for the Infinite – Dimensional Simplex",* 3rd. 4.2008 $\langle$ ar Xiv: math / 06107070 V/ [math. GN] 24 Oct 2006.$\rangle$

[3] SIMMONS, G.F.- *"Introduction To Topology and Modern Analysis"*, McRraw- Hill, US, 2003.

[4] SMART, D.R.-*"Fixed Point Theorems"*, Cambridge University Press, UK,1974.

[5] ZEIDLER, E.- *"Applied Functional Analysis"*, Springer – Verlag, Berlin,1995.