مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

تقارب ε – النقاط السرجية لدوال محدبة – مقعرة بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدورف

الدكتور محمد سويقات *

(تاريخ الإيداع 12 / 5 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/10/11)

□ الملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة وتعميم بعض النتائج المتعلقة بـ ε – الحلول لمسائل بمتحول واحد (محدبة إلى ε – الحلول لمسائل بمتحولين (محدبة–مقعرة). إذ نعرف مسافة ρ – هاوسدورف H_ρ على صفوف الدوال المحدبة–المقعرة كما نعرف مسافة ρ – هاوسدورف $\widetilde{H}_\rho$ على صفوف دوال ليست بالضرورة محدبة–مقعرة. ومن أجل المتتالية $\left\{L_n, L : X \times Y \to \bar{R}; n \in N\right\}$ ندرس تقارب هذه المتتالية بدلالة تقارب المقاطع الموافقة لها، ثم نبرهن أن (L_n) متقاربة نحو L بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كانت متتالية المجموعات $(\varepsilon - \arg\min\max L_n)$ متقاربة نحو المجموعة $(\varepsilon - \arg\min\max L)$ بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدورف . ونحصل على نتائج مشابهة تتعلق ε – التفاضلات الجزئية لدوال محدبة–مقعرة ومغلقة معرفة على فضاءات باناخ .

التصنيف الرياضي لهذا الموضوع AMS الأول : 46B20 الثاني : 49J45 .

الكلمات المفتاحية: فوق البيان– دوال محدبة– مقعرة– مقطع دالة، نقاط سرجية – ε – الحلول– أمثليات– مسافة ρ – هاوسدورف– ε – التفاضلات الجزئية .

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

The Convergence of ε-Solutions of Convex-Concave Problems In Terms of ρ-Hausdorff Distance.

Dr. Mohamed Soueycatt *

(Received 12 / 5 / 2009. Accepted 11 / 10 / 2009)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to study and generalize some results concerned with the ε - solutions of one variable (convex) problems to the ε - solutions bivriables (convex-concave) problems. We define the ρ - Housdorff distance H_ρ on the classes to convex-concave functions and the ρ - Housdorff distance $\tilde{H}_\rho$ on the classes not necessary convex-concave functions. For the sequence $\left\{L_n, L : X \times Y \to \bar{R}; n \in N\right\}$; We study the convergence of this sequence in terms of level sets convergence, and we show that the sequence (L_n) is ρ - Housdorff distance to L if and only if for each $\varepsilon > 0$ the sequence of sets $(\varepsilon - \arg\min\max L_n)$ is ρ - Housdorff distance convergent to $(\varepsilon - \arg\min\max L)$. An analogous result holds for ε - Subdifferential of convex-concave closed functions defined on a Banach space.

AMS Subject Numbers : Primary : 46B20
Secondary : 49J45.

Key words : epigrqhp, convex-concave function, level sets , saddles points, ε - solutions, optimization, ρ -Housdroff distance, ε - Subdifferential.

* **Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

بلغ التحليل فوق البياني أهمية كبيرة في دراسة مسائل القيم الدنيا (minimization problems) لدوال بمتحول واحد من خلال الخصائص التي يتمتع بها فوق البيان (epi-graph) ، وذلك مقارنة بالتحليل الكلاسيكي، حيث البيان بلغ الدور الأساسي. وبشكل مناظر كان للتحليل تحت البياني أهمية في دراسة مسائل القيم العليا (maximization problems) من خلال الخصائص التي يتمتع بها تحت البيان (hypo-graph).

ومن ثم ظهر التحليل فوق/تحت− البياني ليشمل كلا التحليلين السابقين ويعالج مسائل القيم الدنيا/العليا (minimization-maximization problems) أو مايسمى مسائل النقاط السرجية (saddle points) لدوال بمتحولين, وهنا تظهر صعوبات أساسية في دراسة مسائل النقاط السرجية، وذلك لفقدان التقريب الهندسي المتاح في مسائل القيم الدنيا ومسائل القيم العليا ومن أجل التغلب على هذه الصعوبات كان لابد من العمل على الدوال القرينية المحدبة والقرينية المقعرة وأيضاً على الدوال الحدية العليا والدوال الحدية الدنيا وتحويل المسألة إلى مسألتين أحدهما تدخل ضمن التحليل فوق البياني وتدخل الأخرى ضمن التحليل تحت البياني.وبما أنه في الحالة العامة لايوجد دوماً حلول لمسائل الأمثليات فكان لابد من الاهتمام بمفهوم $\varepsilon-$ الحلول من قبل العديد من الرياضيين: $[12,13,15,16]$.
في هذا البحث سندرس هذا المفهوم من وجهة نظر مترية بالنسبة لمسائل النقاط السرجية .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة بعض مسائل النقاط السرجية من وجهة نظر مترية بدلالة مسافة $\rho-$ هاوسدوف من أجل دوال ذات متحولين (محدبة – مقعرة) وبشكل خاص دراسة مفهوم $\varepsilon-$ الحلول لمسائل القيم الدنيا/العليا نظراً لأهميته التطبيقية ولكون $\varepsilon-$ الحلول تشكل دوماً مجموعة غير خالية ويتم ذلك بعد تحويل المسالة بمتحولين إلى مسالتين أحدهما محدبة والأخرى مقعرة واستخدام $\varepsilon-$ الحلول لكل مسالة من هذه المسائل .

طرائق البحث ومواده :

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المعتمدة في مجال التحليل فوق البياني ومجال التحليل فوق/تحت− البياني واستخدمت في دراستنا هذه الطريقة المترية (مسافة $\rho-$ هاوسدوف) التي تبناها العديد من الباحثين في أعمال مختلفة $[2,4,6,7,17,...]$.

تعاريف ومفاهيم أساسية :

سنعتبر X , Y فضاءي باناخ و X^* Y^*, فضاء يهما الثنويين على الترتيب، وسنرمز لشكل ثنائي الخطية للفضاءين (X, X^*)،(Y,Y^*) كل على حده بـ $<.,.>$.

نبدأ بتذكرة بعض عناصر التحليل المحدب (convex analysis) $[1,11,14,18]$.

لتكن $f: X \to \overline{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

− نعرِّف فوق البيان (epi-graph) للدالة f ويرمز له بـ $epi\ f$ بالعلاقة:

$$epi\ f = \{\ (x,\alpha) \in X \times R : f(x) \le \alpha\ \}$$

– نقول إن الدالة f محدبة إذا كانت $epi\ f$ مجموعة محدبة في $X \times R$ ونقول إن f مقعرة إذا كانت $(-f)$ محدبة .

– نقول إن f دالة مغلقة إذا كانت $epi\ f$ مجموعة مغلقة وإن f دالة خاصة (proper) إذا كانت $epi\ f$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $dom\ f \neq \phi$ حيث :

$$dom\ f = \{\ x \in X\ :\ f(x)\ <\ +\infty\ \}$$

– نعرّف الدالة المرافقة $f^* : X^* \to \overline{R}$ للدالة f بالعلاقة :

$$f^*(x^*)\ =\ \sup\{< x, x^* > - f(x);\ x \in X\ \}$$

– من أجل كل $\varepsilon \ge 0$ ، نعرّف مجموعة ε – الحلول للدالة f التي يرمز لها بـ $\varepsilon - \arg\min\ f$ بالعلاقة:

$$\varepsilon - \arg\min f\ =\ \left\{ \overline{x} \in X : f(\overline{x})\ \le\ \sup\left\{ \inf\ f + \varepsilon\ , -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \right\}$$

نلاحظ أن ($\varepsilon - \arg\min\ f$) مجموعة دوماً غير خالية وعُرفت بالشكل السابق، نظراً لكون المقدار inf f يمكن أن يساوي $(-\infty)$ ، ومن أجل $\varepsilon = 0$ نحصل على مجموعة الحلول

$$\arg\min\ f\ =\ \{\overline{x} \in X : f(\overline{x}) = \inf\ f(x),\ x \in X\}\ .$$

– نعرّف ε – تحت التفاضل $\partial_\varepsilon f$ للدالة f ($\varepsilon - subdifferential\ f$)في نقطة $x_0\ \in\ dom\ f$ وفق مفهوم التحليل المحدب بالشكل الآتي :

$$\partial_\varepsilon\ f(x_0) =\ \{\ x^* \in X^* : f(x)\ \ge f(x_0) + < x - x_o , x^* > - \varepsilon\ ;\ \forall\, x \in X\ \}$$
$$=\ \{\ x^* \in X^* :\ f(x) + f^*(x^*) + < x^*,\ x > \le \varepsilon\ ;\ \forall\, x \in X\ \}$$

تكون هذه المجموعة محدبة إذا كانت الدالة f محدبة، ومن أجل $\varepsilon = 0$ نحصل على تحت التفاضل ∂f للدالة f .نرمز بـ $\overline{R}^X$ لمجموعة الدوال المعرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{\overline{R}}$.

ننتقل الآن لنذكّر ببعض عناصر التحليل المحدب–المقعر (convex -concav analysis) انظر $[6, 7, 19, 20]$.

– نقول عن الدالة $L : X \times Y \to \overline{R}$ إنها محدبة – مقعرة (Convex-concav) إذا كانت محدبة بالنسبة إلى المتحول الأول ومقعرة بالنسبة إلى المتحول الثاني.

– نعرّف الدالة القرينة المحدبة (convex parent) $F : X \times Y^* \to \overline{R}$ للدالة L بالعلاقة :

$$F(x, y^*)\ =\ \sup_{y \in Y} \{ L(x, y) + < y, y^* > \} \qquad (1)$$

ونعرّف الدالة القرينة المقعرة (concave parent) $G : X^* \times Y \to \overline{R}$ للدالة L بالعلاقة :

$$G(x^*, y) = \inf_{x \in X} \{ L(x, y) - < x, x^* > \} \qquad (2)$$

من الواضح أن F دالة محدبة على $X \times Y^*$ و G دالة مقعرة على $X^* \times Y$.

– نقول عن الدالة L إنها مغلقة إذا كانت $F^{*}=(-G)$ و $F=(-G^{*})$ ، حيث G^{*},F^{*} هي الدوال المرافقة للدوال G,F على الترتيب. ونقول عن دالتين محدبتين–مقعرتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الدوال القرينة.

- نقول عن الدالة L إنها خاصة (proper) إذا كان مجالها الفعلي $domL\neq\phi$ حيث :

$$domL=dom_1L\times dom_2L$$
$$=\{x\in X: L(x,.)>-\infty\}\times\{y\in Y: L(.,y)<+\infty\}$$

– نعرِّف الدالة الحدية العليا M (supre marginal) $M:X\to\overline{R}$ للدالة L بالعلاقة:

$$M(x)=Sup\{L(x,y);y\in Y\}\qquad(3)$$

– نعرِّف الدالة الحدية االدنيا m (lower marginal) $G:Y\to\overline{R}$ للدالة L بالعلاقة:

$$m(y)=Inf\ \{L(x,y);x\in X\}\qquad(4)$$

ويبرهن بسهولة انه إذا كانت الدالة L محدبة–مقعرة فإن الدالة M تكون محدبة على X والدالة m تكون مقعرة على Y.

تعريف 1 :

من أجل كل $\varepsilon\geq 0$ ، نعرِّف مجموعة ε –النقاط السرجية للدالة L والتي يرمز لها بالعلاقة: $\varepsilon-\arg\min\max L$

$$\varepsilon-\arg\min\max L=\left\{(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y: L(\bar{x},y)-\varepsilon\leq L(\bar{x},\bar{y})\leq L(x,\bar{y})-\varepsilon;\forall(x,y)\in X\times Y\right\}\qquad(5)$$

وقد تم تعريف المجموعة $\varepsilon-\arg\min\max L$ في [13]،[16] بالاعتماد على الدوال الحدية العليا والدنيا بالصورة الآتية:

$$\varepsilon-\arg\min\max L=\left\{(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y:\ \bar{x}\in\varepsilon-\arg\min M,\ \ \bar{y}\in\varepsilon-\arg\max m\right\}\qquad(6)$$

حيث:

$$\varepsilon-\arg\min M=\left\{\bar{x}\in X: M(\bar{x})\leq Sup\left\{InfM+\varepsilon,-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}$$

$$(7)$$

$$\varepsilon-\arg\max m=\left\{\bar{y}\in Y: m(\bar{y})\geq\inf\left\{\sup m-\varepsilon,+\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}$$

ولقد برهن في([16] مبرهنة (2.4)) انه على مجموعة صفوف الدوال المحققة للشرط $InfM=Supm$ تكون العلاقتان (5) ، (6) متكافئتان.

بأخذ $\varepsilon=0$ في العلاقة (6) نحصل تماما على مجموعة النقاط السرجية $\arg\min\max L$ للدالة L .

تعريف 2 : $[18]$

نعرِّف ε – تحت التفاضل للدالة L ($\varepsilon-subdifferential\ L$)(وفق مفهوم روكافولار بالشكل الآتي:

$$\partial_\varepsilon L(x,y)=\partial_{1,\varepsilon}L(x,y)\times(-\partial_{2,\varepsilon}(-L(x,y))) \qquad (8)$$

حيث $\partial_{2,\varepsilon}L,\partial_{1,\varepsilon}L$ هو ε–تحت التفاضل للدالة L بالنسبة للمتحول الأول والمتحول الثاني على الترتيب أي أن:

$$(x^*,y^*)\in\partial_\varepsilon L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}L(\zeta,y)\geq L(x,y)+<\zeta-x,x^*>-\varepsilon;\forall\zeta\in X\\ L(x,\eta)\leq L(x,y)-<y^*,\eta-y>-\varepsilon;\forall\eta\in Y\end{cases} \qquad (9)$$

وقد برهن في أعمال عدة نذكر منها $[16,18]$ على وجود علاقة تكافؤ بين ε –تحت التفاضل لدالة محدبة – مقعرة L و ε – تحت التفاضل لدوالها القرينة F و G معطاة بالعلاقة الآتية:

$$(x^*,-y^*)\in\partial_\varepsilon L(x,y)\Leftrightarrow(x^*,y)\in\partial_\varepsilon F(x,y^*)\Leftrightarrow(-x,y^*)\in\partial_\varepsilon G(x^*,y) \qquad (10)$$

من أجل $\varepsilon=0$ في العلاقة (9) نحصل تماما على تحت التفاضل ∂L للدالة L .

تعريف 3 : (مقطع الدالة)

نعرِّف مقطع الدالة L ذا الدليلين الحقيقيين β,α ويرمز له بـ $S^L_{\alpha,\beta}$ بالعلاقة التالية:

$$S^L_{\alpha,\beta}:=\{(x,y)\in X\times Y:\ M(x)\ \leq\ \alpha,\quad m(y)\geq\beta\} \qquad (11)$$

وتكـــون $S^L_{\alpha,\beta}$ مجموعـــة محدبـــة إذا كانـــت الدالـــة L محدبـــة–مقعـــرة وغيـــر خاليـــة إذا كانت $\inf M<\alpha$ و $\sup m>\beta$.

أخيرا نرمز بـ $\bar{R}^{X\times Y}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\bar{\bar{R}}$.

تعريف 4 : مسافة ρ– هاوسدورف. $[4,5]$

- **(مسافة ρ – هاوسدورف على X):**

لتكن d دالة المسافة المولدة بالنظيم $\|.\|$ المعرف على X . من أجل كل مجموعة جزئية C في X نعرف المسافة بين العنصر x وبين المجموعة C بالعلاقة :

$$d(x,C):=\ Inf\{\|x-y\|,y\in C\}\quad،\quad(\text{إذا كانت } C=\phi\text{، تكون } d(x,C)=\infty)$$

من أجل كل $\rho\geq0$ ، نرمز بـ Bρ للكرة المغلقة في X التي مركزها الصفر ونصف قطرها ρ ، ولكل C في X نعرف:

$$C_\rho:=C\cap\rho B$$

من أجل أي مجموعتين C و D في X، نعرف مدى تجاوز هاوسدورف (L'exce de Haussdorof) لـ C على D بالعلاقة:

$$e(C,D):=\sup\{d(x,D);x\in C\}\quad،\quad(\text{باعتبار e=0 إذا كانت } C=\phi)$$

ونعرف ρ –مسافة هاوسدورف بين المجموعتين C و D بالعلاقة:

$$haus_\rho(D, C) = Sup\{e(C_\rho, D) \; ; \; e(D_\rho, C)\}$$

نقول عن متتالية من المجموعات $(D_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المجموعة D في X بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(D_n, D) = 0, \forall \rho \geq 0$

- **(مسافة ρ – هاوسدورف على $\bar{R}^X$):**

نعرف مسافة ρ – هاوسدورف بين الدالتين f و g من $\bar{R}^X$ بالعلاقة :

$$h_\rho(f, g) := haus_\rho(epif, epig); \quad \forall \rho \geq 0 \qquad (12)$$

حيث $epif$ و $epig$ مجموعتان جزئيتان في $X \times R$ ويعرف ρ B في $X \times R$ بالعلاقة :

$$\rho B_{X\times R} = \left\{ (x, \alpha) \in X \times R : \|x\| \leq \rho \; ; \; |\alpha| \leq \rho \right\}$$

نقول عن أية متتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة f في $\bar{R}^X$ بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} h_\rho(f_n, f) = 0 \; ; \quad \forall \; \rho \geq 0$$

سمي هذا المفهوم بمسافة ρ – فوق البياني وتبنّاه العديد من الرياضيين في دراسات مختلفة ونذكر منهم

مبرهنة 5 : [8]

$\{f_n, \; f : \; X \to \bar{R} \; ; n \in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى والخاصة . عندئذ من أجل كل $\rho \geq 0$ لدينا $ii) \Leftrightarrow i)$ حيث :

$$i) \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} h_\rho(f_n, f) = 0$$

$$ii) \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} h_\rho(f_n^*, f^*) = 0$$

والمبرهنة صحيحة من اجل دوال مقعرة ونصف مستمرة من الأعلى وخاصة باعتبار أنه إذا كانت f دالة مقعرة فإن $(-f)$ تكون دالة محدبة .

تعريف 6 : (مسافة ρ – هاوسدورف على $\bar{R}^{X\times Y}$) :

إن مفهوم مسافة ρ – فوق البياني واجه صعوبات في تطبيقاته على الدوال المحدبة–المقعرة، وذاك لفقدانه المعنى الهندسي مقارنة بالدوال المحدبة أو المقعرة حيث نستطيع التكلم عن المعنى الهندسي لفوق البيان والمعنى الهندسي لتحت البيان، ورغم تلك الصعوبات استطعنا إعطاء تعريف لمسافة ρ – هاوسدورف على صفوف الدوال المحدبة–المقعرة معتمدين على الدوال القرينة المحدبة لها كما يلي:

من أجل كل $\rho \geq 0$ ، نعرِّف ρ –مسافة هاوسدورف بين الدالتين K , L من $\bar{R}^{X\times Y}$ بالعلاقة :

$$H_\rho(L, K) = h_\rho(F, \Phi) \qquad (13)$$

حيث F و Φ هي الدوال القرينة المحدبة للدالة L و K على الترتيب. وكان لهذه المسافة أهمية كبرى في دراسة استقرارية النقاط السرجية للدوال المحدبة–المقعرة (انظر $[3,8]$). ونقول عن متتالية من الدوال $(L_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة L في $\bar{R}^{X\times Y}$ بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} H_\rho(L_n, L) = 0 \;;\; \forall\rho\geq 0 .$$

ولقد كان لاستخدام الدوال الحدية العليا والدنيا في حل بعض مسائل النقاط السرجية أهمية في إعطاء تعريف أخر لمسافة ρ – هاوسدورف H_ρ على صفوف دوال ليست بالضرورة محدبة–مقعرة بالعلاقة الآتية:

$$\tilde{H}_\rho(L,K) = h_\rho(M_1, M_2) + h_\rho(m_1, m_2) \qquad (14)$$

حيث M_2, M_1 (m_2, m_1) هي الدوال الحدية العليا(الدنيا) لكل من L و K على الترتيب.

وفي هذه الحالة تكون المتتالية $(L_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو الدالة L إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0 \;;\; \forall\; \rho \geq 0$$

النتائج والمناقشة:

نبدأ بإعطاء بعض خواص المسافة H_ρ والعلاقة بين H_ρ و $\tilde{H}_\rho$.

مبرهنة1

لتكن $L_i : X\times Y \rightarrow \bar{R} \;;\; i=1,2,3$ ثلاث من الدوال المحدبة–المقعرة. عندئذ H_ρ في (13) تحقق الخواص الآتية:

1) H_ρ موجبة: $H_\rho(L_1, L_2) \geq 0$.

2) H_ρ متناظرة: $H_\rho(L_1, L_2) = H_\rho(L_2, L_1)$

3) H_ρ تحقق متباينة المثلث: لكل $\rho \geq \max\{d(0, epiF_i)\;\; i=1,2,3\}$ يكون:

$$H_\rho(L_1, L_3) \leq H_{3\rho}(L_1, L_2) + H_{3\rho}(L_2, L_3)$$

حيث F_i هي دوال قرينة محدبة للدوال L_i $(i=1,2,3)$.

4) $H_\rho(L_1, L_2) = 0; \forall\rho \geq 0 \;\Leftrightarrow\; L_1$ يكافئ L_2 .

<u>**البرهان:**</u> إن برهان الخواص 1)، 2) ينتج مباشرةً من التعريف (13) ، أما الخاصية 3) فقد تنتج مباشرةً بتطبيق المبرهنة 2.1 في $[2]$ على الطرف الأيسر من تعريف H_ρ. وتنتج الخاصية 4) باعتبار أن أي داليتين محدبتين – مقعرتين تكونان متكافئتين إذا وفقط إذا كان لهما الدوال القرينة المحدبة والمقعرة نفسها بطريقة مشابهة نستنتج أن $\tilde{H}_\rho$ تحقق الشروط الأربعة في المبرهنة 5.1. ■

مبرهنة 2

إذا كانت متتالية الدوال المحدبة–المقعرة $(L_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو L بالنسبة H_ρ فإنها تكون متقاربة بالنسبة $\cdot\tilde{H}_\rho$

البرهان: من تعريف الدوال االقرينة المعرفة في (1) و (2) والدوال الحدية المعرفة في (3) و (4) نستطيع أن نكتب :

$$M(x)=F(x,0)=(F+\delta_D)(x,y^*)$$
$$m(y)=G(0,y)=(G+\delta_{D^*})(x^*,y)$$

حيث :

$$D=\left\{(x,y^*)\in X\times Y : y^*=0\right\},\qquad D^*=\left\{(x^*,y)\in X^*\times Y : x^*=0\right\}$$

δ_C تدل على الدالة المشيرة (the indicators function) للمجموعة C وتعرف بالعلاقة :

$$\delta_C(x)=\begin{cases}0 & ;\ x\in C\\ +\infty & ;\ x\notin C\end{cases}$$

وحسب تعريف $\tilde{H}_\rho$ في (14) نجد:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_\rho(L_n,L)&=h_\rho(M_n,M)+h_\rho(m_n,m)\\ &=h_\rho(F_n+\delta_D,\ F+\delta_D)+h_\rho(G_n+\delta_{D^*},G+\delta_{D^*})\\ &\le h_\rho(F_n,\ F)+h_\rho(G_n,\ G) \qquad (15)\end{aligned}$$

بما ان الدوال $\left\{(L_n)_{n\in N}\ ;\ L\right\}$ محدبة–مقعرة ومغلقة فإن :

$$G_n=-F_n^* \quad \text{و} \quad G=-F^* \qquad (16)$$

بتعويض (16) في العلاقة (15) نحصل على:

$$\tilde{H}_\rho(L_n,L)\le h_\rho(F_n,\ F)+h_\rho(F_n^*,\ F^*) \qquad (17)$$

بما أن $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_\rho(L_n,\ L)=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} h_\rho(F_n,F)=0$ وبالتالي حسب المبرهنة 4.5 يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} h_\rho(F_n^*,F^*)=0$ ومنه نستنتج **أن** $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\tilde{H}_\rho(L_n,L)=0$ وهو المطلوب. ■

إن لدراسة مقاطع الدوال بمتحول واحد أو بمتحولين أهمية في معرفة صفات جديده لهذه الدوال في مجال التقارب أو التحدب....الخ وتوجد أعمال عديدة في دراسة المقاطع نذّكر منهم على سبيل المثال $[2,10,17,20]$ والمبرهنة الآتية تعطي تقارب متتالية من الدوال بمتحولين بدلالة تقارب مقاطعها بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف.

مبرهنة 3 :

لتكن $\left\{L_n,L : X\times Y\to\bar{R};n\in N\right\}$متتالية من الدوال بمتحولين، ولتكن M_n,M $(m_n,m\ )$ الدوال الحدية العليا (الدنيا) لكل من L_n,L على الترتيب. لتكن $\alpha,\beta\in R$ بحيث $\alpha>\inf M$ و $\beta<\sup m$ ومن أجل كل $\rho\ge 0$ يكون لدينا :

1) إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0$ فإن $\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha,\beta}, S^L_{\alpha,\beta}) = 0$

2) إذا كانت $\inf M_n > \inf M$ و $\sup m_n < \sup m$ وكانت $\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha,\beta}, S^L_{\alpha,\beta}) = 0$ فإن

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0 \ .$$

<u>البرهان</u> : برهان(1) :

من تعريف المقطع في (11) نجد أن:

$$\begin{aligned} S^L_{\alpha,\beta} &:= \{ (x,y)\in X\times Y:\ M(x)\le\alpha,\ m(y)\ge\beta \} \\ &= \{x\in X : M(x)\le\alpha\}\times\{y\in Y : m(y)\ge\beta\} \\ &= S^M_\alpha \times S^{-m}_{-\beta} \end{aligned}$$

حيث S^M_α (S^m_β) هي مقطع الدالة M (m) على الترتيب.. وبالطريقة نفسها ومن أجل كل n تكون:

$$S^{L_n}_{\alpha,\beta} = S^{M_n}_\alpha \times S^{-m_n}_{-\beta} \ .$$

إذا من أجل كل $\rho \ge 0$ لدينا:

$$\begin{aligned} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha,\beta}, S^L_{\alpha,\beta}) &= haus_\rho(S^{M_n}_\alpha \times S^{-m_n}_{-\beta}, S^M_\alpha \times S^{-m}_{-\beta}) \\ &\le haus_\rho(S^{M_n}_\alpha, S^M_\alpha) + haus_\rho(S^{m_n}_\beta, S^m_\beta) \qquad (18) \end{aligned}$$

وبما أن $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0$ فإن كل من $h_\rho(M_n,M) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ و $h_\rho(m_n,m) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ومنه بتطبيق 1) في المبرهنة 3.1 في [17] على حدي الطرف الأيمن في المتراجحة (18) نحصل على :

$haus_\rho(S^{M_n}_\alpha, S^M_\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ و $haus_\rho(S^{m_n}_\beta, S^m_\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ وهـذا يعنـي **أن** :

$$haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha,\beta}, S^L_{\alpha,\beta}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

برهـان (2) : بمـا أن $\lim_{n\to+\infty} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha,\beta}, S^L_{\alpha,\beta}) = 0$ عندئذ حسب تعريف المقطع وتعريف مسافة ρ – هاوسـدورف فـي(14) يكـون $\lim_{n\to+\infty} haus_\rho(S^{M_n}_\alpha, S^M_\alpha) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} haus_\rho(S^{m_n}_\beta, S^m_\beta) = 0$ ولمـا كـان بـالفرض $\inf M_n > \inf M$ و $\sup m_n < \sup m$ فإنـه بتطبيق 2) في المبرهنـة 3.1 في [17] نحصـل علـى $\lim_{n\to+\infty} h_\rho(M_n,M) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} h_\rho(m_n,m) = 0$ وهو المطلوب. ■

مبرهنة 4

تحت نفس شروط المبرهنة 5.3 ومن أجل كل : $\alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ و $\beta_n \xrightarrow[n]{} \beta$ في R لدينا :

1) إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0$ فإن $\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha_n,\beta_n}, S^L_{\alpha,\beta}) = 0$

2) إذا كانت $\inf M_n > \inf M$ و $\sup m_n < \sup m$ وكانت

فإن : $\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(S^{L_n}_{\alpha_n,\beta_n},\, S^{L}_{\alpha,\beta}) = 0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n,\, L) = 0$$

<u>**البرهان :**</u> ينتج مباشرة من المبرهنة 5.2 و المبرهنة 5.3. ■

مبرهنة 5

لتكن $\left\{L_n, L : X\times Y \to \bar{R}; n\in N\right\}$ متتالية من الدوال بمتحولين، ولتكن M_n, M (m_n, m) الدوال الحدية العليا (الدنيا) لـ L_n, L بحيث يكون:

$$\forall n\in N,\ \ InfM_n = Supm_n \quad \text{و} \quad InfM = Supm \qquad (19)$$

لكل $\rho \geq 0$ ولكل $\varepsilon > 0$ لدينا :

1) إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n,\, L) = 0$ فإن

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(\varepsilon - \arg\min\max L_n, \varepsilon - \arg\min\max L) = 0$$

2) إذا كان $\inf M_n > \inf M$ ، $\sup m_n < \sup m$ وكان

$\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(\varepsilon - \arg\min\max L_n, \varepsilon - \arg\min\max L) = 0$ فإن $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{H}_\rho(L_n,\, L) = 0$.

<u>**البرهان**</u>

بموجب الفرض (19) والتعريف (6) نستطيع أن نكتب:

$$\varepsilon - \arg\min\max L_n = \varepsilon - \arg\min M_n \times \varepsilon - \arg\max m_n \ := \ S^{L_n}_{\alpha_n,\beta_n}$$

$$\varepsilon - \arg\min\max L \ = \ \varepsilon - \arg\min M \times \varepsilon - \arg\max m \ := S^{L}_{\alpha,\beta}$$

حيث

$$\alpha_n = Sup\left\{InfM_n + \varepsilon,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right\} \quad ; \quad \alpha = Sup\left\{InfM + \varepsilon,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

$$(20)$$

$$\beta_n = \inf\left\{\sup m_n - \varepsilon,\ +\frac{1}{\varepsilon}\right\} \quad ; \quad \beta = \inf\left\{\sup m - \varepsilon,\ +\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

نلاحظ أن $\alpha > \inf M$ و $\beta < \sup m$ وبالتالي حسب المبرهنة 5.4 يكفي أن نبرهن أن : $\alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ و $\beta_n \xrightarrow[n]{} \beta$. ولبرهان $\alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ في R يكفي برهان $\inf M_n \xrightarrow[n]{} \inf M$ ومن أجل ذلك ليكن $0 < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ وليكن $\rho \geq 0$ و لنأخذ $x \in (\varepsilon - \arg\min M_n)_\rho$ ، عندئذ من أجل كل $n \in N$ يكون :

$\|x\| \le \rho$; $M_n(x) \le InfM_n + \varepsilon$. ومنه $(x,\ InfM_n + \varepsilon) \in (epi\ f_n)_{\rho_1}$ حيث :

$$\rho_1 = Max\{\rho, |\inf M_n| + 1,\ |\inf M| + 1\}$$

وحسب تعريف h_ρ في (12) ومن أجل كل $\mu > 0$ ، يوجد $(\xi_\mu, \alpha_\mu) \in epi\ M$ بحيث يكون :

$$\|x - \xi_\mu\| \le h_\rho(M_n, M) + \mu$$
$$|\inf M_n + \varepsilon - \alpha_\mu| \le h_{\rho_1}(M_n, M) + \mu \qquad (21)$$

ينتج من العلاقة (21) أن $\alpha_\mu \le \inf M_n + \varepsilon + h_{\rho_1}(M_n, M) + \mu$

وبما أن $M(\xi_\mu) \le \alpha_\mu$ نستنتج : $\inf M \le M(\xi_\mu) \le \inf M_n + \varepsilon + h_{\rho_1}(M_n, M) + \mu$

ومنه : $\inf M - \inf M_n \le \varepsilon + h_{\rho_1}(M_n, M) + \mu$

بما أن هذه المتراجحة صحيحة من أجل كل $\varepsilon > 0$ و $\mu > 0$ فإنه بجعل $(\varepsilon \to 0)$ و $(\mu \to 0)$ نستنتج أن:

$$\inf M - \inf M_n \le h_{\rho_1}(M_n, M)$$

بجعل كل من M , M_n يلعب دور الآخر من أجل كل $n \in N$ نحصل على :

$$|\inf M - \inf M_n| \le h_{\rho_1}(M_n, M)$$

ولما كانت $\tilde{H}_\rho(L_n, L) \xrightarrow[n]{} 0$ فإن $h_{\rho_1}(M_n, M) \xrightarrow[n]{} 0$ ومنه $\inf M_n \xrightarrow[n]{} \inf M$

وبطريقة مشابهة نبرهن أن $\sup m_n \xrightarrow[n]{} \sup m$ أي أن $\beta_n \xrightarrow[n]{} \beta$ وبذلك يتم المطلوب. ■

نتيجة 6

تحت شروط المبرهنة السابقة نفسها ، وبفرض أن $(L_n)_{n\in N}$ متالية دوال محدبة–مقعرة ;عندئذ من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، ومن أجل كل $\rho \ge 0$ لدينا :

1) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} H_\rho(L_n, L) = 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} haus_\rho(\varepsilon - \arg\min\max L_n, \varepsilon - \arg\min\max L) = 0 \ .$$

2) إذا كانت $\inf M_n > \inf M$ ، $\sup m_n < \sup m$ و

$\lim\limits_{n\to\infty} haus_\rho(\varepsilon - \arg\min\max L_n, \varepsilon - \arg\min\max L) = 0$ فـــــــإن $\lim\limits_{n\to\infty} H_\rho(L_n, L) = 0$.

<u>البرهان :</u> ينتج مباشرة من المبرهنة 5.3 والمبرهنة 5.5. ■

أن لدراسة مؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة أو محدبة–مقعرة أهمية كبيرة في نظرية الأمثليات في المبرهنة التالية نعطي نتيجة هامة في دراسة ε–التفاضلات الجزئية لدوال محدبة–مقعرة بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف.

مبرهنة 7

لتكن $\left\{L_n, L : X\times Y \to \bar{R}; n\in N\right\}$ متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة المغلقة والخاصة. ولنفرض أن

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} H_\rho(L_n, L) = 0, \forall\rho\geq 0 \qquad (22)$$

عندئذ من أجل كل $\varepsilon \geq 0$ يكون :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(\partial_\varepsilon L_n, \partial_\varepsilon L) = 0 \qquad (23)$$

البرهان

حسب العلاقة (10) نستطيع أن نكتب :

$$haus_\rho(\partial_\varepsilon L_n, \partial_\varepsilon L) = \quad haus_\rho(\partial_\varepsilon F_n, \partial_\varepsilon F) \qquad (24)$$

حيث F_n, F هي الدوال القرينة المحدبة للدوال L_n, L على الترتيب. وبما أن كل من L_n, L دالة محدبة–مقعرة مغلقة وخاصة لكل $n\in N$ فإن كل من F_n, F دالة محدبة مغلقة وخاصة ، إذاً بتطبيق النتيجة 3.11 في [3] على العلاقة (24) نحصل على :

$$haus_\rho(\partial_\varepsilon L_n, \partial_\varepsilon L) \leq c(\rho,\varepsilon) haus_{\gamma(\rho)}(F_n, F) =$$
$$= c(\rho,\varepsilon) H_{\gamma(\rho)}(L_n, L) \qquad (25)$$

حيث $c(\rho,\varepsilon)$ ثابت يتعلق ρ,ε و $\gamma(\rho)$ يتعلق فقط بالثابت ρ .

بأخذ نهاية طرفي المتراجحة (25) عندما $n\to\infty$ وبالاعتماد على الفرض (22) نحصل على (23) . ■

مبرهنة 8

لتكن $\left\{L_n, L : X\times Y \to \bar{R}; n\in N\right\}$ متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة المغلقة والخاصة ولتكن M_n, M (m_n, m) الدوال الحدية العليا (الدنيا) لـ L_n, L على الترتيب.

بفرض $\lim_{n\to+\infty} \tilde{H}_\rho(L_n, L) = 0$

عندئذ :

$$\lim_{n\to+\infty} haus_\rho(\partial_\varepsilon L_n(0,0); \partial_\varepsilon L(0,0)) = 0 \ ; \ \forall\varepsilon\geq 0 \ ; \ \forall\rho\geq 0$$

البرهان حسب العلاقة (8) و (9) لدينا :

$$\partial_\varepsilon L(0,0) = \left\{\left(x^*, y^*\right)\in X^*\times Y^* : x^*\in\partial_{1,\varepsilon}L(0,0) \ , \ y^*\in\partial_{2,\varepsilon}L(0,0)\right\}$$
$$= \left\{x^*\in X^* : L(\zeta,0)\geq L(0,0) + <x^*,\zeta> -\varepsilon; \forall\zeta\in X\right\}\times$$
$$\left\{y^*\in Y^* : L(0,\eta)\leq L(0,0) - <y^*,\eta> -\varepsilon; \forall\eta\in Y\right\}$$
$$= \left\{x^*\in X^* : M(\zeta)\geq M(0) + <x^*,\zeta> -\varepsilon; \forall\zeta\in X\right\}\times$$
$$\left\{y^*\in Y^* : m(0)\leq m(0) - <y^*,\eta> -\varepsilon; \forall\eta\in Y\right\}$$
$$= \left\{x^*\in X^* : M(0) + M^*(x^*)\leq\varepsilon\right\}\times\left\{y^*\in Y^* : m(0) + m^*(y^*)\geq\varepsilon\right\} \qquad (26)$$

بما أن M محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وخاصة فإن $M = M^{**}$ وكذلك m مقعرة ونصف مستمرة من الأعلى وخاصة فإن $m = m^{**}$ انظر $[11,14]$ ومنه بالتعويض في (26) نجد :

$$\partial_{\varepsilon} L(0,0) = \left\{ x^* \in X^* : M^{**}(0) + M^*(x^*) \le \varepsilon \right\} \times \left\{ y^* \in Y^* : m^{**}(0) + m^*(y^*) \ge \varepsilon \right\}$$
$$= \left\{ x^* \in X^* : M^*(x^*) \le M^*(\zeta^*) + \varepsilon ; \forall \zeta^* \in X^* \right\} \times \left\{ y^* \in Y^* : m^*(y^*) \ge m^*(\eta^*) - \varepsilon ; \forall \eta^* \in Y^* \right\}$$
$$= \varepsilon - \arg\min M^* \times \arg\max m^*$$
$$\partial_{\varepsilon} L_n(0,0) = \ \varepsilon - \arg\min M_n^* \times \arg\max m_n^*$$

وبطريقة مشابهة نبرهن أن :

عند ئذ يكون لدينا

$$haus_{\rho}(\partial_{\varepsilon} L_n(0,0), \partial_{\varepsilon} L(0,0)) = haus_{\rho}(\varepsilon - \arg\min M_n^* \times \arg\max m_n^*, \varepsilon - \arg\min M^* \times \arg\max m^*)$$
$$\le \ haus_{\rho}(\varepsilon - \arg\min M_n^* \ , \varepsilon - \arg\min M^*) + haus_{\rho}(\ \varepsilon - \ \arg\max m_n^*, \varepsilon - \arg\max m^*) \quad (27)$$

وبما أن $\tilde{H}_{\rho}(L_n, L) \xrightarrow[n]{} 0$ فإن $h_{\rho}(M_n, M) \xrightarrow[n]{} 0$ و $h_{\rho}(m_n, m) \xrightarrow[n]{} 0$ وبحسب المبرهنة 4.3 يكون $h_{\rho}(M_n^*, M^*) \xrightarrow[n]{} 0$ و $h_{\rho}(m_n^*, m^*) \xrightarrow[n]{} 0$. ومنه بتطبيق 1) من المبرهنة 4.1 في [17] نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} & haus_{\rho}(\varepsilon - \arg\min M_n^*, \ \varepsilon - \arg\min M^*) \xrightarrow[n]{} 0 \\ & haus_{\rho}(\varepsilon - \arg\max m_n^*, \ \varepsilon - \arg\max m^*) \xrightarrow[n]{} 0 \end{aligned} \right\} \qquad (28)$$

وبأخذ نهاية طرفي المتراجحة (27) عندما $n \to +\infty$ وباستخدام العلاقات (28) نحصل على المطلوب. ■

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد كان للدوال القرينة المحدبة والمقعرة و الدوال الحدية العليا والدنيا أهمية في دراسة مسائل النقاط السرجية من وجهة نظر تبولوجية. إن الدراسة المترية لاتقل أهمية عن الدراسة التبولوجية وتبين المبرهنة 5.1 أنّه إذا كانت متتالية من الدوال القرينة المحدبة متقاربة بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدوف فإن متتالية الدوال الحدية العليا ومتتالية الدوال الحدية الدنيا متقاربة أيضا بالنسبة إلى مسافة ρ – هاوسدوف والسؤال الذي يمكن طرحه إذا كانت متتالية الدوال الحدية العليا ومتتالية الدوال الحدية الدنيا متقاربة بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدوف فما هو الشرط الذي يجب أن تحققه الدوال القرينة المحدبة حتى تكون متقاربة. ونظراً لأهمية مفهوم مسافة ρ – هاوسدوف نوصي باستخدام هذا المفهوم لدراسة ε *-الحلول الحدية* لدوال *محدبة-مقعرة* .

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. : *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, London, 1984, 420.

[2] ATTOUCH, H; WETS,R.: *Quantitative stability of varational system: I The epigrphical distance*. Tran. Amer. Soc. N° 2, 1991, 695-729.

[3] ATTOUCH, H; WETS,R.: *Lipschitzian stability of ε-approximate solutions in convex optimization*, IIASA. Laxenburg, wp, 1987, 87-125.

[4] ATTOUCH, H; WETS,R.: *Epigraphic analysis, analyse non linéaire*, Gauthiers-villars, paris, 1989، 74-99.

[5] ATTOUCH, H; LUCCHETTI, R.; WETS,R.: *The topology of ρ-Hausdorff distance*. Annali Mat.Pura Appl. 160, 1991, 303-320.

.[6] ATTOUCH, H; WETS,R.: *Convergence Theory of saddle functions*, Trans. Amaer. Math.Soc. 280, n ,1, 1983, 1-41.

[7] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.: *Convergence of convex-concave saddle functions*, Ann. H.Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[8] BEER, G.: *Conjugate convex function, and the epi-distance topology*, Proc. Amer. Soc. 108, 1991, 117-126.

[9] BEER, G.; LUCCHETTI, R: *Coninuity results for the epi-distance topology with applications to convex optimization problems*, Math. Oper. Res. 17, 1992, 715-726.

[10] BEER, G.; ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R.: *A characterization of epi-convergence in terms of convergence of level sets*, proc. Amer. Math. Soc,116, 1992, 753-761.

[11] EKLEND,I. ; TEMMAM, R.: *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, 1974, 396.

[12] HIRIART-URRUTY, J.B.: *ε-subdifferential calculus convex analysis and optimization*. Research notes in mathematics series,20, 1982, 783-807.

[13] GUILLERME , J.: *convergence of approximate saddle points*. Universite de Limoges 1985.

[14] MOREAU, J. J.: *Fonctionnelles convexes*, séminaire du collège de France, 1966, 135

[15] Nurminski, E.A.: *Continuity of ε-subgradient mappings*, IIASA working paper, 1978, 78-58.

[16] SOUEYCATT,M. : *Epi-convergence et convergence des sections. Application à la stabilité des ε–points-selles*. A. V. A. M. C. II, 7, 1987 , 1-39.

[17] SOUEYCATT,M .: *The Convergence of level sets and the Convergence of ε-solutions in Terms of ρ-Hausdorff Distance*. Journal Natural and Applied Sciences Series .vol.22,n°.3,2007, 111-127.

[18] ROCKAFELLAR, R. : *convx Analysis* . Princeton University Press, Princeton N. J, 1970, 446

[19] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. : *variational analysis*, 2en, Springer, New York, 2004, 386.

[20] WETS, R.; JOFRE, A. : *variational convergence of bivariate functions*, Mathematical Programation, (Manscript) 2006.