مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

المسألة الكوانتية لأربع جسيمات في بُعد واحد

الدكتور علي محمد محمود*

(تاريخ الإيداع 13 / 12 / 2009. قُبِل للنشر في 5 / 9 /2010)

□ ملخّص □

اخترنا في هذا البحث كمونات للتأثير المتبادل مناسبة (الكمون الصفري نصف القطر)، تسمح بتحديد مجال استخدام الطرق التقريبية التي تعكس الميزة الرئيسية على نحوٍ كامل لمسألة تشتت أربع بوزونات.

وكذلك قمنا بفصل المتحولات واستخدمنا مؤثر شرودنغر الفعال منوهين إلى عدم استثناء حالة اقتراب الجسيمات الأربع من بعضها على مسافات صغيرة بشكل كاف. تم دراسة الحالات المرتبطة وتشتت أربع بوزونات متطابقة فلاحظنا أن الكمون $v(\rho)$ يتناقص بسرعة كافية، كما أن لتشتت -S النصيب الأكبر في قيمة المقطع العرضي للطاقات المنخفضة. ثم حلت مسألة التشتت هذه عندما تكون المسافة بين أي بوزونين كبيرة والطاقة ε للحركة النسبية صغيرة، أما في حالة ε كبيرة فيمكن استخدام تقريب بورن في حل المسألة. ثم أوجدنا الحل عند الطاقات العالية للحركة النسبية.

الكلمات المفتاحية: مسألة أربع جسيمات، معادلة شرودنغر، بوزونات وحيدات القياس، الكمون ذو المدى الصفري.

*مدرس – قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة التقنية – جامعة تشرين – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

Quantum four-Body Problem in one Dimension

Dr. Ali Mahmoud*

(Received 13 / 12 / 2009. Accepted 5 / 9 /2010)

□ ABSTRACT □

We select in this research a suitable effect-exchanged potential (zero–range potential) that allowed us to define the range of approximately methods that reflect the main criteria of the full problem of scattering bosons.

The variables have been separated and used an effected Schrodinger value regarding not-excluding approximate state for the four-particles from each other for adequate distances.

We studied the related states and scattering the identical four-bosons. We note that the potential $v(\rho)$ decrease with a-none velocity. However s-scattering produce the bigger value in the low-energy cross-section. We solve the mentioned scattering problem when there is a big distance between any two bosons and the energy ε of the relative motion is small.

However, in case the energy ε is big, it is possible to use Born approximate to solve the problem. Finally we find the solution of ultra energy for the relative motion.

Keywords: four-body problem, Schrodinger equation, one-dimensional bosons, zero-range potential.

***Assistant Professor, Department of Basic sciences, Faculty of Technical Engineering, Tishreen University, Tartus, Syria.**

مقدمة:

معروف أن وصف حركة ثلاثة جسيمات أو أكثر تتبادل التأثير فيما بينها هو مسألة صعبة جداً حتى في إطار الميكانيك الكلاسيكي، علماً أن النتائج الفعلية في هذا المجال التي تم الحصول عليها في القرن التاسع عشر تعدُّ حتى الآن قمة النجاح في هذا المجال.

تصبح الحالة أعقد في الميكانيك الكوانتي، إذْ إن مسألة أكثر من جسيمين غير محلولة، لذلك من المفيد الاعتماد على بعض النماذج المحلولة مع اختيار مناسب لكمونات التفاعل التي تسمح بالحصول على حلول دقيقة. لهذا السبب، فهذه النماذج مهمة للدخول في جوهر مسألة تشتت عدة جسيمات، كما تسمح في فهم مميزات وخصائص حركة الجسيمات، وبهذا الشكل تتضح لنا طريقة حل المسألة وتحديد إمكانية استخدام الطرق التقريبية التي تعكس الميزة الرئيسة للمسألة بشكل كامل.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن إيجاد الحل الدقيق للمسألة في حالات خاصة فقط، وذلك عندما يتثنى لنا اختصار عدد درجات الحرية، مستخدمين بذلك مؤثر الكمون أو مؤثر الطاقة (هاملتون) بصفة خاصة.

في المسألة الكلاسيكية لثلاثة جسيمات، معروف ما يسمى بالحلول الخطية لأولر، الموافقة لتوضع ثلاثة جسيمات على مستقيم واحد. المسألة الكوانتية المشابهة التي يتميز فيها هذا الشكل من الحركة تعدُّ المسألة النموذجية لتشتت ثلاثة جسيمات متطابقة ووحيدات القياس، المعالجة في [1-4].

معادلة شرودنغر لهذه الجملة تكتب بالشكل التالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\left(x_1,x_2,x_3\right)\psi=E\psi$$

$$V\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{\alpha\neq\beta}v(x_\alpha-x_\beta),\quad \alpha,\beta=1,2,3$$

حيث x_1,x_2,x_3.إحداثيات الجسيمات وحيدات القياس.

$v(x)-$ كمون التأثير المتبادل الثنائي.

m – كتلة الجسيم.

إذا درسنا حركة مركز الكتل بمفرده، فإن المسألة تقتصر على المستوي $\Lambda:\ x_1+x_2+x_3=0$ فإذا كان الكمون $v(x)$ يتناقص بسرعة، فإن التأثير المتبادل يبدو مركزاً بالقرب من المستويات (الشاشات) $x_\alpha=x_\beta$ التي تقسم المستوي Λ إلى ست قطاعات، علماً أن مثل هذا التبسيط لا يعطي نموذجاً قابلاً للحل حتى للكمونات المتناقصة بسرعة.

ندرس في الورقة العلمية هذه الحالات المرتبطة لمسألة التشتت وتشكل حالات مرتبطة لأربع جسيمات متطابقة وذات بعد واحد. إن معادلة شرودنغر المستقرة الموافقة لهذه الحالة $\psi=\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ تأخذ الشكل:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2}\right]+W\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\psi=E\psi$$

$$-\infty<x_1,x_2,x_3,x_4<\infty \qquad (1)$$

حيث m كتلة كل جسيم و $W(x_1،x_2،x_3،x_4)$ مؤثر التأثير للجسيمات.

بغض النظر عن زيادة عدد الجسيمات بمقدار جسيم واحد في هذه المسألة؛ إن هذه الحالة ليست أكثر صعوبة من حالة ثلاثة جسيمات. وذلك لأنه بعد فصل حركة مركز الكتل في العلاقة (1) الكمون الموافق لأية قيمة $-\infty < a < \infty$ يحقق الشرط:

$$W\left(x_1 + a،x_2 + a،x_3 + a،x_4 + a\right) = W(x_1،x_2،x_3،x_4) \qquad (2)$$

والمستوي غير المحدد $\lambda: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ يتطابق مع الفضاء العادي الثلاثي E_3.

في الإحداثيات النسبية $\xi،\eta$ و ζ التابع الموجي $U(\xi،\eta،\zeta)$ للحركة النسبية أي مجموعة القيم $\psi = \psi(x_1،x_2،x_3،x_4)$ على المستوي غير المحدد Λ' تحقق معادلة شرودنغر ثلاثية الأبعاد لجسيم يقع في حقل خارجي كمونه:

$$.V\left(\xi،\eta،\zeta\right) = W(x_1،x_2،x_3،x_4)$$

بهذا الشكل تتحول مسألة أربع جسيمات إلى مسألة جسيم في حقل كموني $V\left(\xi،\eta،\zeta\right)$.

الفرق الوحيد في خصائص الكمون $\left(\xi،\eta،\zeta\right)$ عن الكمون المستخدم في مسألة تشتت جسيم واحد يكمن عموماً بأن $V\left(\xi،\eta،\zeta\right)$ لا ينتهي إلى الصفر عند اللانهاية. علاوةً على ذلك، وإضافةً إلى التأثيرات المتبادلة الثلاثية والرباعية للجسيمات في مؤثر التأثير المتبادل لأربع جسيمات، يحدث اضطراباً بالقرب من بداية الإحداثيات النسبية في الفضاء ثلاثي الأبعاد. لذلك يمكن إدخال هذه التأثيرات في الحساب عند استخدام الكمون النقطي فقط.

لندرس أبسط الحالات، وذلك عندما يكون الكمون $V\left(\xi،\eta،\zeta\right)$ ناتج عن التأثيرات المتبادلة الرباعية غير الظاهرة لأربع جسيمات. وبالتالي الشرط التالي منطقي:

$$\lim_{\rho\to\infty} V\left(\xi،\eta،\zeta\right) = 0،\ \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \qquad (3)$$

بما أن النظرية الرياضية لمؤثر شرودنغر لجسيم واحد معالجه بشكل جيد [5-7] لذلك ينبغي فقط معالجه بعض النتائج المعروفة انطلاقاً من مسألة أربع جسيمات. بالتفصيل، ومن اجل مسالة التشتت تم تحديد مجموعة توابع موجية محققة لشرط التناظر بالنسبة لتبادل الجسيمات المتطابقة.

كمثال على مسألة أربع جسيمات قابل للحل ندرس حالة كمون نقطي معروف، ويؤدي إلى الشرط الحدي التالي:

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{d}{d\rho}(\rho u) - x_0(\rho u)\right] = 0 \qquad (4)$$

حيث x_0 – بارامتر.

أهمية البحث وأهدافه:

دراسة الحالات المرتبطة لتشتت أربع بوزونات متطابقة وذات بعد واحد، باستخدام كمون متناقص يحقق الشرط (3)، والتابع الموجي في الحركة النسبية يحقق الشرط (4) للوصول إلى حل لمسألة التشتت في حال المسافة بين أي بوزونين كبيرة، وكذلك استخدام تقريب بورن (21) في حال الطاقات العالية لحل المسألة.

طرائق البحث ومواده:

لندرس معادلة شرودنغر (1) ولنفرض أن المؤثر $W(x_1، x_2، x_3، x_4)$ مستمر ومتناظر بالنسبة لكل إحداثياته وأن التابع الموجي يتمتع بالخاصة (4) من أجل $-\infty < a < \infty$ لكي نفصل حركة مركز الكتل ندخل المتغيرات التالية:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ \xi &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ \eta &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ \zeta &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \end{aligned} \qquad (5)$$

هذه المتغيرات تحقق الشرط التالي:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \Delta \qquad (6)$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ مؤثر لابلاس القياسي. ترتبط المتحولات الجديدة مع المتحولات القديمة بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(\xi + \eta + \zeta), \qquad x_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(\xi - \eta - \zeta) \\ x_3 &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(\eta - \xi - \zeta), \qquad x_4 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(\zeta - \xi - \eta) \end{aligned} \qquad (7)$$

أي انه وفق الشرط (2) الكمون w متعلق فقط بالإحداثيات ξ,η و ζ لنعرف المؤثر $V(\xi,\eta,\zeta)$ بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{V(\xi,\eta,\zeta) = W\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta), \frac{1}{2}(\xi-\eta-\zeta), \frac{1}{2}(\eta-\xi-\zeta), \frac{1}{2}(\zeta-\xi-\eta)\right)} \qquad (8)$$

ومن تناظر $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ بالنسبة لكل المتغيرات ينتج:

$$\begin{aligned} V(\xi,\eta,\zeta) &= W\left(\frac{1}{2}(\xi-\eta-\zeta), \frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta),\ \frac{1}{2}(\zeta-\xi-\eta),\ \frac{1}{2}(\eta-\xi-\zeta) \right) = \\ &= W\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta), \frac{1}{2}(\xi-\eta-\zeta),\ \frac{1}{2}(\eta-\xi-\zeta),\ \frac{1}{2}(\eta-\xi-\zeta) \right) = \quad (9) \\ &= V(\eta,\xi,\zeta) \end{aligned}$$

بشكل مشابه نتأكد أن قيمة التابع $V(\xi,\eta,\zeta)$ لا تتغير عند تغيير الإشارة لأي زوج من المتحولات. من جهة أخرى ووفقاً للعلاقة (5) نبادل الإحداثيتين x_1 و x_2 والإحداثيات

$$(X,\xi,\eta,\zeta) \to (X,\xi,-\zeta,-\eta)$$

وبأخذ العلاقة *(8)* بعين الاعتبار نحصل على:

$$(10)\, V(\xi,\eta,\zeta) = V(\xi,-\zeta,-\eta) = V(\xi,\zeta,\eta)$$

بهذا الشكل نجد أن التابع $V(\xi,\eta,\zeta)$ يعتبر متناظراً بالنسبة لـ

$a-$ تبادل الإحداثيات.

$b-$ تغيير الإشارة لأي زوج من الإحداثيات.

المعادلة *(1)* في الإحداثيات الجديدة تأخذ الشكل التالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\left(\xi،\eta،\zeta\right) = E\Psi \qquad (11)$$

المعادلة *(11)* تبين أن المتحول X المرتبط مع حركة مركز الكتل يمكن فصله بسهولة. إن دراسة الحركة النسبية لأربع جسيمات متطابقة وذات بعد واحد تقودنا إلى دراسة الطيف والتوابع الخاصة لمؤثر شرودنغر:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta' + V(\xi,\eta,\zeta), \qquad -\infty < \xi,\eta,\zeta < \infty$$

من أجل جسيم يقع في الحقل $V(\xi,\eta,\zeta)$.

الخاصة المميزة لهذه الحالة، هي أنه عند استخدام معادلة شرودنغر ثلاثية الأبعاد

$$(12) -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(\xi,\eta,\zeta)u = \varepsilon u$$

لوصف الحركة النسبية لأربع جسيمات متطابقة، وإضافةً إلى خاصة التناظر، فإن التابع $V(\xi,\eta,\zeta)$ بشكل عام لا ينتهي إلى الصفر عندما:

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \to \infty$$

مثلاً: ليكن التأثير المتبادل $W(x_1,x_2,x_3,x_4)$ زوجي وجمعي أي أن:

$$W(x_1,x_2,x_3,x_4)=q(x_1-x_2)+q(x_1-x_3)+q(x_1-x_4)+$$
$$+q(x_2-x_3)+q(x_2-x_4)+q(x_3-x_4)$$

وليكن $q(x)$ تابع زوجي مستمر حيث أن:

$$q(x)=q(|x|)\to 0 \quad as \ \ |x|\to\infty$$

إذن عندما $|\xi|\to\infty$ وتثبيت η,ζ في التابع الموافق $V(\xi,\eta,\zeta)$ نحصل على:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} V(\xi,\eta,\zeta)=q(\eta+\zeta)+q(\eta-\zeta) \qquad (13)$$

وعلى الرغم من ذلك الحالة التالية غير مستثناة

$$\lim_{|\rho|\to\infty} V(\xi,\eta,\zeta)=0$$

وهي تنتج عندما تقترب الجسيمات الأربعة من بعضها على مسافات صغيرة على نحوٍ كافٍ، أي تلعب التأثيرات المتبادلة الرباعية الدور الأهم قياساً بالتأثيرات الثلاثية والثنائية.

كمون التأثير المتبادل المتناقص لأربع جسيمات:

في محاكمتنا هذه، سنقتصر لاحقاً على دراسة الحالات المرتبطة وتشتت أربع بوزونات متطابقة. هذا يعني أننا ندرس فقط الحالات التي من أجلها تكون التوابع الموجبة $\Psi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ متناظرة بالنسبة لتبادل كل الإحداثيات x_1,x_2,x_3 و x_4.

إذا أخذنا فقط التأثيرات المتبادلة الرباعية والكمون $V(\xi,\eta,\zeta)$ يسعى إلى الصفر عند اللانهاية، فإن البحث سيقتصر على دراسة مسألة معروفة لمعادلة شرودنغر ذات الكمون المتناقص [5-8] .

لنفرض أن $V(\xi,\eta,\zeta)$ متناظر كروياً، أي أن:

$$V(\xi,\eta,\zeta)=V(\rho), \qquad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$
$$\rho^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$$

في هذه الحالة تتحقق الشروط الحدية الموضوعة على التابع $V(\xi,\eta,\zeta)$ مع شرط التناظر التبادلي بديهياً.

ليكن $V(\rho)$ تابع مستمر، وليكن:

$$V(\rho)\underset{\rho\to\infty}{=}O\left(\rho^{-3-\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon>0$$

عندئذٍ كما هو معروف يمكن للطيف السالب للمعادلة *(9)* أن يكون مؤلفاً من عدد محدود فقط من القيم الخاصة السالبة $\varepsilon_1,\varepsilon_2,........,\varepsilon_n$.

لتكن $u_1, u_2, ..., u_n$ توابع خاصة للجزء الزاوي L^2 من مؤثر لابلاس، فعند إدخال الإحداثيات الكروية التالية:

$$\xi = \rho \cos\varphi \sin\vartheta \ , \quad \eta = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \ , \quad \zeta = \rho \cos\vartheta$$
$$0 \le \rho < \infty \ , \quad 0 \le \varphi < 2\pi \ , \qquad 0 < \vartheta < \pi$$
$$L^2 = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

نلاحظ أن تناظر التوابع الموجية بالنسبة لتبادل الإحداثيات ξ, η, ζ وكذلك بالنسبة لتغيير الإشارة لكل زوج من الإحداثيات يقتصر على التناظر بالنسبة:

$a-$ دوران بزاوية π حول أي محور إحداثي.

$b-$ الانعكاس على المستويات $\xi = \eta, \quad \eta = \zeta, \quad \xi = \zeta$.

التوابع الخاصة المتناظرة كروياً تولد حالات متناظرة بالنسبة لتبادل الإحداثيات، ولكن التوابع الموجبة المحققة للشرط التالي مثلاً:

$$L^2 u = 2u, \qquad L^2 u = 6u$$

لا تولد حالات متناظرة.

نحصل على حالات محققة لشروط التناظر السابقة عندما $l \ge 3$. أما عندما $l = 3$ فإن التوابع الموجبة لهذه الحالات تعطى بالعلاقة التالية:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi\eta\zeta}{\rho^3} x(\rho) \qquad (14)$$

ليكن:

$$V(\rho) = \begin{cases} |V(\rho)| & if \quad V(\rho) < 0 \\ 0 & if \quad V(\rho) \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن العدد n_l للقيمة الخاصة السالبة للجزء القطري لمؤثر شرودنغر ذو الكمون $V(\rho)$ والعدد الكمي المداري l يحقق متراجحة بارغمان:

$$n_l \le \frac{2m}{\hbar^2(2l+1)} \int_0^\infty |V(\rho)| \rho d\rho$$

وهكذا إذا كان:

$$\frac{2m}{7\hbar^2} \int_0^\infty V(\rho) \rho d\rho < 1 \qquad (15)$$

أي من أجل $l \ge 3$ يكون الطيف السالب للمعادلة القطرية غير موجود

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dR}{d\rho} + \left[V(\rho) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m\rho^2}\right] R(\rho) = \varepsilon R(\rho) \qquad (16)$$

بالتالي، إذا تحقق الشرط *(15)*، فإنه من الحالات المرتبطة المشار إليها أعلاه ذات التناظر التبادلي تعدُّ فقط الحالة $S-$ ، أي توجد حالة تناظر كروي.

بالانتقال إلى مسألة التشتت نلاحظ أنه إذا تناقص الكمون $V(\rho)$ بسرعة كافية، وكانت الطاقة ε للحركة النسبية صغيرة نسبياً، فإن الحالات ذوات العزوم الحركية الصغيرة l تقدم المساهمة الأسية في مقطع التشتت.

هذه الحقيقة لاحقاً سنستخدمها في مسألتنا هذه، وهذا يعني أن الحالة $S-$ تقدم النصيب الأكبر في المقطع المتدني الطاقة.

غير أن هذه المحاكمة للحالات المرتبطة تبين أنه لا توجد حدود موافقة لـ $l = 1$ و $l = 2$ عند النشر في سلسة التوابع الموجبة للحركة النسبية للبوزونات وفق التوافق الكروي $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$

عندئذٍ يمكن إيجاد حل مسألة التشتت في حالة الطاقة المنخفضة للحركة النسبية بالطريقة التالية:

ليكن $\Psi_{k\to 0}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ تابع موجي يصف الحركة الحرة لأربع بوزونات ذات الطاقة الكلية E والدفع $\hbar\,\vec{k} = (\hbar k_1\ ,\hbar k_2,\hbar k_3,\hbar k_4)$ وبالتالي:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{k^2} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

للتبسيط ندرس الحالة عندما $_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4$ والتابع $\Psi_{k\to 0}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ يعدُّ انطباقاً متناظراً للأمواج المستوية:

$$\Psi_{k\to 0}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{4!}}\sum_{\pi} e^{i[\pi(k_1)x_1+\pi(k_2)x_2+\pi(k_3)x_3+\pi(k_4)x_4]} \qquad (17)$$

المجموع في *(17)* يؤخذ بجميع التبادل للأعداد الموجبة $\pi(\ _1),\pi(k_2),\pi(k_3),\pi(k_4)$ للأعداد الموجبة $k_1,k_2,k_3,\ and\ k_4$. العلاقة *(17)* يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$\Psi_{k\to 0}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iKX}\mathrm{u}_{x\to 0}(\xi,\eta,\rho) \qquad (18)$$

حيث $K = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ والشعاع $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ يأخذ المركبات

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3 - k_4) \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(k_1 - k_2 - k_3 + k_4) \end{aligned} \qquad (19)$$

أما $\mathrm{u}_{x\to 0}(\xi,\eta,\rho)$ التابع الموجبي للحركة النسبية:

$$\mathrm{u}_{k\to 0}\left(\xi,\eta,\rho\right) = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{4!}}\sum_{\pi} e^{i[\pi(x_1)\xi+\pi(x_2)\eta+\pi(x_3)\zeta]} \qquad (20)$$

حيث المجموع يأخذ بجميع تبادل π وإدخال كل تباديل الإحداثيات (ξ,η,ζ) وكل تغيير الإشارات عند كل زوج من الإحداثيات. فمن أجل أي من هذه التحويلات:

$$\frac{\hbar^2}{2m}[\pi^2(x_1)+\pi^2(x_2)+\pi^2(x_3)]=\frac{\hbar^2}{2m}[x_1^2+x_2^2+x_3^2]=E-\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\varepsilon$$

إذا كانت طاقة الحركة النسبية $\varepsilon=\frac{\hbar^2x^2}{2m}$ قياساً صغيرة عند إدخال الإضراب $V(\rho)$ فإن أية حالة غير مضطربة التي تطابق التابع الموجي المعمم

$$\varphi_{x\to 0}(\vec{\rho})=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e^{i\vec{x}\,\vec{\rho}} \qquad (21)$$

تتحول إلى الحالة التي من أجلها يأخذ التابع الموجي $\varphi_{\vec{x}}\,(\vec{\rho})$ الشكل التالي:

$$\varphi_x\,(\vec{\rho})_{\rho\to\infty}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\left\{e^{i\vec{x}\,\vec{\rho}}+\frac{e^{ix\rho}}{2ix\rho}\left[e^{2i\delta_0(\varepsilon)}-1\right]+\cdots\right\} \qquad (22)$$

حيث $_0(\varepsilon)$ طور التشتت من أجل s – موجة.

نلاحظ أن في *(21)* مهملة ليس فقط الحدود المتناقصة بسرعة أكبر من $1/\rho$ ولكن أيضاً الحدود المطابقة للتوافق الكروي عند نشر سعة التشتت.

بالمطابقة مع *(21)* وَ *(22)* والأخذ بعين الاعتبار عندما $\rho\to\infty$ حل مسألة التشتت المشكل من التابع غير المضرب $\varphi_{x\to 0}(\vec{\rho})$ يأخذ الشكل:

$$u_{\vec{x}}\left(\xi،\eta،\zeta\right)=\mathrm{u}_{x\to 0}\left(\xi،\eta،\zeta\right)+\frac{e^{ix\rho}}{2ix\rho}\left[e^{2i\delta_0(\varepsilon)}-1\right]\frac{\sqrt{4i}}{(2\pi)^3}+\cdots \qquad (23)$$

حيث الحدود المهملة التي تتعلق بطور التشتت $\delta_l\left(\varepsilon\right)$ هي من أجل $l\geq 3$.

النتائج والمناقشة:

وهكذا فإن حل مسألة تشتت أربع بوزونات متطابقة في حال الطاقة ε للحركة النسبية صغيرة نسبياً عندما المسافة بين أي بوزونين تصبح كبيرة يأخذ الشكل:

$$\Psi_{\vec{k}}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right)=\Psi_{k\to 0}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{4!}{(2\pi)^3}}\left[e^{2i\delta_0(\varepsilon)}-1\right]\frac{e^{iKX}}{2ix\sqrt{\sum_{i=1}^4x_i^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4x_i\right)^2}}exp\left\{ix\sqrt{\sum_{i=1}^4x_i^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4x_i\right)^2}\right\} \qquad (24)$$

بصورة مشابهة يمكن إيجاد التابع الموجي الموافق للحالات التي تكون بعض الأعداد الموجية $k_1،k_2،k_3،\,k_4$ متطابقة فيما بينها.

أما في حالة ε كبيرة من المفيد أن نستخدم تقريب بورن و حل مسألة التشتت الناتج عن التابع *(21)* يأخذ الشكل:

$$\varphi_{\vec{x}}(\vec{\rho}\,) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,)^3}\left\{e^{i\vec{x}\,\vec{\rho}} - \frac{e^{i\vec{x}\,\vec{\rho}}}{\rho}\frac{m}{2\pi\hbar^2}V\left(2x\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} \tag{25}$$

حيث:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{x\rho}(\vec{x}\,\vec{\rho})$$

$$\hat{V}(\vec{x}) \equiv V(\vec{x}) = \int\limits_{E_3} d\vec{\rho}\,V(\rho)e^{-i\,\vec{x}\,\vec{\rho}}$$

بصورة مطابقة عند الطاقة العالية للحركة النسبية حل مسألة التشتت لأربع بوزونات يأخذ الشكل:

$$\Psi_{\vec{k}}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right) = \Psi_{k\to 0}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right) -$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{4!}}\frac{e^{iKX}}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2}}exp\left\{ix\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2}\right\}\sum_{\mathcal{P}}\hat{v}\left(2X\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

حيث أن المجموع يؤخذ على كل التباديل للإحداثيات x_4 ،$_1،x_2،x_3$ وكذلك

$$\cos\vartheta = \frac{1}{x\rho}(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 - KX)$$

على سبيل المثال نعالج الحالة الحدية من أجل الكمون الصفري لأربع جسيمات وذلك عندما يقتصر الاضطراب الناتج عن التأثير المتبادل على الشرط الحدي للتابع الموجي $u(\xi،\eta،\zeta)$ في حالة الحركة النسبية [6,7]. هذا الشرط يعطى بالعلاقة (4).

عندما $\chi_0 < 0$ يأخذ مؤثر شرودنغر المعرف بالمعادلة *(12)* وبشرط $V(\rho) = 0$ والشرط الحدي *(4)* قيمة خاصة سالبة واحدة $\varepsilon = \frac{\hbar^2x^2}{2m}$. والتابع الخاص الموافق يأخذ الشكل:

$$u_0\left(\xi،\eta،\zeta\right) = \sqrt{\frac{|x_0|}{2\pi}}\frac{e^{ix_0\rho}}{\rho} \tag{26}$$

وبالمطابقة مع *(24)* الحل الدقيق لمسألة التشتت بوجود مثل التأثير المتبادل هذا هو:

$$\Psi_{\vec{k}}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right) = \Psi_{k\to 0}\left(x_1،x_2،x_3،x_4\right) +$$
$$+\sqrt{\frac{4!}{(2\pi)^3}}\frac{e^{iKX}}{x_0 - ix}\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2}}exp\left\{ix\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2}\right\} \tag{27}$$

نلفت الانتباه إلى أن الحد الأول في الجزء الأول من *(27)* يأخذ الشكل القياسي (العادي) للتابع الخاص في جملة أربع بوزونات متطابقة ولا تتأثر فيما بينها، بينما الحد الثاني لا يبدو هكذا.

الاستنتاجات والتوصيات:

1 – على الرغم من وجود عدد لا بأس به من الأبحاث في مجال تشتت الجسيمات، إلا أن حل المسألة عموماًُ وبدون شروط حدية لأكثر من جسيمين ولا سيما إذا كانت الحركة ليست ذات بعد واحد مازال غير معروف لذلك من المفيد متابعة الدراسة باستخدام كمونات أخرى.

2 – محاولة وضع شروط حدية أخرى للوصول في النهاية إلى الحل العام.

المراجع:

1- БЕРЕЗИН, Ф.А.; ФИНКЕЛЬБЕРГ,В.М. *Уравнение Шредингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием.* Вестник МГУ Россия, №1, сер.мат.мех,1964,с.1-21.

2- БУСЛАЕВ,В.С. *Формула следа и сингулярности матрицы рассеяния для системы трех одномерных частиц. №2, ТМФ* ,1973,с.16 ,247.

3- БУСЛАЕВ,В.С.; МЕРКУРЬЕВ,С.П.; САЛИКОВ,С.П. *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* №9, Проблемы Мат.физики, изд.ЛГУ,1973,с.9-13.

4- KURASOV, P. *Schrodinger Operators, Standard and Nonstandard* .World Scientific, Teaneck, New York, 1989, 166-188.

5- REED, M.; SIMON,B. *Methods of Modern Mathematical Physics*. N3, Scattering Theory .Academic Press, New York, 1979,229-237.

6- ALBEVERIO,S.; HESTEZI,F.; HOGH-KRON, R .; HOLDEN. *Solvable Models in Quantum Mechanics* ,Springer-Verlag, New York, 1988,156-167.

7- ALBEVERIO, S.; KURASOV, P. *Singular Perturbations Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000,145-151.

8- REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics.. N4, Analysis of Operators* ,Academic Press, New York, 1979,93-97.

9- LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Quantum Mechanics* ,Nauka, Moscow, 1989,540.