

حل معادلة شرودنغر الخطية للهزاز التوافقي مع كمون تابع δ ودراسة تأثير هذا الكمون على طيف الطاقة

الدكتور أحمد بيشاني*
الدكتور محمد موسى**
الدكتور أمير تفيحة***
محمود محمد****

(تاريخ الإيداع 22 / 3 / 2009. قُبل للنشر في 18 / 5 / 2009)

□ الملخص □

تم إضافة كمون تابع دلتا $\Omega\delta(x-x_0)$ إلى كمون الهزاز التوافقي $0.5mw^2x^2$ في معادلة شرودنغر الخطية، وتم تحويل تلك المعادلة إلى معادلة تفاضلية تقبل تابع القطع المكافئ الاسطواني $D_v(\xi)$ حلاً لها، وكذلك تم ربط الحلول على يمين ويسار التابع δ مما سمح بالحصول على معادلة تم حلها باستخدام برنامج حسابي. استطعنا حساب التغيير الحاصل في طاقة المستويات الطاقية للهزاز التوافقي (ΔE) وبالتالي رسم مخطط جديد لطيف طاقة الهزاز التوافقي.

الكلمات المفتاحية: هزاز توافقي، كمون تابع دلتا، توابع القطع المكافئ الاسطواني، معادلة شرودنغر

* أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
** أستاذ مساعد - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
*** مدرس - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
**** طالب دراسات عليا (ماجستير) - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Liner Schrödinger Equation Solving to Harmonic Oscillator with Delta Function potential and studying the Effect of this Potential on Spectra Energy

Dr. Ahmad Bishani*
Dr. Mohamed Mosa**
Dr. Amir Tifayh***
Mahmood Mohamed****

(Received 22 / 3 / 2009. Accepted 18/5/2009)

□ ABSTRACT □

Delta function potential $\Omega\delta(x - x_0)$ had been added to harmonic oscillator potential in liner Schrödinger equation, and that equation had been transformed to $0.5mw^2x^2$ differential equation which accepts parabolic cylinder function as a solution and also the joining of solution on right and left of delta function that allows getting an equation which was solved by using calculative program .We could calculate the resulting harmonic oscillator (ΔE), then drawing a new diagram for diagram for energy spectrum of harmonic oscillator.

Key words: Harmonic oscillator, Delta function Potential Parabolic cylinder function, Schrödinger equation.

* prof., Department of physics , Faculty of Sciences ,Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Associate prof, Department of physics , Faculty of Sciences ,Tishreen University, Lattakia, Syria.

*** Assistant prof, Department of physics , Faculty of Sciences ,Tishreen University, Lattakia, Syria.

***Postgraduate student , Department of physics , Faculty of Sciences ,Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

حظيت دراسة كمون تابع دلتا باهتمام العديد من الباحثين ولا سيما في مجال النموذج الطبقي النووي حيث الكمون مكون من كمون الهزاز التوافقي وكمون حفرة كمونية ، ولا بد من الإشارة إلى أن مشتق كمون الحفرة الكمونية يكافئ كمون تابع دلتا [1,2] بحسب العلاقة:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -V_0 \delta(r - r_0)$$

حيث V_0 عمق الحفرة الكمونية ، و r_0 عرضها .

لذلك رأينا أنه من المفيد دراسة الحالة الكلاسيكية (حالة البعد الواحد) بإضافة كمون تابع δ إلى كمون الهزاز

التوافقي في معادلة شرود نغر $V = \frac{1}{2}mw^2x^2$ ليصبح كمون الهزاز التوافقي :

$$V(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2} + \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x - x_0)$$

مع العلم أن إدخال كمون تابع δ في معادلة شرود نغر (Schrödinger equation) حظي باهتمام العديد من الباحثين [3,4]، ومع ذلك رأينا أن هناك مكاناً واسعاً يمكن الدخول إليه ومحاولة وضع إطار تحليلي لمعادلة شرود نغر الخطية وتحويلها إلى معادلة قابلة للحل. الفكرة الأساسية هي في عملية ربط حلول تلك المعادلة على يمين ويسار التابع δ تمهيدا لدراسة تأثير كمون تابع دلتا على مخطط طيف طاقة الهزاز التوافقي [5] ، و تجدر الإشارة إلى أن Ω في المعادلة السابقة هي مضروب بتابع δ ، وبالتالي يمكن القول مجازاً أن Ω تعبّر عن استطاعة هذا التابع حيث إن زيادة قيمة Ω تؤدي حتماً إلى زيادة الكمون المضاف أي زيادة تأثير كمون تابع δ علماً أن واحدة قياس Ω هي مقلوب مربع واحدة قياس الطول أو البعد .

أهمية البحث وأهدافه:

تظهر أهمية البحث في إيجاد حل تحليلي لمعادلة شرود نغر الخطية للهزاز التوافقي بعد إضافة كمون تابع δ ودراسة تأثير هذا الكمون اللانهائي (infinite potential) على طيف طاقة الهزاز التوافقي في البعد الواحد مما يسمح لنا بفهم أكبر لكيفية حدوث الانشطار السبين- مدار في النوى انطلاقاً من إضافة التابع $\delta(x)$ أو $\delta(r)$ إلى كمون الهزاز التوافقي $0.5mw^2x^2$ الذي يكافئ إضافة الحفرة الكمونية إلى كمون الهزاز في النموذج الطبقي النووي.

طريقة البحث ومواده:

تعطى معادلة شرودنغر الخطية:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

الكمون $V(x)$ وكما أشرنا مكون من حدين :

$$V(x) = V_{11}(x) + V_{22}(x) \quad \text{حيث:} \quad V_{11} = \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad \text{كمون هزاز توافقي ، و} \quad V_{22}(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x - x_0)$$

كمون تابع δ (كمون لانهايتي) [6] من أجل ذلك المعادلة (1) تكتب:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x - x_0) \right] \psi(x) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

إن حل المعادلة (2) مستمر في جميع نقاط الفراغ ما عدا النقطة $x = x_0$ مكان تواجد التابع δ حيث تملك انقطاع تفاضلي في تلك النقطة و من شرط استمرارية التابع الموجي نجد :

$$\psi(x_0 + 0) = \psi(x_0 - 0)$$

ولكن مشتق التابع الموجي غير مستمر عند $x = x_0$ ويعبر عن ذلك بشرط الربط [7,8] :

$$\psi'(x_0 + 0) - \psi'(x_0 - 0) = 2\Omega\psi(x_0) \dots \dots \dots (3)$$

أو بالشكل [9] :

$$\psi'(x_0 + \varepsilon) - \psi'(x_0 - \varepsilon) = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) \psi(x) dx$$

واضح أن المعادلة (3) تمثل الشروط الحدية للانقطاع التفاضلي في التابع الموجي.

$$\text{نفرض } \lambda^2 = \frac{m\omega}{\hbar} \text{ \& } \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}, \text{ و ندخل متحول جديد } \xi = \sqrt{2}\lambda x$$

عندئذ المعادلة (1) يمكن أن تكتب بالشكل [3,10,11] :

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\varepsilon - \frac{\xi^2}{4} \right) \psi(\xi) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{وإلتالي تصبح المعادلة (4): [5,10,11]} \quad \nu = \varepsilon - \frac{1}{2} \text{ أو } \varepsilon = \nu + \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) \psi(\xi) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

المعادلة التفاضلية (5) تملك حلول تسمى توابع القطع المكافئ الاسطواني [11] أو توابع VEBER-

ERMETA وهي :

$$D_\nu(\xi), D_\nu(-\xi), D_{-\nu-1}(i\xi), D_{-\nu-1}(-i\xi) \text{ [3,4,11]} \text{ التابع } D_\nu(\xi) \text{ يعطى بدلالة التوابع الأخرى}$$

بالعلاقة [12,13,14] :

$$\begin{aligned} D_\nu(x) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{\frac{\nu\pi}{2}} D_{-\nu-1}(i\xi) + e^{-\frac{\nu\pi}{2}} D_{-1-\nu}(-i\xi) \right] \\ &= e^{-\nu\pi} D_\nu(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{-(\nu+1)\pi}{2}} D_{-\nu-1}(i\xi) \\ &= e^{\nu\pi} D_\nu(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{\nu+1}{2}} D_{-\nu-1}(-i\xi) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

إذا كانت ν عدد صحيح موجب أي: $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ، يعطى التابع $D_\nu(z)$ بدلالة كثيرة الحدود الهرميتية كما يلي [15,16]:

$$D_n(\xi) = 2^{-n} e^{-\xi^2} H_n(\xi)$$

وبالتالي يمكن الحصول على القيم الذاتية لطاقة الهزاز التوافقي المعروفة:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega, E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega, E_3 = \frac{5}{2} \hbar \omega, \dots$$

إذا كانت $\nu = \varepsilon - \frac{1}{2}$ (حيث $\varepsilon = \frac{E}{\hbar \omega}$) عدد غير صحيح وغير سالب عندئذ التابعان

$D_\nu(\xi), D_\nu(-\xi)$ [11,16,17] هما تابعان خطيان مستقلان والحل العام للمعادلة (5) يمكن أن يكتب بالشكل التالي:

$$\psi(\xi) = c_1 D_\nu(\xi) + c_2 D_\nu(-\xi) \dots \dots \dots (7)$$

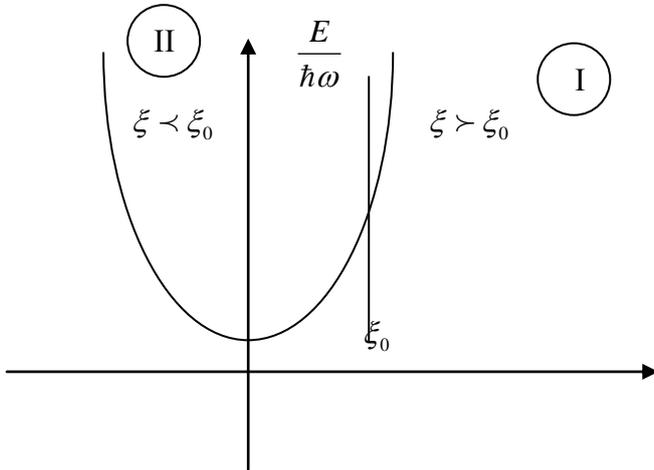
و تجدر الإشارة إلى أن محدد الفرونسكي (wronskian determine) [18] للتوابع التي تمثل حلاً للمعادلة

(5) يعطى من أجل $D_\nu(\xi), D_\nu(-\xi)$ بالشكل :

$$D_\nu(\xi) \frac{d}{d\xi} D_\nu(-\xi) - D_\nu(-\xi) \frac{d}{d\xi} D_\nu(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \dots \dots \dots (8)$$

يمكن التعبير عن الحل العام $\psi(\xi)$ المعبر عنه في المعادلة (7) بالعلاقة:

$$\psi(\xi) = \begin{cases} c_1 D_\nu(\xi) \dots \dots \dots; \xi > \xi_0 \\ c_2 D_\nu(\xi) \dots \dots \dots; \xi < \xi_0 \end{cases} \dots \dots \dots (9)$$



حيث ξ_0 هي مكان تواضع تابع دلتا .

الشكل (1) الهزاز التوافقي وتابع دلتا

من أجل الحسابات القادمة وسهولة كتابة الحلول نرسم الآتي:

$$D_\nu(+\xi) = D_\nu^+(\xi) \quad \text{وكذلك} \quad D_\nu(-\xi) = D_\nu^-(\xi) \quad \text{وبالتالي} :$$

$$D_\nu^+(\xi) = D_\nu^-(\xi) \dots \dots \dots (10)$$

عند النقطة $\xi = \xi_0 = \xi_0$ نجد أن $\psi_1(\xi_0) = \psi_2(\xi_0)$ وبالتالي:

$$c_1 D_v^+(\xi_0) = c_2 D_v^-(\xi_0)$$

وبالتالي:

$$c_1 D_v^+(\xi_0) - c_2 D_v^-(\xi_0) = 0 \dots \dots \dots (11)$$

يمكن إعادة كتابة شرط الربط بين الحلول بالشكل:

$$c_1 D_v^+(\xi_0) - c_2 D_v^-(\xi_0) = 2\Omega c_1 D_v^+(\xi_0) = 2\Omega c_2 D_v^-(\xi_0) \dots \dots \dots (12)$$

شرط وجود حل يختلف عن الحل الصفري للمعادلتين (11)، (12) هو أن يكون محدد أمثال الثوابت

 c_1, c_2 مساوياً للصفر إذن:

$$\begin{vmatrix} D_v^+(\xi_0) & -D_v^-(\xi_0) \\ D_v^+(\xi_0) - 2\Omega D_v^+(\xi_0) & -D_v^-(\xi_0) \end{vmatrix} = 0$$

والذي يكتب:

$$\begin{vmatrix} D_v^+(\xi_0) & -D_v^-(\xi_0) \\ D_v^+(\xi_0) - 2\Omega D_v^+(\xi_0) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بالاستفادة من المعادلة (8) نجد:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \frac{d\xi}{dx} + 2\Omega D_v^+(\xi_0) D_v^-(\xi_0) = 0 \dots \dots \dots (13)$$

$$2\Omega D_v^+(\xi_0) D_v^-(\xi_0) + \sqrt{2\lambda} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

كنا قد فرضنا سابقاً $\xi = \sqrt{2\lambda}x$ ، $\lambda^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ لذلك وبشكل تقريبي يمكن أن نكتب $\xi = x$ أو $\xi_0 = x_0$ على اعتبار أن $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ ويمكن توضيح ذلك إذا علمنا أن $\hbar c = 197.32 \text{ MeV}$ وكذلك $mc^2 = 939.6 \text{ MeV}$ وأيضاً $\hbar\omega$ هي بحدود 20 MeV [2-3] لوجدنا أن $\lambda^2 = 0.495 \text{ MeV}$

وبالتالي المعادلة (14) تكتب:

$$2\Omega D_v^+(\xi_0) D_v^-(\xi_0) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

تم استخدام الحاسوب لحل المعادلة السابقة بعد كتابة برنامج واستخدمنا لغة الفورتران تمهيدا لدراسة تأثير كمون

تابع δ على مستويات طاقة الهزاز بتابعية كل من Ω ، ξ_0 .

كنا قد أشرنا سابقاً أن تابع القطع المكافئ الاسطواني [11-19] يعبر عنه بصيغ مختلفة وقد استخدمنا الصيغة

التالية:

$$D_{\nu}(\xi) = D_{\frac{\varepsilon-1}{2}}(\xi) = \left[\cos \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] Y_1 - \left[\sin \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] Y_2$$

حيث:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2^{\frac{-\varepsilon}{2} - \frac{1}{4}}} y_1$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2^{\frac{-\varepsilon}{2} - \frac{1}{4}}} y_2$$

وكذلك:

علما أن :

$$y_1 = 1 - \varepsilon \frac{\xi^2}{2!} + \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\right) \frac{\xi^4}{4!} + \left(-\varepsilon^3 - \frac{7\varepsilon}{2}\right) \frac{\xi^6}{6!} + \left(\varepsilon^4 + 11\varepsilon^2 + \frac{15}{4}\right) \frac{\xi^8}{8!} + \left(-\varepsilon^5 - 25\varepsilon^3 - \frac{211\varepsilon}{4}\right) \frac{\xi^{10}}{10!} + \dots$$

وكذلك:

$$y_2 = \xi - \varepsilon \frac{\xi^3}{3!} + \left(-\varepsilon^3 + \frac{3}{2}\right) \frac{\xi^5}{5!} + \left(-\varepsilon^3 - \frac{13\varepsilon}{2}\right) \frac{\xi^7}{7!} + \left(\varepsilon^4 + 17\varepsilon^2 + \frac{63}{4}\right) \frac{\xi^9}{9!} + \left(-\varepsilon^5 - 35\varepsilon^3 - \frac{521\varepsilon}{4}\right) \frac{\xi^{11}}{11!} + \dots$$

تم وضع برنامج للتابع $D_{\frac{\varepsilon-1}{2}}(\xi)$ بصيغته السابقة واستدعينا التابع $\Gamma(-\varepsilon + \frac{1}{2})$ أو $\Gamma(-\nu)$

مما سمح بوضع برنامج حسابي لحل المعادلة (15).

النتائج والمناقشة:

تم دراسة تأثير كمون تابع دلتا على مخطط طيف طاقة الهزاز بتابعية موضع تابع δ وقيم مختلفة لـ Ω حيث كان مجال تغير Ω [0-10] من أجل كل قيمة لـ ξ أما قيم ξ المدروسة فكانت : $\xi = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 1.5, 2, 3$ وكان الهدف من اختيار هذه القيم لـ ξ هو ملاحظة تأثير تابع δ على مستويات الطاقة عند قيم صغيرة لـ ξ وقيم كبيرة نسبياً لـ ξ وقد حصلنا على النتائج التالية :

(1) من أجل $\xi_0 = 0$ و $\Omega = 0$ وهذا يعني عمليا غياب كمون تابع دلتا أو الكمون اللانهائي المضاف وقد حصلنا على القيم التالية لـ ν :

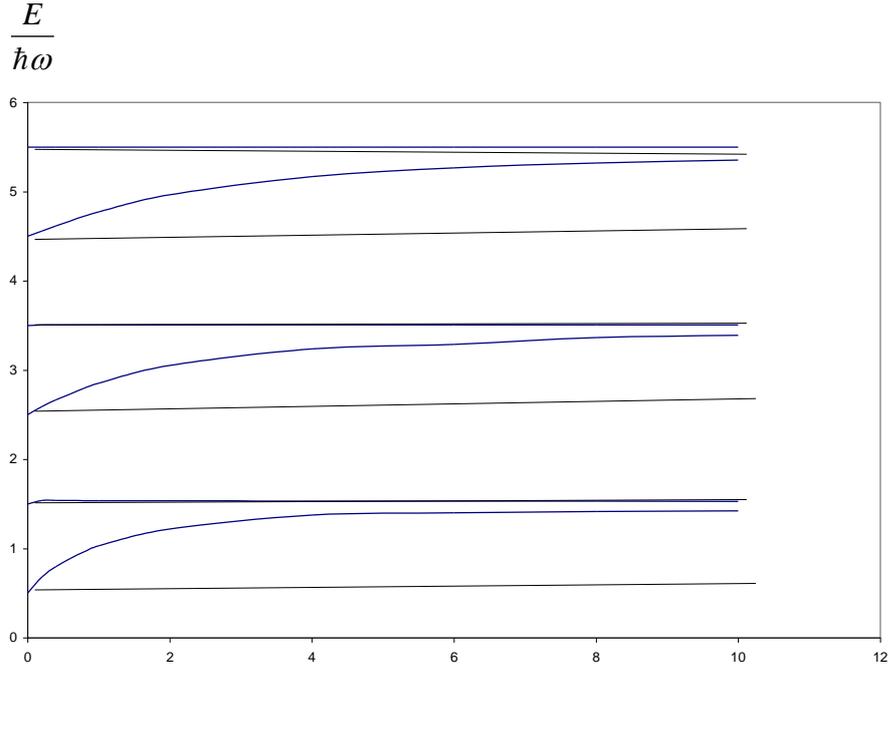
$$\nu_1 = 0, \nu_2 = 1, \nu_3 = 2, \nu_4 = 3, \nu_5 = 4, \nu_6 = 5 \text{ وبالتالي}$$

$$\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega} \quad \varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 1.5, \varepsilon_3 = 2.5, \varepsilon_4 = 3.5, \varepsilon_5 = 4.5, \varepsilon_6 = 5.5 \text{ وطالما أن}$$

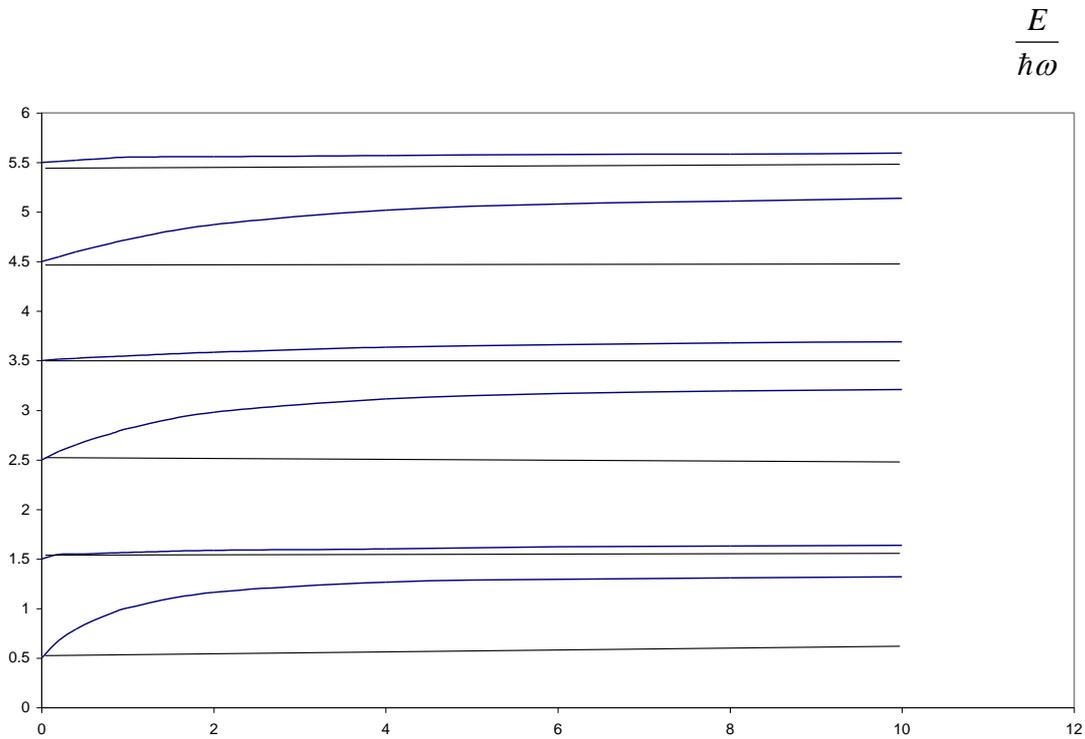
إذن:

$$E_1 = 0.5\hbar\omega, E_2 = 1.5\hbar\omega, E_3 = 2.5\hbar\omega, E_4 = 3.5\hbar\omega, E_5 = 4.5\hbar\omega, E_6 = 5.5\hbar\omega$$

وكما هو واضح الطاقات السابقة ترسم طيف طاقة الهزاز التوافقي عند غياب أي مؤثر خارجي.
 (2) من أجل ($\xi = 0$) و $\Omega = [0-10]$ لاحظنا انزياح المستويات الزوجية نحو الأعلى واقترب كل مستو من المستوي الذي يعلوه فمثلاً عند $\Omega = 10$ أصبحت قيم طاقة المستويات الزوجية الثلاثة المدروسة $0.5\hbar\omega$, $2.5\hbar\omega$, $4.5\hbar\omega$ على التوالي $1.424\hbar\omega$, $3.393\hbar\omega$, $5.365\hbar\omega$ بينما المستويات الفردية لم يطرأ عليها أي تغيير وبالتالي لم تتأثر بوجود كمون تابع δ في المركز [11] ومثلت نتائج هذه الحالة في الشكل(2).

الشكل (2) تأثير تابع δ في المركز

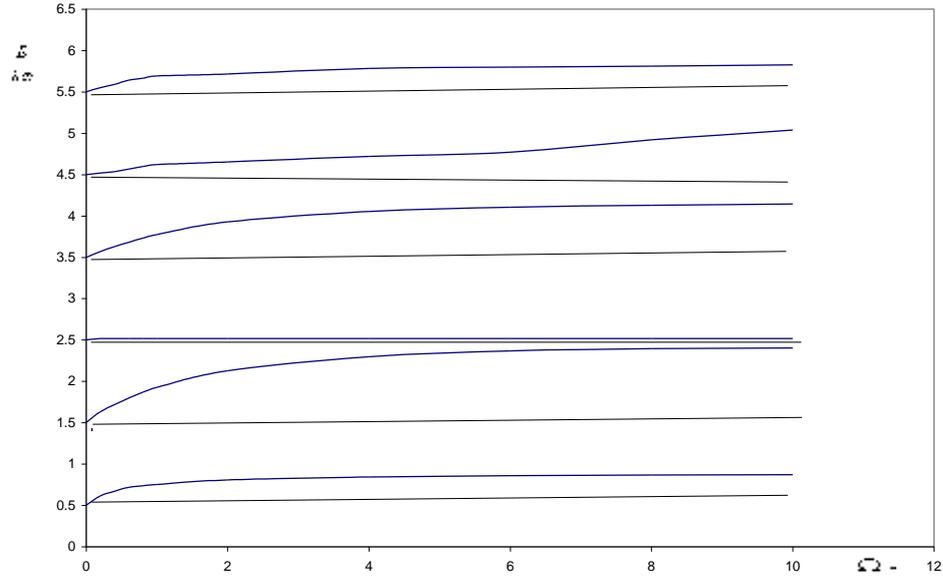
(3) تمت دراسة المسألة وحساب طاقة المستويات بتابعة ξ أي تم تغيير موضع التابع δ يمين مركز الهزاز فمثلاً من أجل $\xi = 0.2$ رأينا أن كل المستويات الطاقية زوجية وفردية انزاحت نحو الأعلى ولكن الملاحظ أن المستويات الزوجية كانت أكثر تأثراً من المستويات الفردية وأكثر المستويات تأثراً كان المستوي الأساسي ($E = 0.5\hbar\omega$) حيث وصلت قيمته إلى $E = 1.32\hbar\omega$ عند $\Omega = 10$ وهذا منطقي كون المؤثر δ قريب جداً من المركز فيجب أن يكون تأثيره على المستويات الدنيا أكبر منه على المستويات العليا الشكل(3).



Ω

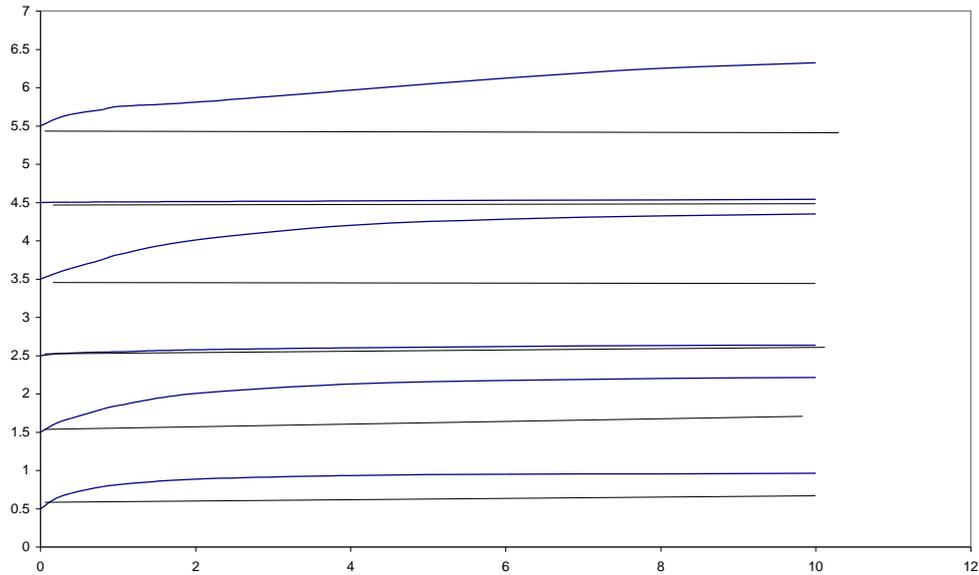
الشكل (3) تأثير تابع δ على بعد 0.2 من المركز

(4) بتغيير قيم ξ بقي المخطط العام ذاته حيث تتزاح كل المستويات الطاقة نحو الأعلى بزيادة قيمة Ω . لاحظنا في حالة $\xi = 1$ المستوي الطاقى ($2.5\hbar\omega$) لم يتأثر بتابع دلتا وكانت إزاحته مساوية للصفر وهذا منطقي لأن التابع $D_v(\xi) = 0$ من أجل $\xi = 1$ و $v = 2$ ومثلت النتائج في الشكل [11] (4).

الشكل (4) تأثير تابع δ على بعد 1 من المركز

من أجل $\xi = 0.8$ لاحظنا أن كل المستويات انزاحت نحو الأعلى فقد وصلت قيمة المستوي إلى $E = 0.5h\omega$ إلى $E = 0.96h\omega$ وكان أكثر المستويات متأثراً هو المستوي $(E = 3.5h\omega)$ فقد وصلت قيمته إلى $(E = 4.349h\omega)$ من أجل $\Omega = 10$ أما المستوي $(E = 5.5h\omega)$ فقد وصلت قيمته إلى $(E = 6.324h\omega)$ أي انزياح المستويات الزوجية كان أشد تأثراً من المستويات الفردية ومثلت النتائج في الشكل (5).

$$\frac{E}{h\omega}$$

الشكل (5) تأثير تابع δ على بعد 0.8 من المركز Ω

(5) تم وضع التابع δ على يسار مركز الهزاز التوافقي ودرست هذه الحالة من أجل قيمتين لـ $\xi = -1$ ، $\xi = -0.8$ وجدنا المخطط السابق نفسه لطيف الهزاز التوافقي، وهذا يعني أن إزاحة المستويات الطاقية من أجل ξ سالبة هي نفسها من أجل ξ موجبة أي أن:

$$\Delta E(\xi) = \Delta E(-\xi)$$

إذن ΔE هو تابع زوجي بالنسبة لـ ξ .

الاستنتاجات التوصيات:

- 1- الحل التحليلي الذي أوجدناه لمعادلة شرود نغر مع كمون تابع دلتا وطريقة ربط حلول تلك المعادلة على يمين ويسار التابع δ سمح لنا بالوصول إلى المعادلة (15).
- 2- النتائج الحسابية التي حصلنا عليها من الحل العددي للمعادلة (15) انسجمت مع الجانب التحليلي لتلك المعادلة حيث إن زيادة قيمة المتحول Ω أدت إلى زيادة تأثير كمون تابع δ على سويات طاقة الهزاز التوافقي زوجية كانت أم فردية عندما تم وضع المؤثر δ خارج مركز الهزاز أي من أجل $\xi_0 \neq 0$ ، وبالتالي نستطيع القول إننا حصلنا على طيف طاقة جديد للهزاز التوافقي بعد إضافة الكمون اللانهائي .
- 3- يمكن إسقاط هذه الحالة الكلاسيكية (حالة البعد الواحد) على حالة نووية لحساب طاقة الانتشار السبين- مدار لنوى ذات طبيعة خاصة مثل نوى النكليون المفرد.
- 4- استمرار الدراسات والبحوث العلمية في هذا المجال لأنها مفيدة في تعميق النظرة التحليلية لمسألة كمون الهزاز التوافقي والتي تعتبر مسألة أساسية في دراسة النموذج الطبقي النووي.

المراجع:

- [1] ERIC,R- *Lecture Notes Chemistry*, University of Houston ,August2003 , 257. on Quantum
- [2] HUGO,V- *Introduction to Quantum Mechanics*, Instituto Balseiro,2002,200.
- [3] DEMIRALP,E-*Properties of One-Dimennsional Harmonic Oscillator With the Dirac. Delta Function* ,Turkish Academy of Sciences,2003,2-10
- [4] DEMIRALP,E-*Bose-Einstein Condensate in Harmonic Trap Decorated With Dirac Function*, Harran University,Turkey,2007, 8 12 .
- [5] SICLEN,V.-*cattering From an Attractive Delta Function Potential*. Am .J. phy, 1988, 56.

- [6] DONALD,G- *Quantum physics*, East Tennessee State University-1995,1000.
- [7] АХИЗер А.И. Беретецкий В.Б. *Квановая электродинамиа*. М Наука 1969,623.
- [8] ХИЗер А. И. Беретецкий В.Б. *Квановая электродинамиа* .М.Наука.1981, 432.
- [9] NICOM,T- *Parabolic cylinder Function Examples of Error Bounds For Asymptotic Expansions*, University of Antwerp, Amsterdam, 2005, 3-8.
- [10] ALHAIDARI,A- *Exact Solution of Dirac and Schrödinger for a Large Class of Power Law Potentials at Zero Energy*, King Fahd University of Petroleum & Minerals, Saudi Arabia, 2006, 11-24.
- [11] STEGUN, I- *Handbook of Mathematical Functions with formulas, Graphs*, New York, 1972, 680-730.
- [12] HAMPRECHT, B- *Exact Solutions of the Time Dependent Schrödinger Equation in One space Dimension*, Freie universität Berlin, Germany, 1997, 3-12.
- [13] MARTOREL, J- *Scattering by Finite Periodic Potential* Am.J.phys, 1993, 61
- [14] DUTTA, R- *Regularization and renormalization in Scattering from Dirac Delta*. Am.J.phys, 1998, 66.
- [15] CLAUDE, A- *δ Well with a Reflecting Barrier*. Am.J.phys, 1995, 63 .
- [16] DANIEL, A- *An Exact Treatment of the Dirac Delta Function in the Schrödinger Equation*. Am.J.phys, 1975, 43 .
- [17] OLEVER, F- *Uniform asymptotic expansions for Weber Parabolic Cylinder Function of Large Order* .- J. Research NBS, - 63B.N2.- 1959.131-169.
- [18] Бейтмен Г, Эрдей А . *Высшая Мернцентная функция* . Пер . с англ .- м .- Наука 1974, 288.
- [19] Керимов М .к. *Некоторые Новые результаты По Мерии функции Вебера*.- кн.: Миллер Дж.ч.п. Таблиц функций Вебера. Пер. Сангл.-м.: ВЦ АН СССР. 1968, 550.