مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (3) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (3) 2009

التحدب الإحداثي واجتماع أربع مجموعات نجمية في R^3

الدكتور عدنان ظريف *
الدكتور سهيل محفوض **
براءة عفيصة ***

(تاريخ الإيداع 5 / 8 / 2009. قُبِل للنشر في 23 / 11 /2009)

☐ ملخّص ☐

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها محدبة إحداثياً، إذا وفقط إذا كان تقاطع أيٍّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX, oY, oZ مع المجموعة عبارة عن مجموعة محدبة. ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد أيضاً إنها مجموعة نجميّة إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة بحيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a, x]$ من أجل كل x من A واقعة في A (أي أن جميع نقاط المجموعة A تكون مرئية من النقطة a ضمن A) وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجميّة بالنسبة للنقطة a.

في هذا البحث سوف نبرهن النظرية الآتية:

" إذا كانت A مجموعة متراصّة ومحدّبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد عندئذ: تكون المجموعة A اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية إذا وفقط إذا وجد في A أربع نقاط a, b, c, d بحيث تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقلّ".

الكلمات المفتاحية :المجموعة المحدبة– المجموعة المحدبة إحداثياً– المجموعة النجمية– المجموعة المتراصة.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

*** طالبة دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

Coordinate Convexity and Union of four Starshaped Sets in R^3

Dr. Adnan Zarif*
Dr. Sohel Mhfod**
Bara'a Afisa ***

(Received 5 / 8 / 2009. Accepted 23 / 11 /2009)

□ ABSTRACT □

Let A be a set in R^3. A is called a coordinate convex set ,if and only if ,any parallel line to any coordinate axes oX ,oY ,oZ was intersected with A is convex set . A is called a starshaped set , if and only if ,a point existed in A as (a) ,so that ,every line segment[a,x] for all $x \in A$ lies in A,(it means every point in A was visible via A from a) in this case this set is starshaped with respect to (a) .

In this research we will prove the following theorem:

" If the set A is compact and coordinate convex set in R^3 then: The set A is union of four starshaped sets ,if and only if ,it existed four points in the set A as a, b, c, d ,so that , each boundary point of A will be visible via A from one of the points a, b, c, d at least

Key Words: convex set , coordinate convex set, starshaped set , compact set.

***Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
***** Postgraduate Student, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة، بحيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل x من A واقعة في A (أي أن جميع نقاط المجموعة A تكون مرئية ضمن A من النقطة a).وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجمية بالنسبة للنقطة a. ويقال عن مجموعة Aفي الفضاء الإقليدي إنها مجموعة محدبة إذا وفقط إذا كان $[x,y]\subset A$ من أجل كل x,y من A .

كما يقال عن A في نفس الفضاء بأنها مجموعة محدبة إحداثياً إذا وفقط إذا كان تقاطع أيٍّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX,oY,oZ مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y ضمن A . رؤية خطية . إذا وفقط إذا كانت $[x,y]\subset A$.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y بوضوح ضمن A إذا وجدت مجاورة لـ y في R^3 مثل N ، بحيث إن النقطة x ترى ضمن A المجموعة $N\cap A$.

إن مسألة إيجاد الشروط اللازمة والكافية لكون مجموعة متراصة ما في الفضاء R^n اجتماعاً منتهياً لمجموعات نجمية، تلعب دوراً في غاية الأهمية في نظرية المجموعات النجمية .وهذا ما جعل الكثير من الباحثين يهتم بدراستها ،فقد تمت دراسة هذه المسألة في حالات كثيرة في المستوي الإقليدي والفضاء الإقليدي ثلاثي البعد سواءً في حالة المفهوم الخطي للنجمية أو في حالة المفهوم المتري لها ،وعلى سبيل المثال فالأعمال التالية تدور في فلك هذه المسألة: [1]–[2]–…………………–[15]–[16]–[17].

ففي المستوي الإقليدي بعد أن توقفت جميع الدراسات عند قيمة عظمى لعدد المجموعات المشكلة للاجتماع وهي ثلاث مجموعات نجمية ، استطعنا إثباتها من أجل اجتماع ثلاث ثم أربع مجموعات نجمية في العمل [13].

أما في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ،تمت مناقشتها في العمل [8] حيث أثبتت من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين ولكن بإضافة شرط الرؤية بوضوح بدلاً من الرؤية العادية. أما في حالة الرؤية العادية فتم إيراد مثال يبين عدم تحققها من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين وذلك في العمل [12] .

ولكننا بعد أن تعاملنا مع صف خاص من المجموعات المتراصة هي المجموعات المتراصة المحدبة إحداثياً تمكنّا من إثباتها من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين ثم ثلاث مجموعات نجمية وذلك في حال الرؤية الخطية في العمل [17]، وفي هذا العمل سنثبتها من أجل أربع نقاط.

- الرموز التي سنستخدمها في هذا البحث:

1- الرمز $bd(A)$ يعني جبهة A. 2- الرمز $\operatorname{int}(A)$ يعني داخلية A.

3- الرمز $ext(A)$ يعني خارجية A. 4- الرمز $[a,b]$ يعني القطعة المستقيمة التي طرفاها a,b .

5- الرمز $]a,b[$ يعني القطعة المستقيمة باستثناء طرفيها a,b.

6- الرمز $l(a,b)$ يعني المستقيم المار من النقطتين a,b .

8- الرمز $conv(A)$ يعني الغلاف المحدّب لـA وهو أصغر مجموعة محدّبة تحوي A.

9-الرمز $\ker n(A)$ يعني نواة المجموعة A : وهي مجموعة جميع النقاط من A ، والتي تكون A نجمية بالنسبة لكل منها.

أهمية البحث وأهدافه:

هذا البحث يدرس كيفية كتابة مجموعة محدبة إحداثياً ومتراصة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد على شكل اجتماع لأربع مجموعات نجمية.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم نجمة نقطة أو المجموعة النجميّة بالنسبة لنقطة ما والمفهوم الخطي للرؤية.

النتائج والمناقشة :

نظرية:

إذا كانت A مجموعة متراصّة ومحدّبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد عندئذ: تكون المجموعة A اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية إذا وفقط إذا وجد في A أربع نقاط a,b,c,d بحيث تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c,d على الأقلّ.

البرهان:

برهان لزوم الشرط:

لنفرض أنّ A تكتب بالشكل الآتي : $\boxed{1}$ $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ حيث تكون A_1, A_2, A_3, A_4 مجموعات نجمية .

عندئذ نجد أنّ :أيّاً كان x من $bd(A)$ فإنّ $x \in A$ لكون A متراصّة وبالتالي مغلقة وهذا يقتضي أنّ يكون $bd(A) \subseteq A$.إذاً

$$\forall x \in bd(A) \ \Rightarrow x \in A \ \Rightarrow \ x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

وهذا يعني أنّه:

$$\begin{aligned}
&either \quad x \in A_1 \ \& \ \text{نجمية} \ A_1 \quad \Rightarrow \exists a \in A_1 \ :[a,x] \subset A_1 \subset A \\
&or \quad x \in A_2 \ \& \ \text{نجمية} \ A_2 \quad \Rightarrow \exists b \in A_2 \ :[b,x] \subset A_2 \subset A \\
&or \quad x \in A_3 \ \& \ \text{نجمية} \ A_3 \quad \Rightarrow \exists c \in A_3 \ :[c,x] \subset A_3 \subset A \\
&or \quad x \in A_4 \ \& \ \text{نجمية} \ A_4 \quad \Rightarrow \exists d \in A_4 \ :[d,x] \subset A_4 \subset A
\end{aligned}$$

وهذا يعني وجود أربع نقاط a,b,c,d في A بحيث تكون النقطة x الكيفية من $bd(A)$ مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقلّ،لأنّه إذا انتمت x إلى أكثر من مجموعة من المجموعات A_1, A_2, A_3, A_4 تكون مرئية من أكثر من نقطة من النقاط الأربع a,b,c,d . □

برهان كفاية الشرط:

نفرض وجود أربع نقاط a,b,c,d في A بحيث تكون كلّ نقطة جبهية لـ A مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقلّ (▲). ولنضع:

$$A_1 := \{x \in A : [a,x] \subset A\} \& A_2 := \{x \in A : [b,x] \subset A\} \&$$
$$A_3 := \{x \in A : [c,x] \subset A\} \& A_4 := \{x \in A : [d,x] \subset A\}$$

نلاحظ أنّه بحسب تعريف المجموعة A_1 تكون A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a لأنّه أيّاً كانت x من A_1 فإنّ $[a,x]\subset A_1$. وبالطريقة نفسها نجد أنّ A_2, A_3, A_4 مجموعات نجمية بالنسبة لـ b,c,d على الترتيب .

وحتى يتمّ المطلوب يجب أن نبرهن أنّ: $\boxed{A = A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$

من تعريف المجموعات A_1, A_2, A_3, A_4 نلاحظ أنّ :

$$A_1\subset A \,\&\, A_2\subset A \,\&\, A_3\subset A \,\&\, A_4\subset A$$

وبالتالي يكون: $\boxed{1}$ $\boxed{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\subset A}$.

برهان الاحتواء العكسي:

من أجل كلّ x من A فإنّه أمّا أن يكون: $x\in bd(A)$ أو $x\in \operatorname{int}(A)$.

– إذا كانت $x\in bd(A)$: عندئذ – بحسب الفرض(▲)– تكون النقطة x مرئية ضمن A من إحدى النقاط a,b,c,d على الأقلّ لذلك فإنّه إمّا أن تكون $x\in A_1$ أو $x\in A_2$ أو $x\in A_3$ أو $x\in A_4$ وبالتالي :

$$\boxed{\mathrm{I}} \qquad \boxed{bd(A)\subset A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$$

– أمّا إذا كانت $x\in \operatorname{int}(A)$: فإنّنا نميّز خمس حالات :

1– حالة تطابق النقاط الأربعة .

2–حالة تطابق ثلاث نقاط من النقاط الأربعة.

3– حالة تطابق نقطتين من النقاط الأربعة .

والقضية محققة ضمن هذه الحالات (انظر النظرية (2) في العمل [17]).

4– $x\in\{a,b,c,d\}$ ففي هذه الحالة لدينا :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{either} & x=a \Rightarrow x\in A_1 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 \\ \textit{or} & x=b \Rightarrow x\in A_2 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 \\ \textit{or} & x=c \Rightarrow x\in A_3 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 \\ \textit{or} & x=d \Rightarrow x\in A_4 \Rightarrow x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\boxed{\operatorname{int}(A)\subset A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$ وبالتالي تحقّقت النظرية ضمن هذه الحالة .

5– الحالة العامّة وهي حالة كون $a\neq b\neq c\neq d$ مع $x\notin\{a,b,c,d\}$.

لنفرض جدلاً أنّ : $x\notin A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ (✱)

وهذا يعني أنّ x غير مرئية ضمن A من أيّ من النقاط a,b,c,d أي :

$$[a,x]\not\subset A \;\&\; [b,x]\not\subset A \;\&\; [c,x]\not\subset A \;\&\; [d,x]\not\subset A.$$

وهذا يعني أنّه:

$$\exists a_1,a_2\in bd(A)\cap[a,x]:\ [a,a_1]\subset A \;\&\; [a_2,x]\subset A.$$
$$\exists b_1,b_2\in bd(A)\cap[b,x]:\ [b,b_1]\subset A \;\&\; [b_2,x]\subset A.$$
$$\exists c_1,c_2\in bd(A)\cap[c,x]:\ [c,c_1]\subset A \;\&\; [c_2,x]\subset A.$$
$$\exists d_1,d_2\in bd(A)\cap[d,x]:\ [d,d_1]\subset A \;\&\; [d_2,x]\subset A.$$

بملاحظة أنّ : $[a,a_2]\not\subset A$ لأنّه لو تحقق غير ذلك لكان :

$$[a,x]=[a,a_2]\cup[a_2,x]\subset A\Rightarrow[a,x]\subset A.$$

وهذا تناقض مع الفرض(✱) بالتالي: $[a,a_2]\not\subset A$ فعلاً .

وبالطريقة نفسها نجد أنّ $[b,b_2]\not\subset A$ & $[c,c_2]\not\subset A$ & $[d,d_2]\not\subset A$.

والآن سنناقش حالتين رئيسيتين :

❶ حالة $\boxed{x\in conv\{a,b,c,d\}}$

نلاحظ أن:

$$x\notin l(a,b)\ \&\ x\notin l(b,c)\ \&\ x\notin l(c,d)\ \&$$
$$x\notin l(a,c)\ \&\ x\notin l(a,d)\ \&\ x\notin l(b,d)$$

وذلك مهما كان توضع النقاط a,b,c,d ويتم ذلك بشكل مشابه لما تم في النظرية (1) من العمل [17].

ضمن هذه الحالة لدينا عدة حالات فرعية:

1–ثلاث نقاط من النقاط a,b,c,d تقع على المحاور الإحداثية $xL\ ,xL',xL''$، أما النقطة الباقية فتقع في أحد أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تتحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$.

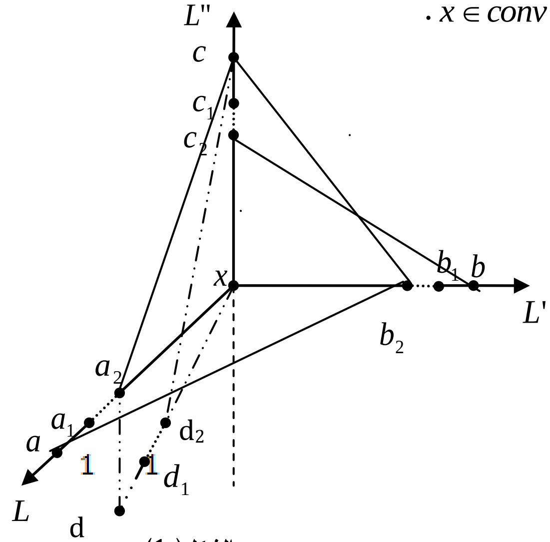
وبدون المساس بعمومية المسألة نفرض أنّ :

النقطة a تقع على المحور xL و b تقع على xL' و C على xL' بينما d فتقع في الثمن السابع.

وهنا نميّز ثلاث حالات فرعية:

①إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 .

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :



الشكل(1)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة①

$$[c,a_2]\subset A\&[c,b_2]\subset A\&[c,d_2]\subset A\&$$
$$[b,c_2]\subset A\&[a,b_2]\subset A\&[d,a_2]\subset A$$

انظر الشكل (1).

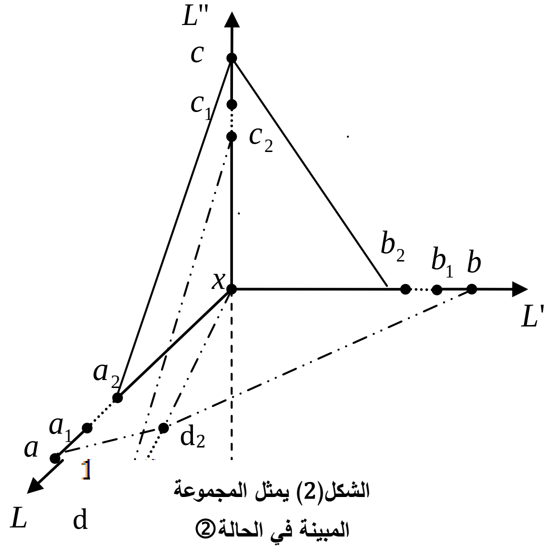
من جهة ثانية:

بما أن :

$$[c,b_2]\subset A\&[b_2,x]\subset A\&$$
$$[x,a_2]\subset A\&[a_2,c]\subset A$$

فإن محيط المجموعة B التي جبهتها (c,b_2,x,a_2,c)محتوى في A

وبما أن A محدبة إحداثياً فإن $conv(B)\subset A$ ولدينا $]c_1,c_2[\not\subset A$



الشكل(2) يمثل المجموعة المبينة في الحالة②

مع كون $]c_1,c_2[\subset conv(B)$

وهذا تناقض لذلك فإن

$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى

ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2. ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$[c,a_2]\subset A\&[c,b_2]\subset A\&[b,d_2]\subset A\&[a,d_2]\subset A\&[d,c_2]\subset A$ انظر الشكل(2).

من جهة ثانية:

بمـا أن : $[c,b_2]\subset A\&[b_2,x]\subset A\&[x,a_2]\subset A\&[a_2,c]\subset A$ فـإن محـيط المجموعـة B التـي جبهتها (c,b_2,x,a_2,c) محتوى في A وبما أن A محدبة إحداثياً فإن $conv(B)\subset A$ ولدينا $]c_1,c_2[\not\subset A$ مع كون $]c_1,c_2[\subset conv(B)$ وهذا تناقض لذلك فإن $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$[c,b_2]\subset A\&[b,d_2]\subset A\&[a,c_2]\subset A\&[d,a_2]\subset A$

انظر الشكل(3).

عندئذ نجد أنَّ:

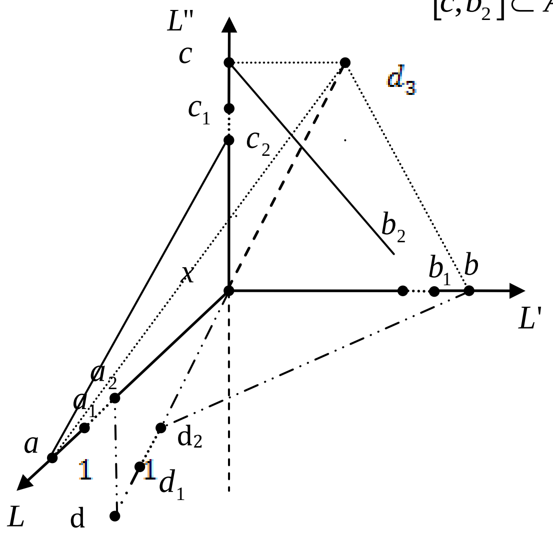
$x\notin l(b,c)\ \&\quad x\notin l(a,c)\ \&$

$x\notin l(a,d)\ \&\ \ x\notin l(b,d)$

ويتم التحقق من ذلك كما ذكرنا في بداية البرهان أنه يتم بطريقة مشابهة لما تم في النظرية (1) من العمل [17].

سنبرهن الآن أن $x\notin l(a,b)$.

إن $x\notin l(a,b)$ لأنه لو تحقق غير ذلك لكان $x\in l(a,b)$ وهذا يعني أن المستقيم $l(a,b)$ المنطبق على المحور xL' يتقاطع مع المجموعة A بالمجموعةB حيث أن:



الشكل (3)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة ③

$B=[a,a_1]\cup[a_2,b_2]\cup[b_1,b]$

وهذه المجموعة ليست محدبة لأننا نستطيع إيجاد النقطتين $y_2\in[b_1,b]\subset B\ \ \&\ y_1\in[a,a_1]\subset B$ بحيث أن $[y_1,y_2]\not\subset B$ وهذا تناقض مع كون المجموعة A محدبة إحداثياً لذلك فإن $x\notin l(a,b)$. وبنفس الطريقة نبرهن أنَّ $x\notin l(a,d)$.

من جهة ثانية:

بما أنّ $x\in \mathrm{int}(A)$ وأن المجموعة A محدودة لأنّها متراصّة فإنّنا نستطيع أن نمدّد القطعة المستقيمة $[d_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على نقطة جبهية d_3 لـ A (الواقعة في الثمن الأول).

نلاحظ أن:

$\begin{cases}[d,d_3]\not\subset A\\ [b,d_3]\not\subset A\end{cases}$ ويتم التحقق من ذلك بطريقة مشابهة لما تم في النظرية (1) من العمل[17].

كما أنّ $[c,d_3]\not\subset A$ لأنّه لو فرضنا أنّ $[c,d_3]\subset A$ لكان محيط المجموعة B التي جبهتها (c,b_2,x,d_3,c) محتوى في A وبما أن المجموعة A محدبة إحداثياً فإن $conv(B)\subset A$ ولكن لدينا مع كون $]c_1,c_2[\not\subset A$ وهذا تناقض بالتالي $]c_1,c_2[\subset conv(B)$ فعلاً. $[c,d_3]\not\subset A$

وبنفس الطريقة يتم البرهان على أن: $[a,d_3]\not\subset A$.

في هذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـA هي d_3 غير مرئية ضمن A من أيٍّ من النقاط a,b,c,d وهذا تناقض مع الفرض (▲) لذلك فإنّ: $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

2- نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على محورين من محاور الجملة $xLL'L''$، والنقطتان الباقيتان تقعان معاً في أحد أثمان الجملة المذكورة مع مراعاة تحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطة: a تقع على المحور xL و b تقع على xL' وحتى تتحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$ يجب أن تقع النقطتان الباقيتان معاً على نفس مستوي النقطتين a,b أي في المستوي xLL' من الربع الثالث منه حتماً ، وبذلك نعود بالدراسة إلى حالة المستوي وهي حالة مدروسة في العمل[15] .

3- نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على محورين من محاور الجملة الإحداثية $xLL'L''$، والنقطتان الباقيتان تقعان في ثمنين مختلفين من أثمان الجملة المذكورة مع مراعاة تحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$.

تتم دراسة هذه الحالة بمناقشة مشابهة لتلك في الحالة (1) مع الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطة aتقع على المحور xL والنقطة b تقع على xL' أما النقطة c فتقع في الثمن الثالث و d في السابع.

4- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$،أما النقاط الثلاثة المتبقية فتتوّزع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة المذكورة مع مراعاة تحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL والنقطة bتقع في الثمن الرابع و c في الثمن الثالث و d في الثمن السابع.

5- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$،أما النقاط الثلاثة المتبقية فتتوّزع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة المذكورة مع مراعاة تحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL والنقطتان b و c تقعان معاً في الثمن الرابع و d في الثمن السابع.

6- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$ ، أما النقاط الثلاثة المتبقية فتقع معاً في أحد أثمان الجملة المذكورة مع تحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$. ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطة a تقع على المحور xL وحتى تتحقق العلاقة $x\in conv\{a,b,c,d\}$ يجب أن تقع النقاط الثلاث b,c,d في نفس المستوي الذي تقع فيه النقطة a وليكن xLL' بحيث تتواجد في الربع الرابع منه،وبذلك نعود بالدراسة إلى حالة المستوي وهي حالة مدروسة في العمل [15] .

7- النقاط a,b,c,d تتوزع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$، بحيث تتحقق العلاقة $x \in conv\{a,b,c,d\}$. ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع في الثمن الأول والنقطة b تقع في الثالث و c في السادس و d في الثمن الثامن.

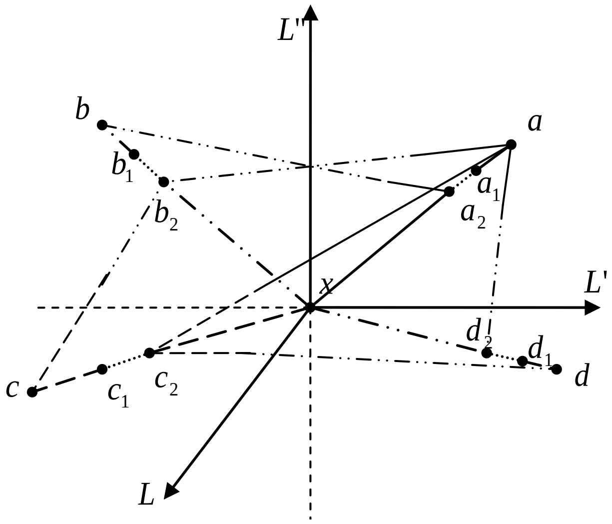
ولدراسة هذه الحالة نميّز ثلاث حالات فرعية:

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن :

$[a,b_2] \subset A \& [a,c_2] \subset A \&$
$[a,d_2] \subset A \& [b,a_2] \subset A \&$
$[c,b_2] \subset A \& [d,c_2] \subset A$

انظر الشكل (4).



الشكل (4)
يمثل المجموعة المبينة في الحالة①

من جهة ثانية:

بما أن :

$[a,d_2] \subset A \& [d_2,x] \subset A \&$
$[x,b_2] \subset A \& [b_2,a] \subset A$

فإن محيط المجموعة B التي جبهتها (a,d_2,x,b_2,a) محتوى في A

وبما أن A محددة إحداثياً فإن $conv(B) \subset A$ ولدينا $]a_1,a_2[\not\subset A$ مع كون $]a_1,a_2[\subset conv(B)$ وهذا تناقض لذلك فإن :

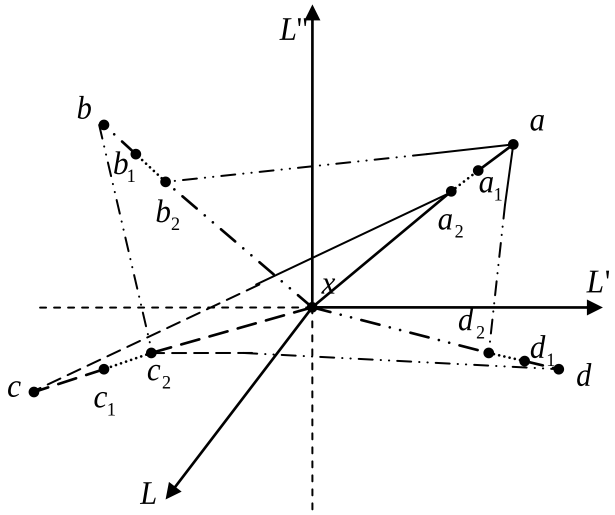
$\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$.

② إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2 .

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$[a,b_2] \subset A \& [a,d_2] \subset A \&$
$[b,c_2] \subset A \& [c,a_2] \subset A \&$
$[d,c_2] \subset A$

انظر الشكل(5).



الشكل (5)
يمثل المجموعة المبينة في الحالة②

من جهة ثانية:

بما أنّ :

$[a,d_2] \subset A \& [d_2,x] \subset A \&$
$[x,b_2] \subset A \& [b_2,a] \subset A$

فإن محيط المجموعة B التي جبهتها (a,d_2,x,b_2,a) محتوى في A وبما أن A محددة إحداثياً فإن $conv(B) \subset A$ ولدينا $]a_1,a_2[\not\subset A$ مع كون

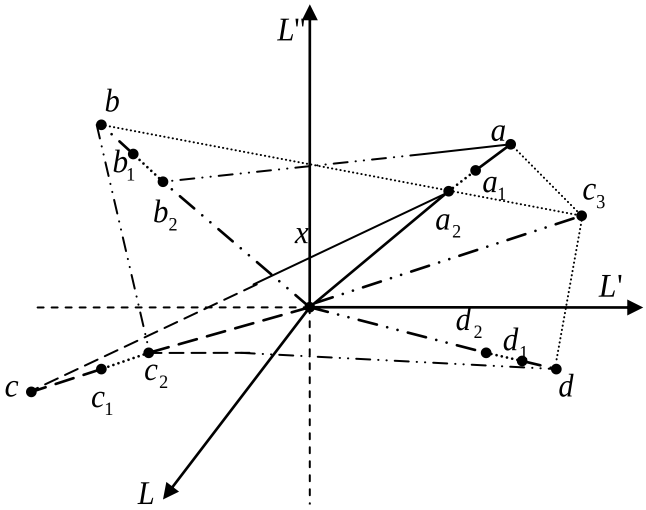
$]a_1, a_2[\subset conv(B)$ وهذا تناقض

لذلك فإنّ: $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$.

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2, b_2, c_2, d_2.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:

$[a,b_2] \subset A \& [b,c_2] \subset A \& [c,a_2] \subset A \& [d,c_2] \subset A$ انظر الشكل(6).



الشكل (6)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة③

عندئذ نجد أنَّ:

$x \notin l(a,b)$ & $x \notin l(b,c)$ &
$x \notin l(c,d)$ & $x \notin l(a,c)$

ويتم التحقق من ذلك كما ذكرنا في بداية البرهان أنه يتم بطريقة مشابهة لما تم في النظرية (1) من العمل[17].

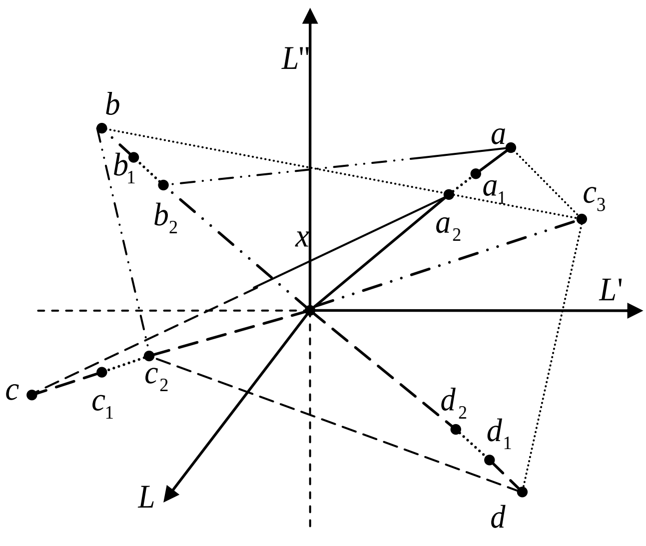
سنبرهن الآن أن $x \notin l(b,d)$.

ومن أجل ذلك سنفرض جدلاً أن $x \in l(b,d)$ (بهذه الحالة تقع النقطة d في الثمن الخامس من الفراغ) انظر الشكل (7).

بما أنّ $x \in \text{int}(A)$ وأن المجموعة A محدودة لأنّها متراصّة فإنّنا نستطيع أن نمدّد القطعة المستقيمة $[c_2, x]$ من جهة x حتى نحصل على نقطة جبهية c_3 لـ A (الواقعة في الثمن الرابع)·

وبمناقشة مشابهة لما تم في الحالة الأولى نلاحظ أن:

$[a,c_3] \not\subset A \& [b,c_3] \not\subset A \&$
$[c,c_3] \not\subset A \& [d,c_3] \not\subset A.$



الشكل (7)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة③ عندما

$x \in l(b,d)$

في هذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـA هي c_3 غير مرئية ضمن A من أيٍّ من النقاط a,b,c,d وهذا تناقض مع الفرض (▲) بالتالي $x \notin l(b,d)$.

وبنفس الطريقة يتم البرهان على أن: $x \notin l(a,d)$.

من جهة ثانية: بالعودة للشكل (6).

بما أنّ $x \in \text{int}(A)$ وأن المجموعة A

محدودة لأنّها متراصّة فإنّنا نستطيع أن نمدّد القطعة المستقيمة $[c_2, x]$ من جهة x حتى نحصل على نقطة جبهية c_3 لـ A (الواقعة في الثمن الرابع) .

وبمناقشة مشابهة لما تم في الحالة الأولى نلاحظ أن:

$$[a,c_3] \not\subset A \,\&\, [b,c_3] \not\subset A \,\&\, [c,c_3] \not\subset A \,\&\, [d,c_3] \not\subset A.$$

في هذه الحالة وجدنا نقطة جبهية لـA هي c_3 غير مرئية ضمن A من أيٍّ من النقاط a,b,c,d وهذا تناقض مع الفرض (▲) لذلك فإنّ: $\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$.

8- النقاط a,b,c,d تتوزع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ ،بحيث تقع ثلاثة نقاط منهم في ثمن واحد معاً والنقطة المتبقية تقع في ثمنٍ مختلف ، مع مراعاة تحقق العلاقة $x \in conv\{a,b,c,d\}$.

تتم دراسة هذه الحالة بطريقة مشابهة لدراسة الحالة (7) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع في الثمن الأول والنقاط b,c,d تقع معاً في الثمن السابع .

9- النقاط a,b,c,d تتوّزع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ ،بحيث تتحقق العلاقة $x \in conv\{a,b,c,d\}$.

تتم دراسة هذه الحالة بطريقة مشابهة لدراسة الحالة (7) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع في الثمن الأول والنقطة b في الثالث أما النقطتين c,d فتقعان معاً في الثمن الثامن .

10- النقاط a,b,c,d تتوّزع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ ،بحيث تتجمع كل نقطتين منها في ثمن بحيث تتحقق العلاقة $x \in conv\{a,b,c,d\}$.

تتم دراسة هذه الحالة بطريقة مشابهة لدراسة الحالة (7) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطتان a,b تقعان معاً في الثمن الأول ،أما النقطتان c,d فتقعان معاً في الثمن السابع .

حالة ❷ $\boxed{x \notin conv\{a,b,c,d\}}$

ضمن هذه الحالة سنميّز عدّة حالات فرعية ، وضمن كلّ هذه الحالات لدينا:

$$x \notin l(a,b) \;\&\; x \notin l(b,c) \;\&\; x \notin l(c,d) \;\&$$
$$x \notin l(a,c) \;\&\; x \notin l(a,d) \;\&\; x \notin l(b,d)$$

1− ثلاث نقاط من النقاط a,b,c,d تقع على محاور الجملة الإحداثية $xLL'L''$ (بحيث تقع كل نقطة على محور) أما النقطة المتبقية فتقع في أحد أثمان الجملة المذكورة بحيث تتحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$. ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ

النقطة a تقع على المحور xL و b على xL' و c على xL'' أما النقطة d فتقع في الثمن الأول.

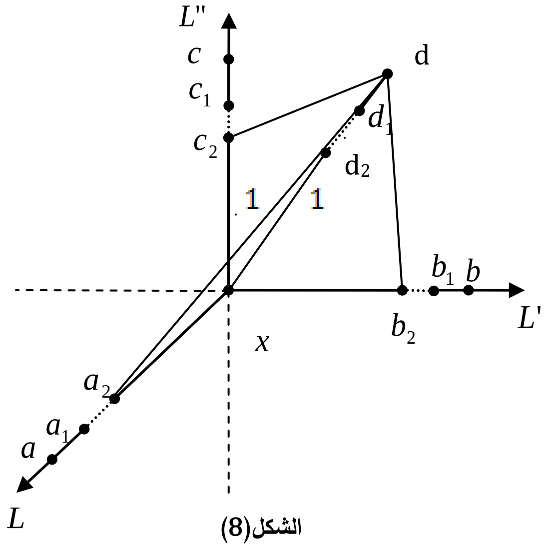
ومن أجل دراسة هذه الحالة نميز ثلاث حالات فرعية:

① إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ :

$[d,a_2]\subset A\&[d,b_2]\subset A\&[d,c_2]\subset A$

انظر الشكل (8).



الشكل(8)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة①

وبما أنّ $[b_2,x]\subset A\&[x,c_2]\subset A$

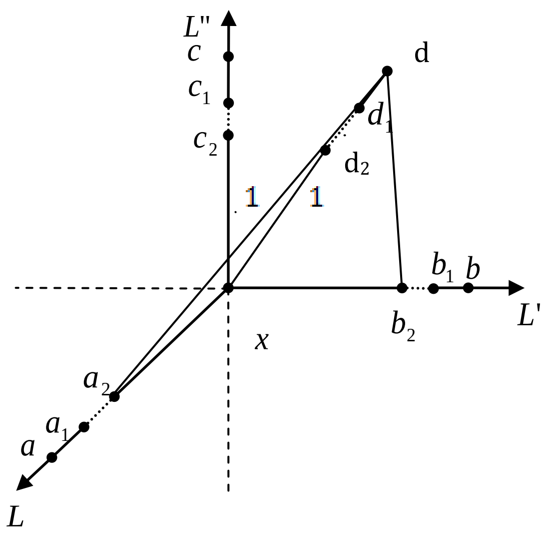
فإن محيط المجموعة التي جبهتها (d,b_2,x,c_2,d) محتوى في A وبما أنّ A محدبة إحداثياً و $]d_1,d_2[\not\subset A$ فإننا نتوصل إلى تناقض لذلك فإنّ: $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

②إحدى النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطتين من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2.

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ :

$[d,a_2]\subset A\&[d,b_2]\subset A$

انظر الشكل (9).



الشكل(9)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة②

وبما أنّ $[b_2,x]\subset A\&[x,a_2]\subset A$

فإن محيط المجموعة التي جبهتها (d,b_2,x,a_2,d) محتوى في A وبما أنّ A محدبة إحداثياً و $]d_1,d_2[\not\subset A$

فإننا نتوصل إلى تناقض لذلك فإنّ:

$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

③ كل نقطة من النقاط a,b,c,d ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط a_2,b_2,c_2,d_2. ولنفرض دون المساس

بعمومية المسألة أن:

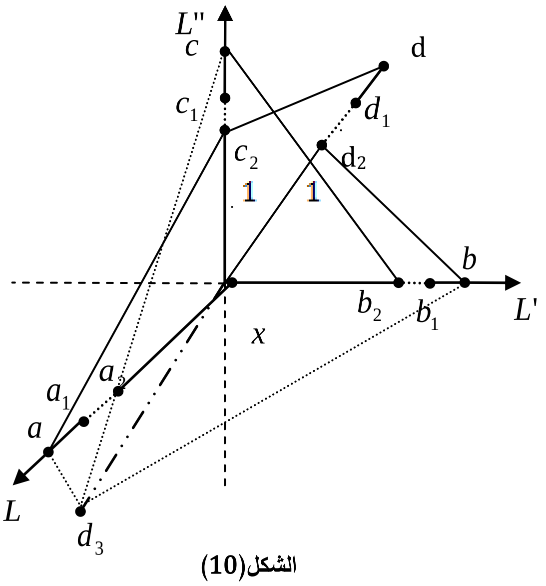
$[a,c_2]\subset A\,\&\,[b,d_2]\subset A\,\&$
$[c,b_2]\subset A\,\&\,[d,c_2]\subset A.$

انظر الشكل(10).

بأسلوب مشابه لما سبق نستطيع أن نمدد القطعة $[d_2,x]$ من جهة x حتى نحصل على نقطة جبهية d_3 (الواقعة في الثمن السابع) لـ A بحيث يكون طول القطعة $[d_2,d_3]$ أعظمياً.

ونلاحظ أنّ النقطة d_3 غير مرئية ضمن A من أيٍّ من النقاط a,b,c,d وهذا تناقض مع الفرض (▲)

لذلك فإنّ $\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.



الشكل(10)

يمثل المجموعة المبينة في الحالة③

2- نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على محورين مختلفين من محاور الجملة $xLL'L''$ والنقطتان الباقيتان تقعان معاً في ثمن واحد من أثمان هذه الجملة مع مراعاة أن $x\notin conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه لدراسة الحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL و b على المحور xL' أماالنقطتان c,d فتقعان معاً في الثمن الأول من أثمان الجملة المذكورة.

3- نقطتان من النقاط a,b,c,d تقعان على محورين مختلفين من محاور الجملة $xLL'L''$ والنقطتان الباقيتان تتوزّعان على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة المذكورة مع مراعاة أن $x\notin conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه لدراسة الحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL و b على المحور xL' والنقطة d تقع في الثمن الأول أما c فتقع في الثمن الثاني من أثمان الجملة المذكورة.

4- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$ ، أما النقاط الثلاث المتبقية فتتوّزع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة المذكورة بحيث تتحقق العلاقة $x\notin conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه لدراسة الحالة (1) مع وضع النقطة a على المحور xL والنقطة b في الثمن الأول أما النقطتان d,c فتقعان معاً في الثمن الثاني من أثمان الجملة المذكورة وذلك دون المساس بعمومية المسألة .

5- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$ ،أما النقاط الثلاث المتبقية فتتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة بحيث تتحقق العلاقة $x\notin conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL والنقطة b في الثمن الأول و c في الثمن الثاني و d في الثمن الثالث..

6- إحدى النقاط a,b,c,d تقع على أحد محاور الجملة $xLL'L''$، أما النقاط الثلاث المتبقية فتتجمّع معاً في أحد أثمان الجملة المذكورة بحيث تتحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$.

إن دراسة هذه الحالة تتم بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ: النقطة a تقع على المحور xL أما النقاط b,c,d فتقع معاً في الثمن الأول .

7- النقاط a,b,c,d تتجمّع معاً في أحد أثمان الجملة $xLL'L''$.

كذلك تتم دراسة هذه الحالة بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقاط a,b,c,d تتجمّع معاًً في الثمن الأول من أثمان هذه الجملة.

8- النقاط a,b,c,d تتوزّع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تقع كل نقطتين معاً في ثمن .مع مراعاة تحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$.

وتتم الدراسة لهذه الحالة بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطتين a,b تقعان معاً في الثمن الأول و النقطتين c,d تقعان في الثمن الثاني من الجملة المذكورة.

9- النقاط a,b,c,d تتوزّع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تقع ثلاثة نقاط منهم معاً في أحد الأثمان مع مراعاة تحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$.

وتتم الدراسة لهذه الحالة بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقاط a,b,c تقع في الثمن الأول معاً أما النقطة d فتقع في الثمن الثاني.

10- النقاط a,b,c,d تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تتحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$.

وتتم الدراسة لهذه الحالة بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطتين a,b تقعان في الثمن الأول معاً أما النقطة c فتقع في الثمن الثاني و d في الثالث.

11- النقاط a,b,c,d تتوزّع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تتحقق العلاقة $x \notin conv\{a,b,c,d\}$.

وتتم الدراسة لهذه الحالة بشكل مشابه للحالة (1) وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقطة a تقع في الثمن الأول والنقطة b في الثاني و d في الثالث و c في الرابع.

ومن مناقشة الحالتين الرئيسيتين ❶ و ❷بجميع حالاتهما الفرعية نجد أنّ: $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ $x \in \text{int}(A)$ نجد أنّ : $\boxed{\text{int}(A) \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ $\boxed{II}$

ومن $\boxed{I}$ و $\boxed{II}$ نجد أنّ: $\boxed{A \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ $\boxed{2}$.

ومن $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أنّ: $\boxed{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ محققة .

وبهذه الحالة وجدنا أن المجموعة A تكتب بشكل اجتماع لأربع مجموعات نجمية هي A_1, A_2, A_3, A_4 بحيث يكون :

$$a \in \ker n(A_1) \,\&\, b \in \ker n(A_2) \,\&\, c \in \ker n(A_3) \,\&\, d \in \ker n(A_4).$$

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلنا إلى إيجاد معيار لكون مجموعة محدبة إحداثياً ومتراصة في R^3 اجتماعاً لأربع مجموعات نجمية، وهدفنا المستقبلي هو تعميم هذا المعيار من أجل خمس مجموعات أو أكثر.

المراجع:

1- BOLTYANSKI,V.G.; SOLTAN,P.S. *Combinotorial Geometry of Classes of Convex Sets* , (in Russian) . Stinica .Kishinev, 1978-279 .

2- KRASNONSEL'SKII , M.A. *Surun critere qu'un domaine soit etoite* , Math .sb.19,61, 1946, 309-310.

3- SOLTAN,V.P . *Introduction to Convexity Theory*(in Russian). Stinica.Kishinev. 1984, 225.

4- ZARIF, A. *About Unions of Starshaped Sets in Normed Space*. (in Russian).Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR. N12, 1990, 35-47.

5- BREEN,M .; ZAMFIRESCU,T-*A. Characterization Theorem for Certain Unions of Two Starshaped Sets in* R^2. Geom.dedic, 22, N1,1987, 95-103.

6- BREEN,M . *Clear Visibility and Unions of Two Starshaped Sets in the Plane* ,Pacific . J. Math ., Vol 115,1989 , 267-275.

7- BREEN, M . *Unions of Three Starshaped Sets in* R^2, *J.of Geometry* , Vol 36, 1991, 8-16.

8- BREEN, M. *Characterizing Compact Unions of Two Starshaped Sets in* R^3 , pacific .J .of Math . . Vol 128, 1987, 63-72.

9- TABALE, A .E .; ZARIF,A. *One Theorem a Starshaped Sets* (in Russian) .Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR. N14, 1994 , 16-20.

10- ZARIF ,A. *Union of Starshaped Sets in Metric Space* (in Russian) . Ezvistia . Akad .Nauk .NSSR . N13, 1991, 20-31.

11- ظريف، عدنان.، أحمد، غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية في* R^2 –مجلة جامعة تشرين– ،المجلد 25، العدد 13– 2003 ، 35–45 .

12- ظريف، عدنان.، أحمد، غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية* (أطروحة ماجستير)– جامعة تشرين– 2003 م.

13- ظريف ، عدنان.، الوسوف ،أحمد .،عفيصة ، براءة. *التحدّب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في* R^2 – مجلة جامعة تشرين–،المجلد 27 ،العدد 1– 2005، 111–138.

14- ظريف ، عدنان.، الوسوف ،أحمد .،عفيصة ، براءة. *العلاقة بين المجموعات المحدّبة إحداثياً والمجموعات النجمية في* R^2 (بحث مقبول للنشر في مجلة بحوث جامعة حلب بتاريخ 2005/10/25م).

15- ظريف، عدنان.، الوسوف،أحمد.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في* R^2 *(أطروحة ماجستير)*–جامعة تشرين– 2006 م.

16-ظريف، عدنان.، محفوض، سهيل.،عفيصة ،براءة. *العلاقة بين المجموعات المحدبة إحداثياً والمجموعات النجمية في* R^3 (بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2008/8/27م).

17-ظريف، عدنان.، محفوض، سهيل.،عفيصة ،براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع ثلاث مجموعات نجمية في* R^3 (بحث قيد النشر في مجلة جامعة البعث).