مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

دراسة النقطة الثابتة في الفضاء اللاأرخميدي

الدكتور أحمد الغصين*
نور بالوش**

(تاريخ الإيداع 3 / 7 / 2008. قُبِل للنشر في 2008/10/12)

□ الملخّص □

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض الدوال المستمرة والمعرفة على فضاءات حقيقية والتي تملك نقطة ثابتة، ثم نقل هذه الدوال ودراستها على فضاءات معرفة على حقول لا أرخميدية
((Non-Archimedean vector spaces))، وبيان هل مثل هذه الدوال موجودة، أو موجودة ضمن شروط محددة، و دراسة النقطة الثابتة لهذه الدوال. وقد أثبتنا انه إذا كان الحقل K مقيما لا أرخميدياً ، وكان ρ معياريا يحقق الشرطين D_2 و B_2 ، عندئذ لا يوجد دالي محدود وغير مبتذل في الفضاء المعير X_ρ . أما إذا كان X فضاء لا ارخميديا كروياً تاماً ومنظماً، وكان التطبيق $T : X \to X$ تطبيقا مقلصا فإن T يملك نقطة ثابتة.

الكلمات المفتاحية: نقطة ثابتة، دالة مستمرة، حقل لاأرخميدي، فضاء معيّر.

* أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية – سورية.
** طالبة دراسات عليا (ماجستير) –قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (4) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (4) 2008

On Fixed Point in Non-Archemedean Spaces

Dr. Ahmad Alghoussein*
Nour Baloush**

(Received 3 / 7 / 2008. Accepted 12/10/2008)

□ ABSTRACT □

The purpose of this article is to study the behavior of some functions of spaces over field K (Real or Complex). These functions must be continuous, realize specific conditions and have fixed point. We will then study the existence of those functions after defining the above spaces over Non-Archimedean field. Afterwards, we will study the fixed its points. We prove that, if K is a non-Archimedean valued field and ρ a modular satisfying the conditions D2 and B_2.

There exists no nontrivial modular bounded linear functional in the modular space Xρ. We also show, if X be a Non-Archimedean spherically complete formed space, and $T : X \to X$ is contractive mapping then T has a unique fixed point.

Keywords: Fixed point, Continuous Function, Non-Archimedean fields, Modular Spaces.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University Lattakia, Syria.**
**** Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University Lattakia, Syria.**

مقدمة:

إن نظرية النقطة الثابتة في الرياضيات يمكن أن تكون نتيجة لدراسة سلوك توابع معرفة على فضاءات حقيقية أو مركبة أو غير ذلك، ولقد لاحظ الدارسون في هذا المجال وجود نقطة للدالة تحقق الشرط $f(x)=x$ عندئذٍ اهتموا بدراسة هذه النقطة وسميت نقطة ثابتة للدالة، هذا وقد يكون للدالة نقطة ثابتة، عدة نقاط، أو لا يكون لها أية نقطة ثابتة [1].

من أهم من درس وأعطى تطبيقات عن النقطة الثابتة باناخ وبرا ور ونسبت النقطة الثابتة إليهم.

مثال(1):

إن الدالة $f(x)=x^3-3x$ تملك أكثر من نقطة ثابتة على كل المجموعة $\Re$ (مجموعة الأعداد الحقيقية) ، بينما الدالة $f(x)=e^x-1$ تملك نقطة ثابتة وحيدة، أما الدالة $f(x)=x+1$ فلا تملك أية نقطة ثابتة في $\Re$ لأن $x\neq x+1$.

أهداف البحث وأهميته:

يهدف البحث إلى إعطاء فكرة جديدة عن دراسة النقطة الثابتة، وخاصة عند تعريف الدوال على فضاءات شعاعيه فوق حقول لاأرخميدية، حيث تتحول مناطق تعريف الدوال من شكل إلى آخر، وهذا ماسنراه في سياق البحث.

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولا بإعطاء بعض التعاريف والخصائص الضرورية لعرض الموضوع والتي تستخدم في برهان النتائج التي حصلنا عليها انظر [1] ، [2].

تعريف(1-3):

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، وليكن d تابع مسافة يحقق بدلاً من متراجحة المثلث الشرط التالي من أجل جميع القيم $x,y,z\in X$:

$$d(x,y)\le \max(d(x,y),d(y,z))$$

عندئذٍ نسمي تابع المسافة d تابع مسافة لاأرخميدي (Non-Archimedean Metric) أو تابع فوق المسافة (Ultra metric).

ونسمي الثنائية (X,d) فضاءً لاأرخميدياً (Non-Archimedean Space) أو فضاء فوق متري (Ultra metric Space) [4] .

من المعلوم أنه من تعريف دالة المسافة على فضاء حقيقي أو عقدي يمكن أن نعرف نظيماً بالشكل :

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

وهنا يمكن أن نعرف نظيماً لاأرخميدياً في الفضاء اللاأرخميدي (X,d) . أي نستعيض عن متراجحة المثلث في تعريف النظيم بـِ :

$$\|x+y\|\le \max(\|x\|,\|y\|)$$

ومن المعلوم أيضاً أنه في أي فضاء مُنظم منته البعد يمكن أن نعرف أكثر من نظيم وهذه النظم جميعها متكافئة.

تعريف(2−3):

ليكن X فضاءً مترياً تاماً، ولتكن φ دالة من الفضاء X في نفسه أي $\varphi : X \to X$. نسمي φ دالة مقلصة(contraction mapping)، إذا وجد عدد حقيقي $0 \le q \le 1$ بحيث تتحقق العلاقة التالية وذلك مهما تكن

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le q d(x, y) \quad : x, y \in X$$

تعريف(3−3):

ليكن X فضاءً شعاعياً فوق حقل اختياري K ($\mathrm{K} = \Re$ أو $\mathrm{K} = C$)،حيث $\Re$ حقل الأعداد الحقيقية و C حقل الأعداد العقدية.نسمي الدالي $\rho : X \to [0, \infty]$ معيراً (Modular) إذا حقق الشروط التالية:

i. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\rho(\alpha x) = \rho(x); \ \forall \alpha \in \mathrm{K} \ \ with \ \ |\alpha| = 1, \ \ \forall x \in X$

$\rho(e^{it} x) = \rho(x); \ t \in \Re \ \ in \ case \ of \ \ X \ \ complex$

iii. $\rho(\alpha x + \beta y) \le \rho(x) + \rho(y); \ \alpha, \beta \ge 0, \ \ \alpha + \beta = 1, \ \forall x, y \in X$

أما إذا استبدلنا الشرط الأخير بالشرط التالي:

iv. $\rho(\alpha x + \beta y) \le \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y); \ \ \alpha, \beta \ge 0; \ \alpha^s + \beta^s = 1$

$$\forall x, y \in X ; s \in]0,1]$$

فإن الدالي المعير ρ يدعى $s-$ داليا معيرا محدبا (s-convex modular)، وفي حال كان $s = 1$ فإن الدالي ρ يدعى اختصاراً داليا معيرا محدبا(convex modular) .

وهنا يمكن أن نعرف فضاء شعاعيا بالشكل $X_\rho = \left\{ x \in X : \rho(\lambda x) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0 \right\}$ ونسميه فضاء معيرا (Modular space) أو فضاء معيرا تابعيا (Modular function space). إن الفضاء X_ρ هو فضاء جزئي من الفضاء الخطي X .

يمكننا تعريف نظيماً في هذا الفضاء بالشكل:

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ |\alpha| > 0; \rho\left(\frac{x}{a} \right) \le 1 \right\}$$

وعندئذٍ تسمى الثنائية $\left(X_\rho, \| \ \|_\rho \right)$ فضاء معيّرا منظّما.

مثال(2):

إذا كان X $s-$ فضاءً منظماً ($s-$ متجانساً)، عندئذٍ $\rho(x) = \|x\|^s$ يشكل معيارياً $s-$ محدباً في الفضاء X . (نشير هنا أنه بالشكل العام المعياري ρ لا يشكل نظيماً لأنه يأخذ قيمة $+\infty$).

مثال(3):

إذا كـــان $X = L^p$ علـــى مجـــال $[a,b]$ عندئـــذٍ $\rho(x)=\int_a^b |x(t)|^p\, dt$ يكـــون معياريـــا ρ − محدبا في X ، حيث $0<p<1$ ويكون معيارياً محدباً إذا كان $p\geq 1$.

تعريف (3-4):

الفضاء X^* هو الفضاء الممدد للفضاء X_ρ بمعنى أنه فضاء جميع الدوال الخطية المستمرة ذات القيم من K فوق الفضاء $(X_\rho, \|\,\|_\rho)$.

الدالة الخطية f^* في الفضاء X^*_ρ نسميها محدودة معيارياً (Modular bounded) إذا وجد عدد حقيقي $\gamma>0$ بحيث أن:

$$|f^*(x)| \leq \gamma(1+\rho(x)) \qquad \forall x \in X_\rho$$

تعريف (3-5):

φ − دالة ($\varphi - function$) هي عبارة عن دالة φ معرفة في $R^+=[0,\infty[$ ، مستمرة، غير متناقصة بحيث أن $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0$ من أجل $u>0$ ، $\varphi(u)\to\infty$ عندما $u\to\infty$.

مبرهنة (3-1) [8]:

بفرض Σ هي σ −الجبر من المجموعات الجزئية من المجموعة Ω ، μ قياس في Σ ، لنرمز بـ X لفضاءات التوابع f ، Σ − مقيسة في Ω عندئذٍ مهما تكن − دالة φ فإن

$$\rho(x)=\int_\Omega \varphi(|x(t)|)d\mu \qquad (*)$$

هي دالة معيرة في X . إذا كانت الـ φ − دالة، φ محدبة فإن المعياري ρ محدب وان الدالي المعرف في (*) يشكل نظيماً في الفضاء X

تعريف(3-6):

الفضاء المعير X_ρ المعرف فيه المعياري (*) السابق نسميه فضاء أورليتش (Orlicz Space) ونرمز له بـ $L^\varphi(\Omega,\Sigma,\mu)$ أو اختصاراً L^φ .

مبرهنة(3-2):

ليكن L^φ فضاء أورليتش ، إذا كانت الـ φ − دالة، φ محدبة عندئذٍ L^φ هو فضاء باناخ $[8, II.p83]$.

تعريف(3-7):

لتكن (x_n) متتالية من الفضاء المعير X_ρ ، عندئذٍ نقول عن المتتالية (x_n) إنها:

i. متتاليـة متقاربـة بالمعيـاري ρ مـن النقطـة x إذا كـان $\rho(x_n-x)\underset{n\to\infty}{\to}0$ ونكتـب ذلـك بالشـكل

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x$$

ii. متتالية كوشي بالمعياري ρ (أي ρ − كوشي)إذا تحقق $\rho(x_n-x_m)\underset{n,m\to\infty}{\to}0$

iii. نقول عن الفضاء المعير X_ρ أنه ρ − تام إذا كانت كل متتالية ρ − كوشي هي ρ متقاربة.

iv. نسمي ρ تاما في $\Re$ إذا تحقق الشرط: $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(\alpha(x_n-x_m)=0;\ \alpha>0$

v. نقول عن ρ انه معياري مرتب (Modular ordered)في المجموعة $\Re$ إذا كانت هذه المجموعة مرتبة وكان ($|x|\le|y|\Rightarrow\rho(x)\le\rho(y)$ مهما تكن x و y من $\Re$).

vi. نسمي ρ مستمرا في $\Re$ إذا كان ρ مرتبا وكانت $x_n\underset{n\in N}{\downarrow}0$ يقتضي $\inf\limits_{n\in N}(\rho(x_n))=0$

تعريف(3-8)[2] :

لتكن B مجموعة جزئية من الفضاء المعير X_ρ $(B\subset X_\rho)$، نقول عن المجموعة B أنها $\rho-$ مغلقة إذا تحقق من أجل جميع المتتاليات $(x_n)\subset B$ مايلي:

$$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\rho}x\Leftrightarrow x\in B$$

ونرمز إلى لصاقة المجموعة B وفق ρ بالرمز $\overline{B}^{\rho}$.

تعريف(3-9) [2]:

نقول عن ρ أنها تحقق خاصة فاتو (Fatou Property) إذا كان :

$$\rho(x-y)\le\liminf_{n\to\infty}\rho(x_n-y_n)$$

حيث $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\rho}x$ & $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{\rho}y$

تعريف(3-10) [2]:

نقول عن الدالة المعيرة ρ إنها تحقق الشرط Δ_2 إذا كان $\rho(2x_n)\underset{n\to\infty}{\to}0$ حينما $\rho(x_n)\underset{n\to\infty}{\to}\infty$.

مبرهنة (3-3) [3] :

ليكن X_ρ فضاءً معيّراً $\rho-$ تاماً. بفرض أن ρ دالة معيرة $s-$ محدبة تحقق الشرط Δ_2 و تحقق أيضا خاصة فاتو. ولتكن $B\subset X_\rho$ مجموعة جزئية $\rho-$ مغلقة من الفضاء المعير X_ρ و $T:B\to B$ تطبيقا بحيث أنه:

$$(\ast\ast)\quad \exists c,k\in\Re^+ : c>\max(1,k),\ \rho(c(Tx-Ty))\le k^s\rho(x-y);\forall x,y\in B$$

عندئذٍ T يملك نقطة ثابتة.

ملاحظات:

1.من الطبيعي إدخال الثوابت c,k في فرضية الدالة المقلصة مقطعياً في الفضاءات المعيرة. ونشير هنا إلى أن برهان المبرهنة (3-) يتم بشكل بسيط وذلك في الحالة الخاصة عندما $s=1$ أي ($\rho-$ محدب) و $c=2>k>0$.

2.الشرط (**) في المبرهنة(1-4) محقق من أجل الثابت c_0 بحيث أن $1<c_0<c$:

$$\rho(c_0(Tx-Ty))=\rho\left(\frac{c_0}{c}c(Tx-Ty)\right)$$

$$\le \frac{c_0^s}{c^s}\rho\big(c(Tx-Ty)\big)\le k_0^s\rho(x-y)$$

عندما $k_0=\dfrac{c_0}{c}k<c_0$ استناداً لكون $\dfrac{k}{c}<1$.

تعريف(3-11) [5]:

نقول عن الدالة ρ إنها تحقق الشرط D_2 إذا تميّز بالخواص التالية :

من أجل كل $x\in X$ يوجد $y\in X$ بحيث أن:

$$\rho(x-y)\le\frac{\rho(x)}{2} \qquad and \qquad \rho(y)\le\frac{\rho(x)}{2}$$

تعريف(3-12) [5]:

نقول عن الدالة ρ أنها تحقق الشرط B_2 إذا كان $\rho(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ يقتضي أن $\rho(\alpha x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ من أجل أي $\alpha\in\mathrm{K}$.

النتائج والمناقشة:

من المعلوم أن أي دالة تقليص مستمرة من فضاء تام (X,d) حقيقي في نفسه تملك نقطة ثابتة وحيدة. إلا أنه إذا أخذنا الفضاء المعير X_ρ نجد أنه حتى يكون للدالة f نقطة ثابتة يجب أن تحقق شرط Δ_2 وخاصة فاتو(Fatou Property).

أما في الفضاءات اللاأرخميدية فإننا سنجد أن الأمر مختلف تماما. فقد توجد دالة معرفة في الفضاء الحقيقي محدودة وتملك نقطة ثابتة إلا أنه عند الانتقال إلى الفضاءات اللاأرخميدية فان هذه الدالة غير موجودة وبالتالي لا يمكن التحدث عن النقطة الثابتة وهذا ما سنبينه في المبرهنة التالية .

مبرهنة(4-1):

إذا كان X فضاءً لاأرخميدياً، ρ معياريا يحقق الشرطين D_2 ، B_2 عندئذ لا توجد دالة محدودة وغير مبتذلة(لا تطابق الصفر) في الفضاء المعير X_ρ .

البرهان:

لنفرض جدلا أنه توجد دالة محدودة غير مبتذلة $f^*\in X_\rho^*$ ، عندئذٍ يمكن أن نجد نقطة $\alpha_0\in\mathrm{K}^*, y_0\in X_\rho$ بحيث أن: $\rho(\alpha_0 y_0)<\infty$ & $0\ne f^*(y_0)\in\mathrm{K}^*$

وعلاوة على ذلك، من التعريف (3-4) يوجد $\gamma>0$ بحيث:

$$(a) \qquad \left|f^*(x)\right|\le\gamma(1+\rho(x)); \quad x\in X_\rho$$

لنعرّف دالة جديدة بالشكل:

$$(b) \qquad \varphi^*(x):=\left[f^*(y_0)\right]^{-1}f^*\left(\alpha_0^{-1}x\right) \qquad \forall x\in X_\rho$$

عندئذٍ $\varphi^*(x)$ دالة معيرة خطية ومحدودة وغير مبتذلة لأن:

$$|\varphi^*(x)| = \left|[f^*(y_0)]^{-1}\right| . \left|f^*\left(\alpha_0^{-1}x\right)\right| = \left|[f^*(y_0)]^{-1}\right| . |\alpha_0^{-1}| \, |f^*(x)|$$

من (a) يمكن أن نكتب

$$|\varphi^*(x)| \le \gamma \left|[f^*(y_0)]^{-1}\right| . |\alpha_0^{-1}| (1+\rho(x)); \quad x \in X_\rho$$

إذاً:

$$|\varphi^*(x)| \le \gamma_0 (1+\rho(x)); \quad \gamma_0 = \gamma \, |\alpha_0^{-1}| \, |[f^*(y_0)]^{-1}|$$

لنضع $x_0 = \alpha_0 y_0$ ، عندئذ من العلاقة (b) نحصل على:

$$\varphi^*(x) = [f^*(y_0)]^{-1} f^*\left(\alpha_0^{-1}\alpha_0 y_0\right) = e$$

إذاً:

$$|\varphi^*(x)| = |e| = 1 \;\; and \quad \rho(x_0) < +\infty$$

بما أن ρ يحقق الشرط D_2 فإنه يوجد $x_1, y_1 \in X_\rho$ بحيث أن:

$$x_0 = x_1 + y_1, \; \rho(x_1) \le \frac{\rho(x_0)}{2} \;\; and \quad \rho(y_1) \le \frac{\rho(x_0)}{2}$$

وعلى أية حال،

$$1 = |\varphi^*(x_0)| \le \max(|\varphi^*(x_1)|, |\varphi^*(x_1)|)$$

وهنا يمكننا أن نفرض $|\varphi^*(y_1)| \le |\varphi^*(x_1)|$ وبالتالي نجد $|\varphi^*(x_1)| \ge 1$

مرة ثانية نطبق الشرط D_2 فإنه يوجد $x_2, y_2 \in X_\rho$ بحيث أن:

$$x_1 = x_2 + y_2, \; \rho(x_2) \le \frac{\rho(x_1)}{2} \le \frac{\rho(x_0)}{2^2} \;, \;\; \rho(y_2) \le \frac{\rho(x_0)}{2^2} \;\; and \;\; |\varphi^*(x_2)| \ge 1$$

وبالتالي يمكن أن نحدد متتالية (x_n) من عناصر X_ρ بحيث أن:

$$\rho(x_n) \le \rho(x_0)/2^n \quad \text{و} \quad |\varphi^*(x_n)| \ge 1$$

وهنا نجد أن

$$\rho(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

وبما أن ρ يحقق الشرط B_2 بمعنى $\rho(\beta x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ من اجل أي $\beta \in K^*$.

لنختار β من K^* معطى، بحيث أن $|\beta| > 2\gamma_0$ ، عندئذ من العلاقة (b) نحصل على:

$$|\varphi^*(\beta x_n) \le \gamma_0 (1+\rho(\beta x_n))$$

$$|\beta| \, |\varphi^*(x_n)| \le \gamma_0 (1+\rho(\beta x_n))$$

أي إن $|\beta| \le \gamma_0 (1+\rho(\beta x_n))$ ولكن $\rho(\beta x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ وبالتالي:

$|\beta| \le \gamma_0$ وهذا تناقض لأن $|\beta| > 2\gamma_0$.

أي إنه لا يوجد دالي محدود وغير مبتذل في الفضاء المعير X_ρ ، وهو المطلوب.

نشير هنا، إنه في هذه الحالة لا يمكن التحدث عن النقطة الثابتة. إلا أنه إذا فرضنا شروطا إضافية على الفضاء المعير وعلى الدالة المعرفة فيه فإننا نجد ما نسعى إليه وهذا نبينه في المبرهنة التالية.

مبرهنة (2-4):

ليكن X فضاء منظما لاأرخميدياً كروياً تاماً (أي الفضاء محدودا في 1)، وليكن $T : X \to X$ تطبيقا مقلصا، عندئذٍ T يملك نقطة ثابتة.

البرهان:

لتكن $B_a := B[a, \|a - Ta\|]$ كرات مغلقة مراكزها النقطة a ونصف قطرها $\|a - Ta\|$، ولتكن A مجموعة الكرات التي تحقق من أجل كل $a \in X$:

$$B_a \le B_b \Leftrightarrow B_b \subset B_a$$

فتكون A مجموعة مرتبة جزئياً. لنفرض أن A_1 هي أسرة الكرات المرتبة كلياً والجزئية من A.

بما أن X فضاء كروي تام فإننا نحصل على:

$$\bigcap_{B_a \in A_1} B_a = B \ne \phi$$

لتكن $b \in B$ & $B_a \in A_1$ عندئذٍ إذا كانت $x \in B_b$ فان

$$\|x - a\| \le \max\{\|a - b\|, \|b - x\|\} \le \|a - Ta\|$$

لأن $\|a - b\| \le \|a - Ta\|$

$$\|x - b\| \le \|b - Tb\| \le \max\{\|b - a\|, \|a - Ta\|, \|Ta - Tb\|\} = \|a - Ta\|$$

ومن ثم فإن $B_b \subseteq B_a$ و $x \in B_b$ من أجل كل $B_a \in A_1$ هذا يعني أن B_b حد أعلى للأسرة A_1 في A. وحسب تمهيدية زورن فإن المجموعة A تملك عنصرا أكبر، لنرمز له بـ B_z من أجل كل $z \in Z$. لنبرهن أن $z = Tz$.

لنفرض $z \ne Tz$، عندئذ استنادا لكون

$$\|Tz - T^2 z\| < \|z - Tz\|; \quad (T^2 := ToT) \qquad (***)$$

و $Tz \in B[T_z, \| Tz - T^2 z \|] \cap B[z, \| z - Tz \|]$

نحصل على $B_{Tz} \subseteq B_z$. لكن من (*) نجد أن $z \notin B_{Tz}$، وبالتالي $B_{Tz} \subset B_z$ و $B_{Tz} \ne B_z$ وهذا يناقض تعريف B_z ومنه فإن T يملك نقطة ثابتة.

<u>تعريف(1-4)[7]:</u>

لتكن S مجموعة جزئية من الفضاء المعير X_ρ وليكن $T : S \to S$ تطبيقا اختياريا. نسمي التطبيق T:

(I) – ρ – مقلصاً (ρ–contraction) إذا وجد عدد $\lambda < 1$ حقيقي بحيث أنه مهما تكن x و y من المجموعة S يكون: $\rho(T(x) - T(y)) \le \lambda\rho(x - y)$

(II) – ρ – لا توسيعي (ρ –nonexpansive) إذا كان $\rho(T(x)-T(y)) \le \rho(x-y)$ وذلك مهما تكن $x, y \in S$.

نسمي النقطة $x \in S$ نقطة ثابتة للتطبيق T إذا كان $T(x)=x$. إن مجموعة النقط الثابتة للتطبيق T نرمز لها بالرمز $S_{ix}(T)$.

ونقول عن المجموعة S إنها تتصف بخاصة النقطة الثابتة إذا كان كل تطبيق ρ – لا توسيعي فيها يملك نقطة ثابتة.

مبرهنة(3–4) [7]:

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من X_ρ ، ρ – تامة، ρ – محدودة. وليكن $T: S \to S$ ρ – مقلصا مقطعيا(ρ – strict contraction). عندئذ T يملك نقطة ثابتة وحيدة $z \in S$. علاوة على ذلك فان z هي ρ – نهاية لأي متتالية في S وضمن شروط التطبيق T[7].

مثال: نناقش في هذا المثال عدة حالات:

1– ليكن X هو الفضاء c_0 (c_0 هو فضاء المتتاليات المتقاربة من الصفر مع النظيم $\|x\| = \sup_k |t_k|$ وهو فضاء باناخ) فوق الحقل $\mathcal{K}$ مع تقييم منقطع(Discrete) في $\mathcal{K}$. من المعلوم أنه في هذه الحالة c_0 يكون تاما كرويا. ليكن $\ell \in \kappa$ حيث $0 < |\ell| < 1$. لنفرض أن $T: c_0 \to c_0$ تطبيق معرف بالشكل $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\ell, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. هنا نجد أن $\|T(x) - T(y)\| \le \|x - y\|$ لكن T لا يملك نقطة ثابتة في الفضاء c_0 [9].

2– ليكن X هو الفضاء c_0 فوق الحقل $\mathcal{K}$ حيث مجموعة التقييم كثيفة. من المعلوم أنه في هذه الحالة c_0 لا يكون تاما كروياً. بفرض أن T تطبيق معرف بالشكل كما يلي:

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (1, s_1 x_1, s_2 x_2, \ldots, s_n x_n, \ldots)$$

حيث (s_n) متتالية من κ مع $|s_n| < 1$ من اجل كل $n \in N$ ، $\lim_{n\to\infty} |s_n| = 1$ و $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} |s_i| \ne 0$

عندئذ التطبيق T هو تطبيق مقلص لكنه لا يملك نقط ثابتة في الفضاء c_0 [9].

3– ليكن X هو الفضاء c_0 فوق الحقل $\mathcal{K}$ حيث $\mathcal{K}$ غير كروي وتام . من المعلوم انه في هذه الحالة c_0 هو فضاء انعكاسي (Reflexive).إن التطبيق المعرف في الحالة الأولى هو التطبيق الكروي الوحيد من الفضاء c_0 في نفسه لكن هذا التطبيق لا يملك نقطة ثابتة [9].

الاستنتاجات والتوصيات:

مما سبق نستنتج انه ليس بالضرورة أن تملك الدالة نقطة ثابتة في الفضاءات اللاأرخميدية علما انه تملك نقطة ثابتة في الفضاءات الحقيقية وبالتالي فإنه عند تعميم الفضاءات الشعاعية تتغير الخواص ونحصل بذلك على أشكال جديدة للدوال كما نستنتج أنه في الفضاءات اللاأرخميدية والتطبيقات اللا توسعية في الفضاءات العكوسة والتي مجموعة قيمها محدبة ،مغلقة ومحدودة لا تملك بالضرورة نقطة ثابتة.

لذا نوصي باستمرارية دراسة الدوال التي نعرفها جيدا في الفضاءات الحقيقية والقيام بنقلها إن أمكن ذلك إلى الفضاءات اللاأرخميدية وهذا يؤدي إلى توسيع إدراك الباحث.

المراجع:

[1] Rosenlicht, M. 1968 - *Introduction to Analysis*, New York: Dover, p. 170.

[2] Kumam, P. 2004 -*Fixed point theorems for nonexpansive mappings in Modular Spaces.* Archivum Mathematicum (Brno) Tomus 40, 345-353.

[3] Taleb, A. AIT and Hanebaly, E. 1999 - *A Fixed Point theorem and its Application to integral equations in Modular function Spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, USA, Volume 127, Number 8, Pages 2335{2342S 0002-9939(99)04779-6.

[4] Van Rooij, A.C.M 1978 − *Non-Archimedean Functional Analysis*, Marcel Dekker، New York.

[5] Urbanski, R. 1986 - *On Modular Spaces over a field with valuation*. Springer-Verlag, Math. Z. 192, 405-408.

[6] Montgomery Smith, S.J.- *Orlicz - Lorentz Spaces*. Columbia, MO 65211,1993.

[7] Khami, M. A. - *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*. USA, El Paso, Texas 1968,.

[8] Musielak, J. 1983 - *Orlicz Space and Musielak Spaces*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag. Berlin Heidelberg, New York, Tokyo.

[9] Petalas, C. and Vidalis, T. 1993 – *A Fixed Point Theorem in Non-Archimedean Vector Spaces.* USA, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 118, Number 3, July 1993.