مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (3) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (3) 2009

دراسة أعداد بيزو في المجموعة $S^{(3)} \cap S_0$
وأصغر عنصر في المجموعة $S^{(3)}$

الدكتور حسن سنكري*

(تاريخ الإيداع 15 / 3 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/11/18)

☐ ملخّص ☐

في هذا البحث أثبتنا صحة تصور غراندي- بيزو القائل إن العدد $1+\sqrt{2}$ هو أصغر عنصر في المجموعة $S^{(3)}$. و بعض النتائج الأخرى المتعلقة بعناصر المجموعتين $S^{(3)}$ و $S^{(2)}$ فقد برهنا أن العدد $1+\sqrt{2}$ ينتمي إلى المجموعة $S^{(3)}$ وأن $S^{(3)} \cap S_0 = \phi$ ، ثم استنتجنا أن العدد $1+\sqrt{2}$ هو أصغر عنصر في المجموعة $S^{(3)}$. إضافة إلى ذلك تم دراسة بعض متتاليات الدوال الكسرية التي تنتمي إلى المجموعتين Σ^2 و Σ^3 والتي تعرف عناصر من المجموعتين $S^{(2)}$ و $S^{(3)}$.

الكلمات المفتاحية: أعداد بيزو – دالة شور – خوارزمية شور

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم - جامعة تشرين – اللاذقية - سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (3) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (3) 2009

On The Pisot Numbers in The Set $S^{(3)} \cap S_0$ and Smallest Element of The Set $S^{(3)}$

Dr .Hassan Sankari *

(Received 15 / 3 / 2009. Accepted 18/11/2009)

□ ABSTRACT □

In this work we have proved Grandet-Pisot conjecture which says that the smallest element of the set $S^{(3)}$ is $1+\sqrt{2}$,and some other results related to the elements of the sets $S^{(2)}$ and $S^{(3)}$.

We have proved that $1+\sqrt{2} \in S^{(3)}$ and that $S^{(3)} \cap S_0 = \phi$ and we deduced that the smallest element of the set $S^{(3)}$ is $1+\sqrt{2}$.

Furthermore , we have determined some special sets of fractional functions which belong to $\sum^2$ and $\sum^3$ and definite elements from the two sets $S^{(2)}$ and $S^{(3)}$.

Key words : pisot numbers , Shuer function , Shuer algorithm

* **Assistant professor, Department of Mathematics, Faculty of science, Tishreen university, Lattakia, Syria .**

مقدمة:

الغاية من هذا العمل هي دراسة عناصر المجموعة $S^{(3)} \bigcap S_0$ وأصغر عنصر في المجموعة $S^{(3)}$ حيث $S^{(3)}$ هي المجموعة المشتقة من المرتبة الثالثة لمجموعة أعداد بيزو **S**. التي سنذكّر بتعريفها وكذلك سنذكّر ببعض المفاهيم الرياضية المتعلقة بهذا الموضوع، حيث أننا نعلم أن عدداً ما θ يسمى عدداً جبرياً إذا كان صفراً لكثيرة حدود $p(x) \ni Q[x]$ وذات درجة محددة **n** ويسمى θ عدداً جبرياً صحيحياً إذا كانت $p(x) \ni Z[x]$.
إن مجموعة الأعداد الجبرية مصحوبة بعمليتي الجمع والضرب العاديتين والمعرفتين على حقل الأعداد المركبة تشكل حقلاً يرمز له بـ **K** يسمى حقل الأعداد الجبرية كما أن مجموعة الأعداد الجبرية الصحيحة مصحوبة بعمليتي الجمع والضرب العاديتين تشكل حلقة جبرية تسمى حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة ويرمز لها بـ **A**. ويكون لدنيا دوماً $Q \subset K$ و $Z \subset A$ حيث **Q** هي مجموعة الأعداد الكسرية وحيث **Z** هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

من المجموعات الجزئية الهامة في الحلقة **A** مجموعة جزئية يرمز لها بـ **S** وتسمى مجموعة إعداد بيزو **(Pisot)** كونها اكتشفت من قبله في العام 1938 والتي تُعرَّف على النحو التالي.

1. تعريف المجموعة **S**:

نقول عن عدد جبري صحيح θ أنه ينتمي إلى المجموعة **S** إذا حقق الشرطين الآتيين:

1. θعدد جبري صحيح أكبر تماماً من الواحد.

2ـــ جميع المرافقين لـ θ ما عداه نفسه ذات طويلة أصغر تماماً من العدد الواحد (أي تقع ضمن قرص الواحدة المفتوح **(0,1) D** ويقصد بالمرافقين للعدد θ لمجموعة أصفار كثيرة حدود $p(x) \ni Z[x]$ غير قابلة للتحليل من الشكل:

$$p(x) = \varepsilon(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) : a_S \in Z \quad و \quad \varepsilon\ a_0 > 0 \quad \wedge \quad \varepsilon = \pm 1$$

وتحقق $p(\theta) = 0$ تسمى كثيرة الحدود الأصغرية المرفقة بالعدد θ ويرمز لها بالرمز $p_\theta(x)$.

برهن R. Salem في [**9**] أن **S** مغلقة بالنسبة للتبولوجيا المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$، وهي أول مجموعة أعداد جبرية صحيحة عرفت تمتعت بهذه الخاصة ، كما برهن Siegl في [**10**] أن العدد الحقيقي θ_0 **حيث** $\theta_0^3 + \theta_0 - 1 = 0$ هو أصغر عناصر المجموعة **S**.

لنرمز بـ $\mathbf{S^{(1)}}$ لمجموعة النقط الحدية للمجموعة **S** والمشكلة من عناصر المجموعة **S**، ونسميها المجموعة المشتقة من المرتبة الأولى للمجموعة **S** حيث أن:

$$\theta \in S^{(1)} \Leftrightarrow \exists \theta_n \in S \qquad : \ \theta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta$$

وبشكل مشابه نرمز بـ $\mathbf{S^{(h)}}$ لمجموعة النقط الحدية للمجموعة $\mathbf{S^{(h-1)}}$ ونسميها المجموعة المشتقة من المرتبة **h** للمجموعة **S** حيث يكون لدينا دوماً:

$$\theta \in S^{(h)} \Leftrightarrow \exists (\theta_n) \in S^{(h-1)} \qquad : \ \theta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta$$

مع الاصطلاح على أن نضع $S = S^{(0)}$

إن المجموعات $S^{(h)}$ كانت موضع اهتمام كل من Pisot وDufersnoy في الخمسينيات من القرن الماضي حيث درسا في [**6**] العناصر الأصغرية للمجموعتين $S^{(0)}$ **و** $S^{(1)}$ وحددا بعض العناصر الأصغرية لهاتين المجموعتين ثم برهن بيزو في [**6**] أن $\min S^{(1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ وبعد ذلك برهنت Grandet في [**7**] أن

2 = $S^{(2)}$ min دون أن تحدد أية عناصر أخرى من المجموعات $\mathbf{S^{(h)}}$ حيث $\mathbf{h \geq 2}$ وبقيت أسئلة كثيرة مطروحة للبحث بهذا الموضع والتي تتعلق بعناصر المجموعات $\mathbf{S^{(h)}}$ من أجل $\mathbf{h \geq 2}$ وبشكل خاص دراسة العناصر الأصغرية في المجموعات $\mathbf{S^{(h)}}$ من أجل $\mathbf{h \geq 3}$ وهذا ما كان موضع اهتمامنا في هذا العمل.

لقد اعتمدت في دراستي هذه مجموعة خاصة من الدوال الكسرية يرمز لها بـ Σ عرفها بيزو ودرس خواصها واستخدمها في دراسة المجموعة **S** اعتمد في تعريفها على التالي:

تعريف :إذا كان θ عدداً ينتمي إلى المجموعة **S** وكانت $p_\theta(x)$ كثيرة الحدود الأصغرية المرفقة بـ θ حيث:

$$p_\theta(x) = \varepsilon(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) \ ; \ \varepsilon = \pm 1 \text{ و } \varepsilon a_0 > 0 \quad \wedge \quad a_j . \in Z \quad \forall j$$

ولنضع $q(x) = \varepsilon \ x^n \ p(\frac{1}{x})$

فإننا نعرف الدالة الكسرية بـ :

$$f : z \to \frac{p(z)}{q(z)}$$

ونسميها الدالة المرفقة بالعدد θ والتي تمتلك الخواص الآتية:

إذا لم تكن $p_\theta(x)$ كثيرة حدود عكسية ومن الدرجة الثانية فإن :

1. f دالة تحليلية بجوار الصفر وتُنشر بجوار الصفر في سلسلة ماكلوران بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n : \quad u_n \in Z, \ \ u_0 \neq 0 \qquad \forall n \geq 1$$

2. $q(z)$ تمتلك صفر وحيد $1/\theta$ في المنطقة $|z| < 1$ وبقية أصفار تكون في المنطقة $1 < |z|$ أي تكون خارج قرص الواحدة المفتوح $D(0,1)$.

3. من اجل $|z| = 1$ فإن $|f(z)| = 1$ لكل $z \ni D(0,1)$

أما إذا كانت $p_\theta(x)$ كثيرة حدود عكسية ومن الدرجة الثانية فهي من الشكل $p_\theta(x) = x^2 - ax + 1$ حيث $a \geq 3$ وفي هذه الحالة فإن الدالة الكسرية

$$f : z \to \frac{1}{z^2 - az + 1}$$

تحقق الخاصتين (1) و(2) والخاصة (3) التالية

$$\forall z \in D : |z| = 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 1$$

مما تقدم نستنتج أنه أياً كان العدد $S \ni \theta$ فإنه يوجد على الأقل دالة كسرية $f = \dfrac{p}{q}$ تمتلك الخصائص الثلاثة السابقة (1)، (2) ، (3) ومن هنا كانت أفكار Pisot وDufersnoy بإرفاق مجموعة Σ من الدوال الكسرية بالمجموعة **S** سنعرفها على النحو التالي:

2 . تعريف المجموعة Σ:

نقول عن دالة كسرية $f=\frac{p}{q}$ انها تنتمي إلى المجموعة Σ إذا حققت الخواص الآتية:

1. f دالة تحليلية بجوار الصفر وتُنشر في سلسلة ماكلوران بالشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n:\qquad u_0\neq 0\wedge\ u_n\in Z\qquad \forall n\in N$$

2. f تمتلك قطباً وحيداً $1/\theta$ في قرص الواحدة المغلق D,(0,1) أما بقية أقطابه فتقع خارج المنطقة **D (0,1)** أي تقع في المنطقة $|z|>1$.

3. $\forall z\in D\ |z|=1\Rightarrow\ |f(z)|\leq 1$

درس Pisot و Dufersnoy في [**6**] المجموعة Σ بشيء من التفصيل وقد أثبت Pisot و Dufersnoy النظرية التالية:

نظرية(1):

إذا كانت f دالة تحليلية بجوار الصفر وتكتب بسلسلة ماكلوران على النحو التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n:\qquad u_0\neq 0\wedge\ u_n\in Z\quad \forall n\in N$$

فإن $f\in\Sigma$ إذا وفقط تحقق التالي:

1ــ من اجل أي عدد طبيعي **n** حيث $0<n\leq m$ توجد كثيرتا حدود $(E_n\ ,D_n)$ وكثيرتا حدود $(E_n^+\ ,D_n^+)$ ذات درجة محددة **n** أوليتان فيما بينهما بحيث يكون لدينا

$$E_n(0)=1\wedge D_n(z)=\varepsilon z^n E_n(\frac{1}{z}):\varepsilon=\pm 1$$

$$E_n^+(0)=1\wedge D_n^+(z)=\varepsilon' z^n E_n^+(\frac{1}{z}):\varepsilon'=\pm 1$$

وبحيث يكون لكل من الدالتين الكسريتين $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ و $\frac{D_n^+(z)}{E_n^+(z)}$ نشراً في سلسلة ماكلوران بجوار الصفر يتطابق مع نشر $f(z)$ حتى المرتبة **n-1** أي يكون لدينا التالي:

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)}=u_0+u_1z+....+u_{n-1}z^{n-1}+W_nz^n+W_{n+1}z^{n+1}+........$$

$$\frac{D_n^+(z)}{E_n^+(z)}=\sum_{p=0}^{n-1}u_p\ z^p+W_n^+z^n+W_{n+1}^+z^{n+1}+........$$

2ـ من أجل أي **n** حيث $1\leq n<m\leq+\infty$ يكون $W_n<u_n<W_n^+$ (إلا إذا كان **u_0=1** و **n=2**) ومن أجل $n=m<+\infty$ يكون **u_m=W_m** او $u_m=W_m^+$ وفي هذه الحالة يكون لدينا إذا كان $f(z)=\frac{D_m(z)}{E_m(z)}$

$W_m=u_m$

أما إذا كان $u_m=W_m^+$ فيكون $f(z)=\frac{D_m^+(z)}{E_m^+(z)}$

إضافة إلى ذلك توجد بين كثيرات الحدود $D_n(z)$ و $D_n^+(z)$ علاقة التدرج التالية:

$$D_{n+2}(z)=(1+z)\,D_{n+1}(z)-\frac{u_{n+1}-W_{n+1}}{u_n-W_n}\,zD_n(z)\qquad \forall n\geq 1$$

$$D^+_{n+2}(z)=(1+z)\,D^+_{n+1}(z)-\frac{W^+_{n+1}-u_{n+1}}{W^+_n-u_n}\,zD^+_n(z)\qquad \forall n\geq 1$$

كذلك توجد بين المعاملات u_n , W_n و W_n^+ العلاقة الآتية:

$$W^+_{n+1}-W_{n+1}=\frac{4(u_n-W_n)(w_n^+-u_n)}{W_n^+-W_n}\quad \forall n\geq 3$$

$$W^+_{n+1}-W_{n+1}=\frac{2D_{n+1}(1)}{D_n(1)}\left(W_n^+-W_n\right)$$

3. المتتالية $\left\{W_n^+-W_n\right\}\ n\in N$ موجبة ومتناقصة وإن السلسلة

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(u_n-\frac{W_n^+ + W_n}{2}\right)^2$$ متقاربة

4. من أجل كل قيمة لـ **n** فإن كل من كثيرتي الحدود $D_n^+(z)$ و$D_n(z)$ تملك صفراً وحيداً τ_n^+ و τ_n في المنطقة $|z|<1$ وبحيث يكون لدينا التالي إذا كان $\frac{p}{q}=f\in\sum$ وكان $\frac{1}{\theta}$ الصفر الوحيد لـ $q(z)$ في المنطقة $|z|<1$ فإنه يكون لدينا $\tau_n^+<\theta<\tau_n$ إذا كان **m** >**n** ويكون $\theta=\tau_n$ أو $\theta=\tau_n^+$ إذا كان **m=n** بالإضافة إلى ما سبق إذا كان $n=+\infty$ فإن $\{\tau_n\}_{n\in N}$ تكون متتالية متزايدة في حين ان المتتالية $\{\tau_n^+\}_{n\in N}$ تكون متناقصة ويكون لهاتين المتتاليتين نهاية وحيدة هي θ أي يكون لدينا

$$\theta=\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}\tau_n^+$$

وكذلك يكون لدينا أيضاً $u_0<\theta$

البرهان : انظر [**6**]

ملاحظة : إن حساب بسيط يمكن أن يبين إن $D_1(z)$ و $D_2(z)$ لهما الصيغة الآتية:

$$D_1(z)=u_0-z \quad و \quad E_1(z)=1-z$$

$$D_2(z)=u_0+\frac{u_1}{1+u_0}z-z^2 \quad و \quad E_2(z)=1-\frac{u_1}{1+u_0}z-u\ z^2$$

$$D_1^+(z)=u_0+z \quad و \quad E_1^+(z)=1+u_0z$$

$$D_2^+(z)=u_0+\frac{u_1}{1-u_0}z+z^2 \quad و \quad E_2^+(z)=1+\frac{u_1}{1-u_0}z+u_0z^2$$

إضافة لما سبق أثبت بيزو في [**6**] الكثير من الخصائص الأخرى التي تحققها كثيرات الحدود $D_n(z), E_n(z),\ D_n^+(z), E_n^+(z)$ كما برهن أنه إذا كانت

$$\{f_n\}_{n\in N}\in\sum \quad وكان \quad f_n\xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad فإن \quad f\in\sum$$

وأن المعاملات في نشر ماكلوران بجوار الصفر لـ $\mathbf{f_n}$ تتطابق مع العاملات لـ **f** إلى أي قيم كبيرة بالقدر الذي نشاء.

المجموعات المشتقة $\sum^{(h)}$ درست واستخدمت في دراسة $\mathbf{S^{(h)}}$ فمن أجل **h = 1** في **[6]** برهن بيزو أنه

$$\forall f \in \sum \ \Rightarrow f \in \sum{}^{(1)} \Leftrightarrow f = \frac{P}{q} : \ |P(z)| \le |q(z)| \ \ \forall z : |z| = 1 \qquad \text{(I)}$$

وحيث المساواة تكون محققة من أجل عدد منته من قيم **z** على الأكثر، كذلك في **[7]** درست Hogut –Grandet المجموعات $\mathbf{\Sigma^{(h)}}$ من أجل جميع قيم **h** حيث **h≥0** واستخدمت هذه الدراسة في دراسة المجموعة $\mathbf{S^{(h)}}$ وبشكل خاص برهنَت أن :

$$\textbf{(II)} \qquad \theta \in S^{(h)} \text{ إذا وفقط إذا وجدت على الأقل } f \in \sum{}^{(h)} \text{ مرفقة بالعدد } \theta$$

إضافة إلى ذلك برهنت أيضاً أنه إذا كان $f \in \sum^{(h)}$ مرفقة بالعدد $\theta \in S^{(h)}$ و **f** تكتب بسلسلة ماكلوران في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة على النحو الآتي:

$$f(z) = u_0 + u.z + \ldots.. + u_n z^n + \ldots... \quad : u_0 \ne 0 \wedge u_i \in Z \ \forall i \in N$$

فإن

$$W_n + h \le U_n \le W_n^+ - h \quad \text{حيث } n \ge 3 \qquad \textbf{(II')}$$

وأن المتتالية

$$f_n(z) = \frac{A(z)\, U_n(z) + \varepsilon z^n \, \overline{q}(z)\, V_n(z)}{q(z) U_n(z) + \varepsilon' z^n \, \overline{A}(z) V_n(z)} \in S^{(1)} \qquad (III)$$

عندما وفقط عندما يكون $\frac{A}{q}$ ∍ $\Sigma^{(1)}$ ويكون $U_n(z)$ و $V_n(z)$ كثيرتي حدود ذات درجة محددة تساوي **n** على الأكثر ،ويكون $\frac{V_n(z)}{U_n(z)}$ تابع تحليلي في قرص الواحدة المغلق ويحقق

$$\left|\frac{V_n(z)}{U_n(z)}\right| \le 1 \qquad \forall z : |z| \le 1$$

إضافة إلى ذلك يكون $U_n(0) \ne 1$ ويكون $U_n(0)$ تقسم $\Omega(0)$ حيث $\Omega(z)$ كثيرة حدود معرفة بالشكل: $\Omega(z) = z^r \left(Q(z) Q(\frac{1}{z}) - A(z) A(\frac{1}{z}) \right)$ حيث **r** عدداً صحيحاً موجباً أو صفر نختاره بشكل يكون فيه $\mathbf{\Omega(0) \ne 0}$

وحيث $\overline{q}(z) = z^s \, q(\frac{1}{z})$ و **s** هي درجة **q(z)**

$\overline{A}(z) = z^t \, A(\frac{1}{z})$ و **t** هي درجة **A(z)**

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى الإجابة على بعض الأسئلة المطروحة حول أعداد بيزو مثل دراسة العناصر الأصغرية للمجموعات $S^3, S^4, \ldots\ldots, S^h$ و التي ما زالت حتى يومنا هذا بدون إجابة ، و إن أهمية هذا البحث بالإضافة إلى

كونه أجاب على أحد الأسئلة المفتوحة وهو أصغر عناصر المجموعة S^3 و المتعلقة بإعداد بيزو فإنه سيساعد في حل المسائل الأخرى المتبقية بدون إجابة.

طرائق البحث ومواده:

إن البحث موضوع رياضي مجرد تم انجازه بالاعتماد على مراجع علمية تخصصية وبحوث علمية منشورة في دوريات عالمية.

النتائج والمناقشة:

إن النتائج السابقة بالإضافة إلى نتائج بعض الأعمال العملية الأخرى في هذا المجال والمشار إليها في المراجع ، وكذلك بعض الأفكار الجديدة التي أضفناها إلى هذه النتائج سمحت لنا بالحصول على نتائج جديدة وهامة في هذا المجال حيث سنقوم بإثبات مايلي :

نظرية (2) :

أ . مجموعة الدوال الكسرية الآتية:

$$f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}$$

$$g_n(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)} \text{ و } g_n^*(z)=\frac{1+z^n}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)}$$

تنتمي إلى المجموعة $\Sigma^{(2)}$.

ب . الدالّتان الكسريتان $f_2(z)=\frac{1}{1-2z-z^2}$ و $f_1(z)=\frac{1-z-z^2}{1-2z-z^2}$ تنتميان إلى المجموعة $\Sigma^{(3)}$.

البرهان:

أ – نأخذ الدالة الكسرية **f(z)** المعرفة بـ :

$$f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}=\frac{A(z)}{q(z)}$$

نجد أنه أياً كان $z\in C$ يحقق **|z| = 1** فإن

$$|1-2z-z^2|=|1-z^2|^2+4\Rightarrow |A(z)|\le|q(z)|\ \forall z:|z|\le 1$$

ومنه نجد أن $f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}\in\Sigma^{(1)}$ (حسب العلاقة (**I**))

إذاً حسب العلاقة (**III**) وباعتبار أن $f\ni\Sigma^{(1)}$ فإنه يكفي لكي تكون المتتالية $\{f_n\}_{n\in Z}\in\Sigma^{(1)}$ حيث:

$$f_n(z)=\frac{(1-z^2)U_n(z)+z^n(1+2z-z^2)V_n(z)}{(1-2z-z^2)U_n(z)+z^n(1-z^2)V_n(z)} \quad \text{لكل } z\in C$$

هو إيجاد من أجل كل عدد صحيح موجب **n** كثيرتي حدود $U_n(z)$ و $\mathbf{V_n(z)}$ بحيث تكون $g(z)=\frac{V_n(z)}{U_n(z)}$

دالـة تحليليـة فـي قـرص الواحـد المغلـق **(0.1)** **D** وبحيـث **(z)** **Ω** كثيـر حـدود معرفـة بالشـكل التـالي:

$$\Omega(z)=z^r(Q(z)\,Q(\frac{1}{z})-A(z)\,A(\frac{1}{z})$$

وحيث **r** عدداً صحيحاً موجباً أو صفر نختاره بطريقة يكون فيها **Ω(o)≠o.**

ومنه نلاحظ من تعريف **(z)** **Ω** وحيث $f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}=\frac{A(z)}{q(z)}$ أن $\Omega(z)=4$ وبالتالي حسب **(III)**

فإن **$U_n(z)$** في حالة وجوده يجب أن يُختار بطريقة يكون فيها $U_n(o)$ يقسم العدد 4 ولا يساوي العدد **1** إذاً يجب أن يكون $U_n(o)=2$ أو $U_n(o)=4$.

– من أجل $U_n(o)=2$

لنختار $U_n(z)=2+\varepsilon.z^n$ و $V_n(z)=\varepsilon'$ حيث $\varepsilon=\pm1\,,\varepsilon'=\pm1$ فنلاحظ حسب **(III)** أن هذا الاختيار يحقق الشروط الكافية لكي تكون المتتالية

$$\{f_n\}_{n\in N}\in\Sigma^{(1)}$$

حيث $f_n(z)=\frac{(1-z^2)(2+\varepsilon z^n)+z^n(1-2z-z^2)\varepsilon'}{(1-2z-z^2)(2+\varepsilon z^n)+(1-z^2)\varepsilon'}\in\Sigma^{(1)}$ ومنه ندرس الحالتين:

الحالة الأولى: عندما $\varepsilon=\varepsilon'$ فإن :

$$f_n^{(1)}(z)=\frac{1-z^2+\varepsilon z^n(1+z-z^2)}{1-2z-z^2+\varepsilon z^n(1-z-z^2)}\in\Sigma^{(1)}$$

ومنه نجد أن

$$f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}\in\sum{}^{(2)}$$

وذلك لأن $f_n^{(1)}\in\sum{}^{(1)}$ ولأن:

$$f(z)-f_n(z)=\frac{2z^{n+1}}{(1-2z-z^2)(1-2z-z^2+z^{n+1})}=o+U_{n+1}z^{n+1}+......\forall n\geq1$$

التي تبين أن للدالتين $\mathbf{f_n}$ و f نفس المعاملات في نشر ما كلوران حتى المرتبة **n** وذلك من أجل أي عدد طبيعي موجب $n\in N$ أي أن $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ (وذلك حسب تعريف التقارب في Σ) .

الحالة الثانية: عندما $\varepsilon=-\varepsilon'$ فإن :

$$f_n^{(2)}(z)=\frac{1-z^2+\varepsilon' z^{n+1}}{1-2z-z^2+\varepsilon' z^{n+1}}\in\sum{}^{(1)}\Rightarrow f(z)=\frac{1-z^2}{1-2z-z^2}\in\sum{}^{(2)}$$

لنفس السبب السابق .

والآن نأخذ متتالية الدوال الكسرية $\{g_n\}_{n\in N}$ المعرفة بالشكل:

$$g_n(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)}=\frac{A_n(z)}{q_n(z)}:n\geq1$$

فيكون لدينا من جهة أولى أن:

وذلك لأن $|A_n(z)| \le |q_n(z)| \; \forall z:|z|=1 \wedge n \ge 1$

$|1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)|^2 = |1-z-z^2+z^n(1-z^2)|^2 + 2\,|1+z^n|^2 \;\; \forall z:|z|=1$ ويكون لدينا من جهة ثانية أيضاً (حسب نظرية **Roche** في **[7]**) أن كثيرة الحدود $q_n(z)=1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)$ تملك صفراً وحيداً θ_n في المنطقة $|z|<1$ وذلك من أجل أي عدد طبيعي **n** حيث **n ≥ 1**.

و بهذه المناقشة نكون قد برهنا حسب **(I)** أن $g_n \ni \sum^{(1)}$ لكل n→ N حيث n ≥ 1.

لنبرهن الآن أن $g_n \ni \sum^{(2)}$ أياً كان **n ≥ 1**.

حسب ما سبق لدينا $(g_n)_{n\in N} \ni \sum^{(1)}$ لكل n ≥ **1**

وحسب تعريف **$\Omega_n(z)$** فإن:

$$\Omega_n(z) = 2\,(1 + z^n + z^{2n})$$

وبالتالي حسب **(III)** وباختيار $V_m(z)=\varepsilon'_m$ ، و $U_m(z)=2+\varepsilon_m z^m$ فإن متتالية الدوال التالية $\{g_{n.m}\} \ni \sum^{(1)}$ حيث:

$$g_{n,m}(z)=\frac{\left[1-z-z^2+z^n(1-z^2)\right](2+\varepsilon_m z^m)+z^m\left[1+z-z^2+z^n(1-2z-z^2)\right]\varepsilon'_m}{\left[1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)\right](2+\varepsilon_m z^m)+z^m\left[1-z^n(1-z-z^2)\right]\varepsilon'_m}$$

وبتبسيط العلاقة السابقة وباختيارات مناسبة لـ ε_m و ε'_m نحصل على متتاليات الدوال الكسرية التالية والتي تنتمي إلى **$\Sigma^{(1)}$** من أجل أي عدد طبيعي $N \ni m$

$$\{g^1{}_{n,m}\}_{m\in N} \;،\; \{g^2{}_{n,m}\}_{m\in N} \;،\; \{g^3{}_{n,m}\}_{m\in N} \;،\; \{g^4{}_{n,m}\}_{m\in N}$$

حيث أنه من أجل:

1. $\varepsilon_m=1 \wedge \varepsilon_m=\varepsilon'_m$ فإن

$$g^{(1)}{}_{n,m}(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)+z^m(1-z^2)+z^{m+n}(1+z-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)+z^m(1-z-z^2)+z^{m+n}(1-z^2)} \in \sum^{(1)}$$

2. $\varepsilon_m=-1 \wedge \varepsilon_m=\varepsilon'_m$ فإن

$$g^{(2)}{}_{n,m}(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)+z^m(1-z^2)-z^{m+n}(1+z-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)+z^m(1-z-z^2)+z^{m+n}(1-z^2)}$$

3. $\varepsilon_m=1 \wedge \varepsilon_m \ne \varepsilon'_m$ فإن

$$g^{(3)}{}_{n,m}(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)+z^{m+1}(1+z^n)}{1-2z-z^2+z^{4-2}(1-z-z^2)+z^{m+1}(1-z^n)}$$

4. $\varepsilon_m=-1 \wedge \varepsilon_m \ne \varepsilon'_m$ فإن

$$g^{(4)}{}_{n,m}(z)=\frac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)-z^{m+1}(1+z^n)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)+z^{m+1}(1-z^n)}$$

إضافة إلى ذلك لدينا

$$g^{(3)}_{n,m}(z)-g_n(z)=\frac{\delta_n z^{m+n+1}}{q_{n,m}(z)\,q_n(z)}$$

وذلك أياً كان العددان الصحيحان الموجبان **m** و **n** وحيث **n≥ 1**.

وهذا يقتضي أن :

$$g_{n,m}\xrightarrow[m\to\infty]{}g_n$$

وذلك من أجل أي قيمة معينة للعدد **n**

وهذا يبين أن $g_n\in\sum^{(2)}$ أياً كان العدد **n** حيث **n ≥ 1**

ومن أجل برهان $g_n^*\ (z)=\dfrac{1+z^n}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)}\in\Sigma^{(2)}$ نلاحظ أنه في المتتاليتين $\{g^{(4)}_{n,m}\}$ و $\{g^{(3)}_{n,m}\}$ حيث

$$g^{(3)}_{n,m}\ (z)=\frac{A^{(3)}_{n.m}(z)}{q^{(3)}_{n,m}(z)},\ \ g^{(4)}_{n.m}\ (z)=\frac{A^{(4)}_{n.m}(z)}{q^{(4)}_{n,m}(z)}$$

إذا استبدلنا كل من كثيرتي حدود البسطين بكثيرة حدودها العكسية (أي نستبدل كل من $A^{(3)}_{n.m}(z)$ و $A^{(4)}_{n.m}(z)$ وعلى الترتيب بـ $\widetilde{A}^{(3)}_{n.m}(z)$ و $\widetilde{A}^{(4)}_{n.m}(z)$ حيث :

$$\widetilde{A}^{(3)}_{n.m}(z)=\varepsilon\, z^{n+m+1}A^{(3)}_{n.m}\ (\frac{1}{z})$$

$$\widetilde{A}^{(4)}_{n.m}(z)=\varepsilon'\, z^{n+m+1}A^{(4)}_{n.m}\ (\frac{1}{z})$$

فإننا نحصل على المتتاليات الجديدة التالية $\{g'^{(3)}_{n,m}\}$ و $\{g'^{(4)}_{n,m}\}$ من عناصر المجموعة $\Sigma^{(1)}$ حيث:

$$g'^{(3)}_{n,m}:z\to\frac{1+z^n(1-z^2)+z^{m+n-1}(1+z-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)-z^{m+1}(1+z^n)}$$

$$g'^{(4)}_{n,m}:z\to\frac{1+z^n-z^{m-1}(1-z^2)+z^{m+n-1}(1+z-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)-z^{m+1}(1+z^{4-2})}$$

ومنه من $g'^{(4)}_{n,m}$ نجد أن متتالية الدوال الكسرية $\mathbf{g_n}^*$ المعرفة بالشكل:

$$g_n^*:z\to\frac{1+z^n}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)}\quad\in\sum^{(2)}$$

$$f_1(z)=\frac{1-z-z^2}{1-2z-z^2}$$

ب – لإثبات أن الدالّة الكسرية تنتمي إلى المجموعة $\Sigma^{(3)}$ لدينا حسب(أ) أن $g_n\in\sum^{(2)}$ حيث $g_n(z)=\dfrac{1-z-z^2+z^n(1-z^2)}{1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)}$ ولدينا أيضاً

$$g_n(z)-f_1(z)=\frac{z^n}{(1-2z-z^2)[1-2z-z^2+z^n(1-z-z^2)]}=0+u_nz^n+u_{n+1}z^{n+1}+\dots$$

ومنه نجد أن للدالتين $g(z)$ و $g_n(z)$ نفس المعاملات في نشر ماكلوران حتى المرتبة **n-1** وذلك أياً كان العدد الطبيعي **n** حيث $n\geq 3$ وهذا يقتضي أن $g_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1$ ومنه نجد أن $f_1(z)\in\Sigma^{(3)}$.

ولإثبات أن الدالة $f_2(z)=\dfrac{1}{1-2z-z^2}$ تنتمي إلى المجموعة $\Sigma^{(3)}$ لدينا حسب (أ) $\in \sum^{(2)}$ $g_n^*: z \to \dfrac{1+z^n}{1-2z-z^2+z^{n-2}(1-z-z^2)}$ ولدينا أيضاً $g^*_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_2$ لأن لكل من الدالتين f_2 و g_n نفس المعاملات في نشر ماكلوران حتى المرتبة **n** وذلك أياً كان **n** حيث $n \geq 3$ ومنه نجد أن $f_2(z) \in \Sigma^{(3)}$.

وبذلك نكون قد أثبتنا صحة ما ذكرناه في (أ) و (ب) .

نظرية (**3**): العدد الحقيقي الموجب $1+\sqrt{2}$ و $\ni S^{(3)}$

البرهان:

أولاً : الدالة $f_2(z)=\dfrac{1}{1-2z-z^2} \ni S^{(3)}$ حسب (ب) من النظرية(2) .

ثانياً : $f_2(z)=\dfrac{1}{1-2z-z^2}$ هي دالة مرفقة بالعدد $1+\sqrt{2}$ لأن العدد $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ هو القطب الوحيد لهذه الدالة في المنطقة $|z|<1$.

مما سبق وحسب **(II)** نستنتج أن $1+\sqrt{2}$ و $\ni S^{(3)}$.

تعريف دالة Shur **(شور):**

إذا كانت **f** دالة تحليلية في قرص الواحدة المفتوحة **D (0.1)** وتحقق العلاقة التالية:

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall \ z \in D(0.1)=\{z \in D: |z|<1\}$$

فإن **f** تسمى دالة Shur.

توطئة (1): (خوارزمية Shur من أجل عناصر المجموعة Σ)

إذا كان $f \in \sum$ وكانت تكتب بجوار الصفر على النحو التالي:

$$f(z)=C_0+C_m z^m+.......: C_m \neq 0 \wedge C_m \in Z$$

فإن **f** يمكن تحويلها إلى دالة **F** لـ Shur باستخدام أحد التحويلات التالية:

التحويل **T_1**: إذا كان **$|C_0| > 1$** فإن **f** يحول إلى دالة **g_1** لـ shur تعطى بالصيغة التالية:

$$g_1(z)=\frac{C_0 f(z)-1}{C_0-f(z)} \cdot z^m$$

التحويل **T_2**: إذا كان **$|C_0| = 1$** فإن **f** يحول إلى دالة $g_2(z)$ لـ shur تعطى بالصيغة التالية:

$$g_2(z)=\frac{(z^{2m}+C_0\overline{C_m} z^m-1)-C_0(z^m-1)}{(z^{2m}-\overline{C_0} C_m z^m-1)-\overline{C_0}(z^{2m}-1) f(z)}$$

التحويل **T_3**: إذا كان **$|C_0| < 1$** فإن **f** يحول إلى دالة **$g_3(z)$** لـ shur تعطى بالصيغة التالية:

$$g_3(z)=\frac{f(z)-C_0}{1-\overline{C_0} f(z)} \cdot \frac{1}{z}$$

البرهان: انظر [7]

وبالاستفادة مما سبق نبرهن الآتي:

تمهيدية (1): الدوال الكسرية $f \in \sum$ والتي منشورها في جوار الصفر في سلسلة ماكلوران يبدأ بالمقدار $1 + z + z^2$ (أي تكتب في سلسلة قوى بجوار الصفر على النحو التالي).

$$f(z) = 1 + z + z^2 + u_3 z^3 + \dots\dots + u_n z^n + \dots\dots\dots \quad n \geq 3$$

هي f_n , f تأخذ الشكل

$$f_n(z) = \frac{1 - z^2 \pm z^n(1 + z - z^2)}{1 - z - z^2 \mp z^n(1 - z^2)} \quad \text{و} \quad f = \frac{1 - z}{1 - z - z^2}$$

البرهان: نفرض أن **f** عنصراً ما من المجموعة Σ وأن **f** يكتب بجوار الصفر في سلسلة قوى بأمثال صحيحة على النحو التالي:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + u_3 z^3 + \dots\dots + u_n z^n + \dots\dots\dots : \quad n \geq 3 \wedge u_n \in Z$$

ولنضع:

$$g(z) = \frac{(z^2 + z - 1)\ f(z) - (z^2 - 1)}{(z^2 - 2z - 1) - (z^2 - 1)\ f(z)}$$

فنجد (حسب التوطئة السابقة) أن **g(z)** هي دالة shur ومنه نجد أن

$$|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D(0.1)$$

كما نجد أيضاً أن **g(z)** تكتب في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة في جوار الصفر على النحو التالي

$$g(z) = z + C_m z^m + \dots\dots\dots : \quad C_m \in Z\ \forall . m$$

وذلك لأن المقدار $(z^2 + z - 1) f(z) - (z^2 - 1)$ يبدأ بالحد z^3

في حين أن المقدار $(z^3 - 2z - 1) - (z^2 - 1) f(z)$ يبدأ بالحد z^2

إن ما سبق يقتضي أن $g(z) = 0$ أو $g(z) = \mp z^n$ ومنه نجد أن:

$$f(z) = f_n(z) = \frac{1 - z \pm z^n(1 + z - z^2)}{1 - z - z^2 \pm z^2(1 - z^2)} \quad \text{أو} \quad f(z) = \frac{1 - z}{1 - z - z^2}$$

ملاحظة :

حسب 2 من النظرية (1) لدينا العلاقتين الآتيتين:

العلاقة الأولى

$$w_{n+1}^{+} - w_{n+1} = \frac{4(u_n - w_n)(w_n^{+} - u_n)}{w_n^{+} - w_n}$$

العلاقة الثانية

$$\sum_{h=3}^{+\infty}\left(u_n - \frac{w_n^{+} + w_n}{2}\right)^2 < +\infty$$

وإذا وضعنا $a_n = u_n - w_n$ و $b_n = w_n^{+} - u_n$ فإن العلاقة الأولى تصبح على النحو التالي

$$\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{a_n . b_n}{((a_n + b_n)/2)}$$

كما أن العلاقة الثانية تصبح أيضاً على الشكل الآتي:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (a_n - b_n)^2 < +\infty$$

ومنه $\underset{n\to\infty}{Lim} a_n = \underset{n\to\infty}{Lim} b_n = \underset{n\to\infty}{Lim} = \frac{a_n + b_n}{2} = Lim \frac{w_n^+ - w_n}{2} < +\infty$ 0

إن ماسبق يقودنا للتعريف الآتي:

تعريف: إن المقدار **w(f)** المعرف بالعلاقة الآتية:

$\forall f \in \sum \quad w(f) = \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{w_n^+ - w_n}{2}$ يسمى مجال (أو سعة) الدالة $f \in \sum$.

إن المجال **w(f)** درسه Boyd.David في [**2**] حيث برهن النتيجة الآتية:

إذا كان $f \in \sum$ حيث $f = \frac{A}{q}$ وكان:

$$\Omega(z) = z^r \left(q(z)\, q(\frac{1}{z}) - A(z)\, A(\frac{1}{z})\right)$$

حيث **r** تختار بطريقة يكون فيها $\mathbf{\Omega(0) \neq 0}$ فإن

$$w(f) = |q(o)|^{-2} \quad \zeta(|\Omega(z)|) \quad (IV)$$

حيث:

$$\zeta(|\Omega(z)|) = |\Omega(0)| \;.\; |\theta_1|^{-1} \,.\, |\theta_2|^{-1} \,........ |\theta_m|^{-1}$$

وحيث $\theta_1, \theta_2 .... \theta_n$ هي بالضبط أصفار كثيرة الحدود **Ω(z)** في المنطقة $\mathbf{|z| < 1}$.

تمهيدية(2): إذا كان $f \in \sum^{(h)}$ فإن $h \le w(f)$

البرهان: برهنت Grandet في [**7**] أنه إذا كان $f \in \sum^{(h)}$ فإن $w_n + h \le u_n \le w_n^+ - h$ لكل **h** $\geq$ **3** ومنه نجد أن $2h \le w_r^+ - w_n = 2w(f)$

تمهيدية (3): الدوال الكسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ المرفقة بالأعداد $\theta \in S^{(3)}$ والتي منشورها في سلسلة ماكلوران يبدأ بالمقدار $1+ z+ 2z^2$ ، وبأمثال صحيحة على النحو التالي:

$$f(z) = 1 + z + 2z^2 + u_3 + ... + u_n z^n + ...: \; u_n \in Z$$

هي فقط الدالة f_1 حيث $f_1(z) = \frac{1 - z - z^2}{1 - 2z - z^2}$

البرهان: نأخذ الدالة f_1 حيث $f_1(z) = \frac{1 - z - z^2}{1 - 2z - z^2}$ عندئذ يكون لدينا التالي:

ان $f_1 \in \sum^{(3)}$ حسب (ب) من النظرية(2) .

كما أن f_1 ينشر في سلسلة ماكلوران على النحو التالي:

$$\frac{1 - z - z^2}{1 - 2z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + u_3 z^3 + ... + u_n z^n + ...: u_n \in Z \;\forall n \ge 3 \wedge u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

ومنه نجد أن:

$$D_2(z) = 1 + \frac{1}{2} z - z^2 \;\; و \;\; w_2 = \frac{1}{2}$$

$$D_2\ (z) = 1 + z^2 - z^3\ .\ \ w_3 = 2\ \text{و}\ w_3^+ - w_3 = \frac{2D_3(1)}{D_2(1)}\ (u_2 - w_2) = 6$$

إضافة إلى ذلك لدينا أيضاً $\Omega\ (z) = 3$ ومنه نحد أن $w(f) = 3$ و ذلك حسب (IV).

و منه وحسب التمهيدية (2) نجد أن:

$$3 \le \lim_{n\to\infty} \frac{w_n^+ - w_n}{2} \le 3 \Rightarrow w_n^+ - w_n = 6\ \ \forall\ n \ge 3\ .\ \text{و}\ u_n - w_n - u_n = 3$$

$$\frac{1 - z - z^2}{1 - 2z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \dots\dots + u_n\ z^n + \dots\dots\dots : u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}\ \text{و}$$

إذاً:

$$u_n - w_n = w_n^+ - u_n = 3 \quad \forall n \ge 3$$

والآن نفرض أن **g** دالة ما و **g** ∍ $\sum^{(3)}$ بحيث أن **g** يكتب في سلسلة ماكلوران بالشكل:

$g(z) = 1 + z + z^2 + v_3\ z^3 + \dots\dots + v_n\ z^n + \dots\dots$ و أن **g** مرفق بعدد ما $\theta \ni S^{(3)}$ فيكون لدينا:

$$u_0 = v_0\ ,\ \ u_1 = v_1\ \ \wedge\ u_2 = v_2$$

ولنفرض أن:

$$u_t = v_t : 0 \le t \le n - 1\ \wedge\ n \ge 3$$

فنجد أن:

$$g(z) - f(z) = (v_n - u_n)\ z^n + (v_{n+1} - u_{n+1})\ z^{n+1} + \dots\dots\dots$$

واذا وضعنا $\delta_n = v_n - u_n$ و اعتبرنا المقادير $w_n^{'+}\ ,\ \ w_n^{'}$ حيث:

$$w_n^{'}\ (v_0\, ,\, v_1 \dots\dots v_{n-1})\ \wedge\ w_n'^{+}\ (v_0\, ,\, v_1\, , \dots\dots ,\, v_{n-1})$$

نجد حسب ما سبق:

$$3 \le w(g) \le \frac{w_{n+1}^{'+} - w_{n+1}^{'}}{2} = \frac{2(v_n - w_n')(w_n'^{+} - w_n)}{w_n'^{+} - w_n'} = \frac{2(u_n - w_n + \delta_n)(w_n^+ - u_n - \delta_n)}{w_n^+ - w_n}$$

$$= \frac{(3 + \delta_n)(3 - \delta_n)}{3} \Rightarrow$$

$$3 \le \frac{1}{3}\ (3 + \delta_n)\ (3 - \delta_n) \Leftrightarrow \delta_n^2 \le 0 \Leftrightarrow \delta_n = 0 \Rightarrow v_n = v_n$$

إذا $\mathbf{u_n = v_n}$ من أجل كل عدد صحيح موجب **n** $\Leftarrow f_1 = g$

تمهيدية (4):

لا توجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S^{(3)}$ ذات منشور بجوار الصفر في سلسلة قوى بأمثال صحيحة يبدأ بالمقدار $1 + z + 3z$ (أي أن **f** يكتب بجوار الصفر في سلسلة قوى بأمثال صحيحة على النحو التالي):

$$f(z) = 1 + z + 3z^2 + u_3\ z^3 + \dots\ u_n z^n\ \dots : u_n\ \in Z\ \ \forall\ n \ge 3$$

البرهان:

لنعتبر الدالة $f(z) = \dfrac{1 - z}{1 - 2z - z^2}$ فنجد أن

$\Omega(z) = (1 - z)^2\ (1 - 3z - z^2)$ وبالتالي فإن: $w(f) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (حسب ما سبق) . كذلك نجد أيضاً أن **f** ينشر بجوار الصفر بالشكل:

$$f(z) = 1 + z + 3z^2 + u_3 z^3 + \dots\dots\dots$$

بالإضافة إلى ما سبق نلاحظ أنه إذا كان $g \in \Sigma$ مرفق بعدد ما $\theta \in S$ وكان لـ **g** نشراً بجوار الصفر في سلسلة ماكلوران يبدأ بالمقدار $1+z+3z^2$ (أي أن **g** يكتب بجوار الصفر في سلسلة ماكلوران بالشكل:

$$Z \in g(z) = 1 + z + 3z^2 + v_3 z^3 + \dots\dots + v_n z^n + \dots:\ v_n$$

ولنعتبر المقادير w'_n , w'^{+}_n حيث:

$$w'_n\ (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})\ \text{و}\ w'^{+}_n\ (v_0, v_1, \dots\dots, v_{n-1})$$

فنجد أن:

$u_t = v_t$ من $0 \le t \le 2$ ومنه نجد أنه:

إذا فرضنا ان $u_t = v_t$ من أجل $1 \le t \le n-1$ و $3 \le n$ وأن $v_n - u_n = C_n$

فيكون يدينا:

$$g(z) - f(z) = C_n z^n + C_{n+1} z^{n+1} + \dots:\ C_n \in Z,\ n \ge 3$$

ويكون لدينا أيضاً:

$$w(g) \le \frac{w'^{+}_{n+1} - w'_{n+1}}{2} = \frac{2(v_n - w'_n)(w'^{+}_n - v_n)}{w'^{+}_n - w'_n}$$

$$= \frac{(u_n - w_n + C_n)\ (w^{+}_n - u_n - C_n)}{w^{+}_n - w_n / 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} w(f) - C_n^2 / w(f) \le w(f)$$

ومنه نجد أن:

$$w(g) \le w(f) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$$

وهذا يعني أن $g \notin \sum^{(3)}$ أياً كان $g \in \sum$ حيث **g(z)** ينشر بجوار الصفر في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة من الشكل

$$g(z) = 1 + z + 3z^2 + v_3 z^3 + \dots\dots \quad v_n \in Z\ \forall\ n \in N$$

تمهيدية (5):

لا توجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S^{(3)}$ منشورها بجوار الصفر في سلسلة قوى بأمثال صحيحة يبدأ بالمقدار $1+2z+4z^2$.

البرهان:

لنأخذ الدالة الكسرية $f(z) = \dfrac{1}{1-2z}$ فنجد أن $\Omega(z) = -2(z-1)^2$ وبالتالي فإن $w(f) = 2$

و نجد أيضاً أن **f** ينشر بجوار الصفر في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة على النحو التالي:

$$\frac{1}{1-2z} = 1 + 2z + 4z^2 + u_3 z^3 + \dots\dots\dots\ u_n z^n : u_n \in Z\ \ \forall\ n \in N$$

بالإضافة إلى ما سبق وبأسلوب مماثل لبرهان التمهيدية 4 نلاحظ أنه إذا كان $g \in \Sigma$ مرفق بعدد ما $\theta \in S$ وكان **g** يكتب بجوار الصفر في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة بالشكل:

$$g(z) = 1 + 2z + 4z^2 + v_3 z^3 + \dots..$$

فيكون لدينا $w(g) \le w(f) = 2 < 3$

وهذا يعني أن $g \notin \sum^{(3)}$ لكل $g \in \sum$ وحيث **g** يكتب بجوار الصفر في سلسلة قوى بأمثال صحيحة بالشكل:

$$g(z) = 1 + 2z + 4z^2 + v_3 z^3 + \dots\dots\dots$$

وهو المطلوب.

تعريف المجموعة S_0: المجموعة S_0 هي المجموعة المكونة من جميع أعداد بيزو التي هي أصغرتماماً من العدد $1+\sqrt{2}$ أي أن:

$$S_0 = \{\theta \in S : \theta < 1+\sqrt{2}\}$$

تمهيدية (6):

$$S^{(3)} \cap S_0 = \phi$$

البرهان: لتكن **f** دالة كسرية ما حيث $f \in \Sigma^{(3)}$ ومرفقة بعدد ما $\theta \in S^{(3)} \cap S_0$ ولنفرض أن **f** يكتب بجوار الصفر في سلسلة قوى وبأمثال صحيحة على النحو التالي:

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots\dots + u_n z^n + \dots . : u_0 \neq 0 \ \wedge u_n \in Z \ \ \forall n \geq 0$$

ولسهولة الدراسة سنكتب $S_1 = S^{(3)} \cap S_0$ كما سنكتب **f** اختصاراً بالشكل:

$$f = (u_0.\ u_1\ ,\ u_2, \dots\dots\dots, u_n \dots\dots) \qquad (V)$$

ولندرس العاملات u_i لكل $0 \leq i$ في العبارة السابقة للدوال الكسرية **f** ∍ $\sum^{(3)}$ والمرفقة بالأعداد $\theta \in S_1$ على النحو التالي:

إن **Boyd** برهن في [2] أنه إذ كانت $f \in \Sigma^{(h)}$ مرفقة بعدد ما $\theta \in S^{(h)}$ ويكتب بجوار الصفر في سلسلة ماكلوران بالشكل **(V)** فإن $\theta \geq \sqrt{u_0 + h}$ ومنه نجد أن $u_0 \leq 1$ لكل $\theta \in S_1$.

إذاً الدوال $f \in \Sigma^{(3)}$ والمرفقة بالأعداد $\theta \in S_1$ لكل منها نشر في سلسلة ماكلوران يبدأ بالمقدار $u_0 = 1$ أي لكل منها نشر على النحو التالي:

$$I = (1, u_1, u_2, \dots\dots\dots, u_n, \dots) : u_n \in Z \ \forall n \geq 0$$

ومنه نجد أن:

$$\theta \in S_1 \text{ لكل } 1+\sqrt{2} > \theta \text{ وأن } D_2(z) = 1 + \frac{u_1}{1+u_0} z - z^2$$

ولكن:

$$\theta < 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow D_2\ (1+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{u_1}{2}(1+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2})^2 < 0 \Leftrightarrow u_1 \in \{1.2.3\}$$

ومنه نجد أنه إذا كانت $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بعدد ما $\theta \in S_1$ فإن لـ **f** إحدى العبارات الثلاثة التالية:

$I_1 = (1,1,u_2,\dots\dots)$
$I_2 = (1,2,u_2,\dots\dots)$
$I_3\ (1,3,u_2,\dots\dots\dots)$

حتى يتم البرهان للتمهيدية 6 سندرس كل من العبارات الثلاثة السابقة على النحو التالي:

أولاً . سندرس العبارة I_1 حيث:

$$I_1 = (1,1,u_2, \dots\dots)$$

$$D_2(z) = 1 + \frac{1}{2} z - z^2 \ \ , \ w_2 = \frac{1}{2} \text{ و } u_2 \geq 1$$

ومنه نجد أنه إذا كان $D_3(z) = (1+z)D_2(z) - \frac{u_2 - w_2}{u_1 - w_1} z D_1(z) \Rightarrow D_3(1+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow u_2 \in \{1,2,3\}$ $f \in S^{(3)}$ مرفق بعدد ما $\theta \in S_1$ وكان لـ **f** العبارة I_1 فإن **f** بجوار الصفر تأخذ إحدى العبارات الثلاثة التالية:

$I'_1 = (1,1,1,u_3,\ldots\ldots.)$

$I''_2 = (1,1,2,u_3,\ldots\ldots.)$

$I'''_3 = (1,1,3,u_3\ldots\ldots\ldots.)$

من أجل I'_1 فإن التمهيدية (1) تبين أن الدوال الكسرية $f \in \Sigma$ والتي تقبل النشر I'_1 هي:

$$f_n(z) = \frac{1 - z^2 \pm z^n (1 + z - z^2)}{1 - z - z^2 \pm z^n \ (1 - z^2)} \ , \ \ f(z) = \frac{1 - z^2}{1 - z - z^2}$$

ونلاحظ ببساطة أن أياً من هذه الدوال لا تنتمي إلى المجموعة $\mathbf{S^{(3)}}$ وذلك لأن $\boldsymbol{\omega(f)=1}$ ولأن $\left| f_n(z) \right| = 1$ لكل **n ∍ N** ولكل **z** حيث **|z| = 1** وهذا يعني أن $\mathbf{f_n}$ لا ينتمي إلى المجموعة $\Sigma^{(1)}$ لكل $1 \leq n$

ـ من أجل العبارة I''_2 . أن التمهيدية (3) تبين أنه لا يوجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S_1$ ومنشورها في جوار الصفر هو العبارة I''_2 .

ـ من أجل العبارة I'''_3 . أيضاً من التمهيدية (4) يتبين لنا أنه لا توجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S_1$ ومنشورها في جوار الصفر هو العبارة I'''_3 .

ثانياً . لندرس العبارة I_2 حيث: $I_2 = (1.2.u_2,\ldots\ldots..)$

لدينا $D_2\ (z) = 1 + z - z^2$ و $D_3(1+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow u_2 \in \{3,4,5\}$

ومنه نجد أنه إذا كان $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفق بعدد ما $\theta \in S_1$ وكان لـ **f** العبارة $\mathbf{I_2}$ فإن لـ **f** بجوار الصفر إحدى العبارات الثلاث الآتية:

$$I_2^{(1)} = (1,2,3,u_3,\ldots\ldots\ldots.)$$
$$I_2^{(2)} = (1,2,4,u_3,\ldots\ldots\ldots.)$$
$$I_2^{(3)} = (1,2,3,u_3,\ldots\ldots\ldots.)$$

. من أجل العبارة $I_2^{(1)}$ حيث:

لدينا $I_2^{(1)} = (1,2,3,u_3,\ldots\ldots\ldots.)$

$$D_2(z) = 1 + z - z^2 \quad , \quad w_2 = 2 \text{ و } D_2(1) = 1$$

$$D_2\ (z) = 1 + \frac{3}{2} z + \frac{1}{2} z^2 - z^3 \text{ و } w_3 = \frac{9}{2}$$

$$w_3^+ - w_3 = \frac{2D_3\ (1)}{D_2\ (1)}\ (u_2 - w_2) = 4 < 6 \Rightarrow$$

لا يوجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفق بأعداد $\theta \in S_1$ ومنشورها بجوار الصفر هو العبارة $\mathbf{I_2^{(1)}}$.

ـ من أجل العبارة $\mathbf{I_2^{(2)}}$ فإن التمهيدية (5) تبين أنه لا يوجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S_1$ ومنشورها بجوار الصفر هو العبارة $\mathbf{I_2^{(2)}}$.

. من أجل العبارة $I_2^{(3)}$ حيث:

$$I_2^{(3)} = (1, 2, 5, u_3, \ldots.)$$

لنأخذ الدالة $f(z)=\dfrac{1+z^3-z^5}{1-2z-z^2-z^5}$ فنجد أن

$\Omega(z)=2(z^4+1)^2$ وأن $\omega(f) = 2$

و نجد أيضاً أن **f** تنشر بجوار الصفر على النحو التالي:

$$f(z) = 1 + 2z + 5z^2 + u_3 z^3 + \ldots..$$

بالإضافة إلى ما سبق نلاحظ أنه إذا كانت $g \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بعد ما $\theta \in S_1$ وكان لـ **g** نشراً بجوار الصفر من الشكل:

$$g(z) = 1+2z + 5z^2 + u_3 z^3 + \ldots.+ u_n z^n + \ldots.$$

ولنعتبر المقادير w_n' و $w_n'^{+}$ حيث:

$$w_n'^{+}(v_0, v_1, \ldots\ldots, v_{n-1}) \quad و \quad w_n'(v_0, v_1, \ldots., v_{n-1})$$

فيكون لدينا:

$$g(z) - f(z) = (v_n - u_n) z^n + \ldots\ldots : n \geq 3$$

لنفرض أن: $v_n - u_n = c$ فيكون لدينا $c \in Z$ ويكون لدينا أيضاً (حسب ملاحظة)

$$w(g) = \frac{a'_{n+1}+b'_{n+1}}{2} = \frac{(a_n-c)(b_n-c)}{(a_n+b_n)/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} w(f)-c^2/w|f| \leq w(f)=2<3$$

بذلك نستنتج أنه إذا كانت $g \in \Sigma^{(3)}$ وكان لـ **g** نشراً بجوار الصفر يبدأ بالمقدار $1+2z+5z^2$ فإن $w(g) \leq 2 < 3$ وهذا يقتضي إلى أن $g \notin \Sigma^{(3)}$. إذا لا توجد دوال كسرية $f \in \Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta \in S_1$ ومنشورها بجوار الصفر هو العبارة $I_2^{(3)}$

ثالثاً وأخيراً. لندرس العبارة I_3 حيث:

$$I_3 = (1, 3, u_2, \ldots\ldots.)$$

باعتبار أن:

$$D_2(z) = 1+\frac{u_1}{2}z-z^2 \quad و \quad E_2(z)=1-\frac{u_1}{2}z-z^2$$

فيكون لدينا:

$$D_2(z) = 1+\frac{3}{2}z-z^2 \quad و \quad E_2(z)=1-\frac{3}{2}z-z^2$$

إضافة إلى ما سبق يكون لدينا:

$$\frac{D_2(z)}{E_2(z)}=\frac{1+\frac{3}{2}z-z^2}{1-\frac{3}{2}z-z^2}=1+3z+\frac{9}{2}z^2+w_3z^3+\ldots.\Rightarrow w_2=\frac{9}{2}\Rightarrow u_2 \geq \frac{9}{2}$$

ونجد أيضاً:

$$D_3(z)=(1+z)D_2(z)-\frac{u_2-w_2}{u_1-w_1}zD_2(z)\Rightarrow$$

$$D_3(1+\sqrt{2})\le 0 \Leftrightarrow (2+\sqrt{2})D_2(1+\sqrt{2})-\frac{u_2-\frac{9}{2}}{3}(1+\sqrt{2})D_2(1+\sqrt{2})\le 0$$
$$\Leftrightarrow u_2\in\{5,6,7\}$$

. من أجل $u_2 = 5$ يكون لدينا العبارة:

$$I_3^{(1)}=(1,3,5,u_3,.................)$$
$$D_3(z)=1+\frac{7}{3}z+\frac{2}{3}z^2-z^3 \Rightarrow D_3(1)=3 \text{ و } D_2(1)=\frac{3}{2}$$

ومنه نجد أن:

$$w_3^+-w_3=2\,\frac{D_3(1)}{D_2(1)}(u_2-w_2)=2<6\Rightarrow$$

لا توجد دوال كسرية $f\in\Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta\in S_1$ومنشورها بجوار الصفر هو العبارة **$I_3^{(1)}$**.

. من أجل **u = 6** يكون لدينا العبارة

$$I_3^{(2)}=(1,3,6,u_3,.................)$$

لنأخذ الدالة $f(z)=\dfrac{1+z-z^2}{1-2z-z^2}$ فنجد أن $\Omega(z)=3$ وأن $w(f)=3$

$$f(z)=\frac{1+z-z^2}{1-2z-z^2}=1+3z+6z^2+z_3z^3+......$$

ونجد أيضاً أن :

ومنـه وبمناقشـة مماثلـة لمـا ورد فـي التمهيديـة (3) نجـد أن الـدوال الكسـرية $f\in\Sigma^{(3)}$ والمرفقـة بالأعـداد $\theta\in S_1$هي على الأكثر الدالة **f (z)** حيث $f(z)=\dfrac{1+z-z^2}{1-2z-z^2}$.

ونلاحـظ وضـوحاً مـن تعريـف S_1 أن $1+\sqrt{2}\notin S_1$ وأن الدالـة (z) f مرفقـة بالعـدد $1+\sqrt{2}$ لأن $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ هو القطب الوحيد لهذه الدالة في المنطقة $|z|<1$.

إذاً لا توجد دوال كسرية $f\in\Sigma^{(3)}$ مرفقة بأعداد $\theta\in S_1$ومنشورها في جوار الصفر هو العبارة **$I_3^{(2)}$**.

. من أجل $u_2=7$ يكون لدينا العبارة:

$$I_3^{(3)}=(1,3,7,u_3,.................)$$

لنأخذ الدالة $f(z)=\dfrac{1+z}{1-2z-z^2}$ فنجد أن:

$$W(f)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3 \quad \text{و أن} \quad \Omega(z)=-(z-1)2(1+3z+z^2)$$

ونجد أيضاً أن :

$$f(z)=\frac{1+z}{1-2z-z^2}=1+3z+7z^2+u_3z^3+...$$

مما سبق وبمناقشة مماثلة لما ورد في برهان التمهيدية (3) نستنتج أنه لا توجد دوال كسرية $f\in\Sigma^{(3)}$ مرفقة بإعداد $\theta\in S_1$ ومنشورها في جوار الصفر هو العبارة $I_3^{(3)}$.

وبهـذا نكـون قـد برهنـا أنـه لا توجـد دوال كسـرية $f\in\Sigma^{(3)}$ مرفقـة بأعـداد $\theta\in S^{(3)}\bigcap S_0$ وهـذا يعنـي أن $S^{(3)}\bigcap S_0=\phi$ وهو المطلوب.

نظرية(4) :

$$\min S^{(3)}=1+\sqrt{2}$$

البرهان:

نفرض أن $a = \min S^{(3)}$ فنجد :

حسب من النظرية (**2**) أن $1+\sqrt{2} \ni S^{(3)}$ إذاً $a \le 1 + \sqrt{2}$. ولدينا حسب التمهيدية (6) أن $S^{(3)} \cap S_0 = \phi$ وهذا يقتضي أن $a \ge 1 + \sqrt{2}$ بذلك نجد أن :

$$a = 1 + \sqrt{2}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

إن دراسة أعداد بيزو والنتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث غاية في الأهمية في دراسة بعض المسائل الأخرى المتعلقة بمجموعة أعداد بيزو بالإضافة إلى أنها تساعد في دراسة مجموعة أعداد سالم ذات الطبيعة المشابهة للمجموعة **S** و التي لم يعرف عن خصائصها الجبرية إلا القليل

المراجع:

1- BOYD, D.W. *Small Salem Number*. Duke Math. 44, 1977, 315-328.
2- BOYD,D.W. *Pisot numbers and width of meromophric function*, Duke Math. 46, 1978, 1-35.
3- BOYD ,D.W. *Pisot and Salem number in Intervals of Real line*. Math. Comput. 32, 1978, 1244-1260.
4- BOYD, D. W. *Pisot Number in the Neighborhood of a Limit Point .I.J*. Number Theory, l21, 1985, 17-43.
5- DUBICKAS,A. *A note on Powers of Pisot Numbers*. Pub l. Math .Debrecen , 56, 2000, 141-144.
6- DUFRESNOYET PISOT. *Etude certains functions meromorphes bornees sur le cercle unite, application a un ebsemble ferme d'entiers algebriques*. Ann.Sci.Ecole Norm Sup. 72, 1955, 69-92 .
7- GRANDET-HUGOT-M. *ensemble fermes d'entiers algebriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup,3, 82, 1965,1-35.
8- TERR,WEISSETTEN, E.W. *Pisotnumber* From Mathworld- Wolfarm website 2007
9- SALEM,R. *number of pisot*, duke,maths . 11, 1944, 103-108.
10- SIEGEL, C. L. *Algerbraic Numbers whose Conjugates Lie in the Unit Circle*. Duke Math. J. 11, 1944, 597-602.