مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

التحدب الإحداثي واجتماع n مجموعة نجمية في R^3

الدكتور عدنان ظريف*
الدكتور سهيل محفوض **
براءة عفيصة***

(تاريخ الإيداع 24 / 5 / 2010. قُبِل للنشر في 16 / 8 /2010)

□ ملخّص □

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها محدبة إحداثياً إذا وفقط إذا كان تقاطع أيٍّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX, oY, oZ مع المجموعة عبارة عن مجموعة محدبة.ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد أيضاً إنها مجموعة نجميّة إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة على أن تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل x من A واقعة في A (أي إن جميع نقاط المجموعة A تكون مرئية من النقطة a ضمن A) وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجميّة بالنسبة للنقطة a .

في هذا البحث سوف نبرهن النظرية الآتية:

" إذا كانت A مجموعة متراصّة ومحدّبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد عندئذ: تكون المجموعة A اجتماعاً لـ n مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت n نقطة من نقاط A $a_1, a_2, ..., a_n$ على أن تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقلّ".

الكلمات المفتاحية: المجموعة المحدبة، المجموعة المحدبة إحداثياً، المجموعة النجمية، المجموعة المتراصة.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
*** طالبة دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

Coordinate Convexity and Union of (N) Star-Shaped Sets in R^3

Dr. Adnan Zarif *
Dr. Souhail Mahfud**
Bara'a Afisa ***

(Received 24 / 5 / 2010. Accepted 16 / 8 /2010)

□ ABSTRACT □

Let A be a set in R^3. A is called a coordinate convex set if, and only if, any parallel line to any coordinate axes oX ,oY ,oZ was intersected with A is a convex set . A is called a star-shaped set if, and only if, a point existed in A as (a), so that, every line segment[a,x] for all $x \in A$ lies in A (it means every point in A was visible via A from a). In this case, this set is star-shaped, with respect to (a).

In this research we will prove the following theorem:

"If the set A is a compact and coordinate convex set in R^3 then:

The set A is union of (n) star-shaped sets if, and only if, (n) points existed in the set A as $a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$,so that, each boundary point of A will be visible via A from one of the points $a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$ at least.

Key words: convex set, coordinate convex set, star-shaped set, compact set.

*Associate Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Assistant Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة على أن تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل x من A واقعة في A (أي إن جميع نقاط المجموعة A تكون مرئية ضمن A من النقطة a).وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجمية بالنسبة للنقطة a. ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي إنها مجموعة محدبة إذا وفقط إذا كان $[x,y]\subset A$ من أجل كل x,y من A .

كما يقال عن A في نفس الفضاء بأنها مجموعة محدبة إحداثياً إذا وفقط إذا كان تقاطع أيِّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX,oY,oZ مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y ضمن A . رؤية خطية . إذا وفقط إذا كانت $[x,y]\subset A$.

ويقال إن النقطة x ترى النقطة y بوضوح ضمن A إذا وجدت مجاورة لـ y في R^3 مثل N ، لأنَّ النقطة x ترى ضمن A المجموعة $N\cap A$.

إن مسألة إيجاد الشروط اللازمة والكافية لكون مجموعة متراصة ما في الفضاء R^n اجتماعاً منتهياً لمجموعات نجمية، تلعب دوراً في غاية الأهمية في نظرية المجموعات النجمية. وهذا ما جعل كثيراً من الباحثين يهتم بدراستها ،فقد تمت دراسة هذه المسألة في حالات كثيرة في المستوي الإقليدي والفضاء الإقليدي ثلاثي البعد سواءً في حالة المفهوم الخطي للنجمية، أو في حالة المفهوم المتري لها ،وعلى سبيل المثال فالأعمال التالية تدور في فلك هذه المسألة: [1]–[2]–...................–[15]–[16] –[17]– [18]– [19].

ففي المستوي الإقليدي بعد أن توقفت جميع الدراسات عند قيمة عظمى لعدد المجموعات المشكلة للاجتماع وهي ثلاث مجموعات نجمية ، استطعنا إثباتها من أجل اجتماع ثلاث ثم أربع مجموعات نجمية في العمل [13].

أما في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ،تمت مناقشتها في العمل [8]، حيث أثبتت من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين، ولكن بإضافة شرط الرؤية بوضوح بدلاً من الرؤية العادية. أما في حالة الرؤية العادية فتم إيراد مثال يبين عدم تحققها من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين، وذلك في العمل [12] .

ولكننا بعد أن تعاملنا مع صف خاص من المجموعات المتراصة هي المجموعات المتراصة المحدبة إحداثياً تمكنّا من إثباتها من أجل اجتماع مجموعتين نجميتين ثم ثلاث مجموعات نجمية، وذلك في حال الرؤية الخطية في العمل [17]، وكذلك تمكنّا من إثباتها من أجل اجتماع أربع مجموعات نجمية في العمل[18] ثم خمس مجموعات نجمية في العمل [19].

وفي هذا البحث نقوم بتعميم هذه المسألة من أجل أيّ اجتماع منتهي لمجموعات نجمية.

- الرموز التي سنستخدمها في هذا البحث:

1- الرمز $bd(A)$ يعني جبهة A.

2- الرمز $\mathrm{int}(A)$ يعني داخلية A.

3- الرمز $ext(A)$ يعني خارجية A.

4 - الرمز $[a,b]$ يعني القطعة المستقيمة التي طرفاها a,b .

5- الرمز $]a,b[$ يعني القطعة المستقيمة باستثناء طرفيها a,b .

6- الرمز $l(a,b)$ يعني المستقيم المار من النقطتين a,b .

8- الرمز $conv(A)$ يعني الغلاف المحدّب لـA وهو أصغر مجموعة محدّبة تحوي A.

9-الرمز $\ker n(A)$ يعني نواة المجموعة A : وهي مجموعة جميع النقاط من A ، والتي تكون A نجمية بالنسبة لكل منها.

أهمية البحث و أهدافه:

هذا البحث يدرس كيفية كتابة مجموعة محدبة إحداثياً ومتراصة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد على شكل اجتماع منته لمجموعات نجمية .

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم نجمة نقطة أو المجموعة النجميّة بالنسبة لنقطة ما، والمفهوم الخطي للرؤية.

النتائج والمناقشة:

نظرية:

لتكن A مجموعة متراصّة ومحدّبة إحداثياً في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد عندئذ:

تكون المجموعة A اجتماعاً لـ n مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت n نقطة من نقاط A $a_1,a_2,.......,a_n$ بحيث تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A من إحدى النقاط $a_1,a_2,.......,a_n$ على الأقلّ.

البرهان:

للبرهان سنتّبع طريقة الاستقراء الرياضي. ومن أجل ذلك سنبرهن أوّلاً على صحّتها من أجل $n=1$.

برهان لزوم الشرط:

لنفرض أنّ A مجموعة نجمية عندئذ يكون:

$$\exists a\in A \ :[a,x]\subset A \quad ; \quad \forall x\in A \qquad (*)$$.

وبما أنّ $bd(A)\subseteq A$ (لأنّ A مجموعة متراصّة فهي مغلقة) فإنّ العلاقة (*) محقّقة من أجل كلّ نقطة جبهية لـ A . □

برهان كفاية الشرط:

لنفرض وجود نقطة a من A على أن تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A منها (◊).ولنبرهن على أنّ A مجموعة نجمية .

ولذلك يجب أن نبرهن على أنّ $[a,x]\subset A$ وذلك مهما تكن x من A .في الواقع لدينا:

$$\forall x\in A\Rightarrow either \quad x\in bd(A) \quad or \quad x\in \operatorname{int}(A)$$

- إذا كان $x\in bd(A)$ فإنّ $[a,x]\subset A$ محقّق من الفرض(◊).
- إذا كان $x\in \operatorname{int}(A)$ نفرض جدلاً أنّ $[a,x]\not\subset A$ (●) .

بما أن $a\ , x\in A$ & $[a,x]\not\subset A$ فإنه توجد $z\in(\ [a,x]\setminus A)$ وهذا يحتم وجود نقطتين جبهيتين y_1,y_2 لـ A بحيث $y_1,y_2\in[a,x]$. وعندئذ يكون:

$$\exists y_1,y_2\in bd(A)\cap[a,x]:[a,y_1]\subset A\ \&\ [a,y_2]\not\subset A$$

إن $[a,y_2]\not\subset A$ لأن $z\in[a,y_2]$ & $z\notin A$ (لأن $z\in(\ [a,x]\setminus A)$)

وهذا تناقض مع الفرض (◊) كون النقطة y_2 نقطة جبهية وغير مرئية ضمن A من النقطة a ،بالتالي فرضنا(●) خاطئ والصحيح هو أنّ $[a,x]\subset A$ وذلك مهما تكن $x\in\text{int}(A)$.

من الحالتين السابقتين نجد أنّ :

$[a,x]\subset A\ \ ;\forall x\in A$ لذلك فإنّ A مجموعة نجمية بالنسبة لـ a . □

وهذا يعني أنّ القضية المطروحة محقّقة من أجل $n=1$ ، ولنفرض الآن صحّتها من أجل n نقطة ، ولنبرهن صحّتها من أجل $n+1$ نقطة .

برهان لزوم الشرط:

لنفرض أنّ A تكتب بالشكل الآتي : $A=A_1\cup A_2\cup........\cup A_{n+1}$ إذْ إنَّ A_i مجموعة نجمية مهما تكن i إذْ $(i=1,......,n+1)$.

ولتكن x نقطة جبهية كيفية لـA عندئذ يكون $x\in A$ (لأنّ A متراصّة فهي مغلقة بالتالي $bd(A)\subseteq A$) وبالتالي فإنّ $x\in A_1\cup A_2\cup........\cup A_{n+1}$.

إمّا $x\in A_1\cup A_2\cup........\cup A_n$ حيث A_i مجموعات نجمية ($i=\overline{1,n}$). وبما أنّ النظرية محقّقة من أجل n نقطة فهذا يعني أنّه توجد $a_i\in A$ (حيث $i=1,......,n$) بحيث يكون

$[a_i,x]\subset A\ \ ;i=1,.......,n$.

أو $x\in A_{n+1}$ وبما أنّ A_{n+1} مجموعة نجمية فإنّه توجد نقطة $a_{n+1}\in A$ على أن يكون $[a_{n+1},x]\subset A$.

إذاً توجد النقاط $a_1,a_2,.......,a_n,a_{n+1}$ من A على أن تكون النقطة x مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقل . □

برهان كفاية الشرط:

لنفرض أنّه توجد $n+1$ نقطة من نقاط A $a_1,a_2,.......,a_n,a_{n+1}$ بحيث تكون كلّ نقطة جبهية لـA مرئية ضمن A من إحدى هذه النقاط على الأقل (♦) .

ولنضع :

$$A_1:=\{x\in A\ \ :[a_1,x]\subset A\ \}\ \&\ A_2:=\{x\in A\ \ :[a_2,x]\subset A\ \}\ \&......$$
$$.......\&\ A_n:=\{x\in A\ \ :[a_n,x]\subset A\ \}\ \&\ A_{n+1}:=\{x\in A\ \ :[a_{n+1},x]\subset A\ \}.$$

إنّ كلاًّ من المجموعات $A_1,A_2,.......,A_n,A_{n+1}$ نجمية بالنسبة لـ $a_1,a_2,.......,a_n,a_{n+1}$ على الترتيب . انظر العمل [15].

(سأذكر برهان أن A_1 نجمية بالنسبة لـ a_1 كما ورد في العمل [15] .

نلاحظ أنّه بحسب تعريف المجموعة A_1 تكون A_1 مجموعة نجمية بالنسبة لـ a_1 لأنّه أيّاً كانت x من A_1 فإنّ $[a_1,x]\subset A_1$.)

من تعريف المجموعة A_i من أجل كلّ $i=1,......,n+1$ نجد أنّ :

$$\boxed{A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_{n+1} \subset A} \qquad \boxed{1}$$

ولنبرهن الاحتواء المعاكس :

من أجل كلّ x من A فإنّه:

$$either \quad x \in bd(A) \quad or \quad x \in \text{int}(A)$$

– إذا كان $x \in bd(A)$: فبحسب الفرض تكون النقطة x مرئية ضمن A من إحدى النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ على الأقل . وهذا يعني وجود دليل $i_0 \in \{1,......,n+1\}$ بحيث يكون $[a_{i_0}, x] \subset A$ أي إنّ : $x \in A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ وبالتالي فإنّ : $x \in \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$.

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ x من $bd(A)$ نجد أنّ :

$$\boxed{bd(A) \subset A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_{n+1}} \qquad \boxed{\text{I}}$$

– أمّا إذا كان $x \in \text{int}(A)$: فإنّنا نميّز الحالات الخاصّة الآتية :

1)– حالة تطابق $n+1$ نقطة من النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$.

2)– تطابق n نقطة من النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$.

3)– تطابق $n-1$ نقطة من النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$.

....

n)– تطابق نقطتين من النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$.

$n+1$)– كون $x \in \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

بملاحظة أنّ جميع الحالات السابقة هي حالات خاصّة من الفرض أنّ النظرية محقّقة من أجل n نقطة ،لذلك فجميع الحالات السابقة تكون محقّقة بالاستفادة من حالة n نقطة.

والآن سنبرهن النظرية في الحالة العامّة وهي :

$$x \notin \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\} \quad \& \quad a_i \neq a_{i+1} \qquad : i=1,......,n$$

لنرسم مستقيماً مارّاً من x وموازياً لـ oX فيتقاطع هذا المستقيم مع المجموعة A بنقطتين $y_1, y_2 \in bd(A)$ واقعتين أمام وخلف النقطة x على الترتيب .

(وذلك لأنّ $x \in \text{int}(A)$ و A محدودة لأنّها متراصّة).

ثم نرسم مستقيماً موازياً لـ oY ومارّاً من x فنحصل على النقطتين الجبهيتين لـA وهما y_3, y_4 واقعتين على يسار ويمين النقطة x على الترتيب.

ثم نرسم مستقيماً موازياً لـ oZ ومارّاً من x فنحصل على النقطتين الجبهيتين لـA وهما y_5, y_6 واقعتين تحت وفوق النقطة x على الترتيب.

وبما أنّ $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ نقاط جبهية لـA فكلّ نقطة من هذه النقاط ستكون مرئية ضمن A من إحدى النقاط $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ على الأقل ولنفرض أنّ :

$$\boxed{\begin{array}{l}[a_1,y_1]\subset A \ \ \& \ [a_2,y_2]\subset A \ \ \& \ [a_3,y_3]\subset A \ \ \& \ [a_4,y_4]\subset A\& \\ [a_5,y_5]\subset A\& \ [a_6,y_6]\subset A\end{array}} \qquad (\blacktriangle)$$

والآن للدراسة سنفرض جدلاً أنّ x غير مرئية ضمن A من أيّ من النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 لذلك فإنّ:

$$(\star)\ \boxed{x\notin A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6}$$

وهذا يعني أنّ :

$$[a_1,x]\not\subset A \ \& \ [a_2,x]\not\subset A \ \& \ [a_3,x]\not\subset A \ \& \ [a_4,x]\not\subset A\& \ [a_5,x]\not\subset A\& \ [a_6,x]\not\subset A$$

وهذا يعني أيضاً :(تم إيضاح ذلك في الصفحة (4))

$$\begin{array}{lll}\exists b_1,b_2\in bd(A)\cap[a_1,x] & : & [a_1,b_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_1,b_2]\not\subset A\\ \exists c_1,c_2\in bd(A)\cap[a_2,x] & : & [a_2,c_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_2,c_2]\not\subset A\\ \exists d_1,d_2\in bd(A)\cap[a_3,x] & : & [a_3,d_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_3,d_2]\not\subset A\\ \exists e_1,e_2\in bd(A)\cap[a_4,x] & : & [a_4,e_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_4,e_2]\not\subset A\\ \exists f_1,f_2\in bd(A)\cap[a_5,x] & : & [a_5,f_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_5,f_2]\not\subset A\\ \exists j_1,j_2\in bd(A)\cap[a_6,x] & : & [a_6,j_1]\subset A \ \ \& \ \ [a_6,j_2]\not\subset A\end{array}$$

نلاحظ أنّه لا يمكن أن يكون :

$$a_i>y_1 \ \ or \ \ a_i<y_2 \ \ or \ \ a_i>y_3 \ \ or \ \ a_i<y_4 \ or \ \ a_i>y_5 \ \ or \ \ a_i<y_6$$

من أجل كلّ i (حيث $i=1,2,3,4,5,6$) وذلك لأنّ أطوال القطع $[y_1,y_2]$ و $[y_3,y_4]$ و $[y_5,y_6]$ أعظمياً في A .

كما أنّه لا يمكن أن يكون :

$y_2<a_i \ \ or \ \ a_i<y_1$ على المستقيم المار من y_2,y_1

& $y_4<a_i \ \ or \ \ a_i<y_3$ على المستقيم المارّ من y_4,y_3

& $y_6<a_i \ \ or \ \ a_i<y_5$ على المستقيم المارّ من y_5,y_6 .

وذلك لأنّه لو تحقّق عكس الكلام السابق مع تحقّق الفرض ($\star$) سوف تكون

$[y_1,y_2]\not\subset A \ \ \& \ \ [y_3,y_4]\not\subset A\& \ \ \ [y_5,y_6]\not\subset A$ وهذا تناقض مع كون A محدّبة إحداثياً .

ولذلك سوف نناقش توضّع النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 في أثمان الجملة $xLL'L''$ فقط .

وللدراسة سنناقش حالتين رئيسيتين :

❶ $$x\in conv\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\} \qquad (\#)$$

وضمن هذه الحالة سنميّز عدة حالات فرعية وضمن كل حالة من هذه الحالات وبمناقشة مشابهة لما تم في النظرية(1) الواردة في العمل [17] نجد أنّ العلاقات الآتية محققة:

$$\begin{array}{l}x\notin l(a_1,a_2)\ \&\ x\notin l(a_1,a_3)\ \&\ x\notin l(a_1,a_4)\ \&\ x\notin l(a_1,a_5)\ \&\ x\notin l(a_1,a_6)\ \&\\ x\notin l(a_2,a_3)\ \&\ x\notin l(a_2,a_4)\ \&\ x\notin l(a_2,a_5)\ \&\ x\notin l(a_2,a_6)\ \&\ x\notin l(a_3,a_4)\ \&\\ x\notin l(a_3,a_5)\ \&\ x\notin l(a_3,a_6)\ \&\ x\notin l(a_4,a_5)\ \&\ x\notin l(a_4,a_6)\ \&\ x\notin l(a_5,a_6)\end{array}$$

سنورد برهان إحدى هذه العلاقات ولتكن $x\notin l(a_1,a_2)$ المتعلقة بالحالة (1) .

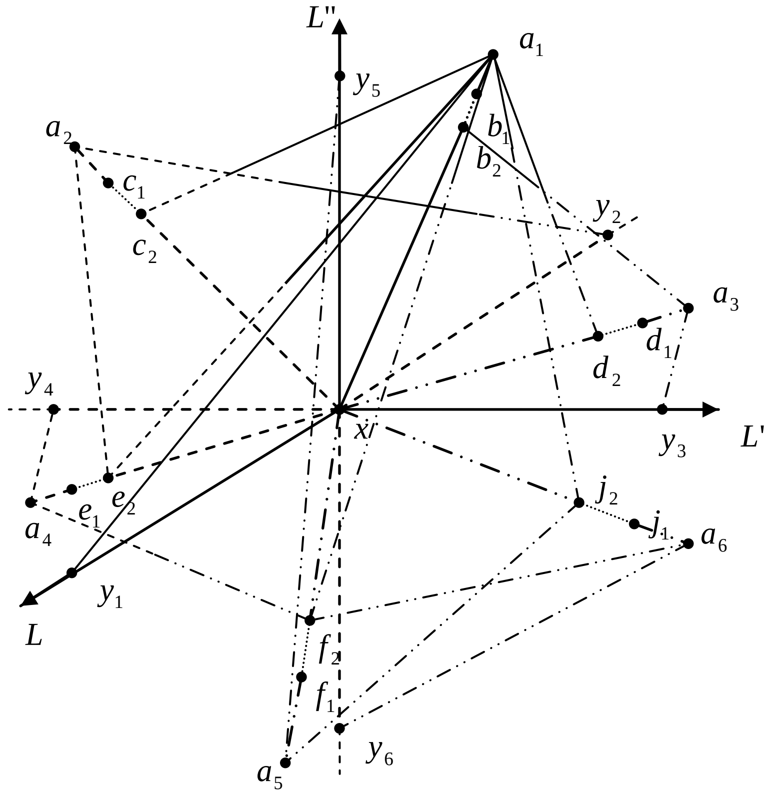
نلاحظ أن $x \notin l(a_1,a_2)$ لأنه لو فرضنا أن $x \in l(a_1,a_2)$ فالنقاط a_1,b_2,x,c_2,a_2 تقع على استقامة واحدة عندئذ يكون $A \supset [a_1,c_2] \supset [a_1,x]$(وذلك من فرضيات الحالة (1)) وبالتالي فإنّ $[a_1,x] \subset A$ وهذا تناقض مع الفرض (✯) لذلك فإنّ : $x \notin l(a_1,a_2)$.

ويتم برهان بقية العلاقات بشكل مشابه لذلك.

1−النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ستة أثمان من أثمان الجملة $xLL'L''$ مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ : النقطة a_1 تقع في الثمن الأول والنقطة a_2 تقع في الثمن الثاني و a_3في الرابع و a_4 في السادس و a_5 في السابع و a_6في الثامن.

وهنا نميّز خمس حالات فرعية :



الشكل (1) يمثل المجموعة المبينة في الحالة①

① إحدى النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 ترى ضمن A خمس نقاط من النقاط b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,j_2

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ:

$$[a_1,c_2]\subset A\&[a_1,d_2]\subset A\&[a_1,e_2]\subset A\&[a_1,f_2]\subset A\&[a_1,j_2]\subset A\&[a_2,e_2]\subset A\&$$
$$[a_3,b_2]\subset A\&[a_4,f_2]\subset A\&[a_5,j_2]\subset A\&[a_6,f_2]\subset A.$$

انظر الشكل (1).

بما أنّ : $[a_1,j_2]\subset A \quad \& \quad [j_2,x]\subset A \quad \& \quad [x,y_1]\subset A \quad \& \quad [y_1,a_1]\subset A$

فإنّ محيط المجموعة B التي جبهتها (a_1,j_2,x,y_1,a_1) محتوى في A وبما أنّ A محدّبة إحداثياً فإنّ $conv(B)\subset A$ ولكن لدينا $]b_1,b_2[\not\subset A$ بالرغم من كون $]b_1,b_2[\subset conv(B)$ فهذا تناقض لذلك فإنّ :

$\boxed{x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6}$.

② إحدى النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 ترى ضمن A أربع نقاط من النقاط b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,j_2.

يمكننا أن نأخذ نفس فرضيات الحالة ① باستثناء $[a_1,e_2]\subset A$ وتتم دراسة هذه الحالة بشكل مشابه للحالة ①.

③ إحدى النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,j_2.

يمكننا أن نأخذ نفس فرضيات الحالة ① باستثناء $[a_1,e_2]\subset A\&[a_1,c_2]\subset A$ وتتم دراستها بشكل مشابه للحالة ①.

④ إحدى النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 ترى ضمن A نقطتين من النقاط b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,j_2.

أيضاً يمكننا أن نأخذ نفس فرضيات الحالة ① باستثناء $[a_1,e_2]\subset A\&[a_1,c_2]\subset A\&[a_1,d_2]\subset A$ وتتم دراستها بشكل مشابه للحالة ①.

⑤ كل نقطة من النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,j_2. مع مراعاة تحقق الفرض (▲).

وكذلك تتم دراسة هذه الحالة بشكل مشابه للحالة ① بأخذ فرضيات مشابهة لما في الحالة ①.

2− النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أن تقع خمس نقاط منها في أحد هاذين الثمنين مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الأول. وبطريقة مشابهة لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة.

3− النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أن تقع أربع نقاط منها في أحد هاذين الثمنين مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة ،وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:النقاط a_1,a_2,a_3,a_4 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ أما النقطتين a_5,a_6 فتقعان معاً في الثمن الأول .

4− النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أن تقع كل ثلاثة نقاط منها في ثمن مختلف مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة ،وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن:النقاط a_1, a_2, a_3 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ أما النقاط a_4, a_5, a_6 فتقع معاً في الثمن الأول.

5- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أن تقع أربع نقاط منها في أحد هذه الأثمان مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة ،وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1, a_2, a_3, a_4 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ والنقطة a_5 تقع في الثمن الأول أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الخامس.

6- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أن تقع ثلاث نقاط منها في أحد هذه الأثمان والنقاط الثلاث الأخرى تتوزع على الثمنين المتبقيين مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة، وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1, a_2, a_3 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ و النقطتان a_4, a_5 تقعان معاً في الثمن الأول أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الثاني.

7- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تقع كل نقطتان في ثمن معاً مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة ،وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتان a_1, a_2 تقعان معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ و النقطتان a_3, a_4 تقعان معاً في الثمن الأول أما النقطتان a_5, a_6 فتقعان معاً في الثمن الثاني.

8- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع ثلاث نقاط منها في أحد هذه الأثمان مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة، وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1, a_2, a_3 تقع معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ والنقطة a_4 تقع في الثمن الأول والنقطة a_5 تقع في الثمن الثاني أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الخامس .

9- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ إذْ تتوزع أربع نقاط منها على ثمنين مختلفين على أنْ تقع كل نقطتين معاً في ثمن مختلف مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة، وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتين a_1, a_2 تقعان معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ ، والنقطتان a_3, a_4 تقعان معاً في الثمن الأول والنقطة a_5 تقع في الثمن الرابع أما النقطة a_6 فتقع في الثمن السادس .

10- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على خمسة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع نقطتين منها معاً في أحد هذه الأثمان مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و (#).

وبشكل مشابه لما تم في الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة ،وذلك بعد الفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتين a_1, a_2 تقعان معاً في الثمن السابع من أثمان الجملة $xLL'L''$ والنقطة a_3 تقع في الثمن الأول والنقطة a_4 تقع في الثمن الرابع و النقطة a_5 تقع في الثمن السادس أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الثامن.

❷ حالة $\boxed{x \notin conv\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}}$ (#)'

وضمن هذه الحالة سنميّز عدة حالات فرعية وضمن كل حالة من هذه الحالات نجد أنّ العلاقات الآتية محققة:

$$x \notin l(a_1,a_2)\ \&\ x \notin l(a_1,a_3)\ \&\ x \notin l(a_1,a_4)\ \&\ x \notin l(a_1,a_5)\ \&\ x \notin l(a_1,a_6)\ \&$$
$$x \notin l(a_2,a_3)\ \&\ x \notin l(a_2,a_4)\ \&\ x \notin l(a_2,a_5)\ \&\ x \notin l(a_2,a_6)\ \&\ x \notin l(a_3,a_4)\ \&$$
$$x \notin l(a_3,a_5)\ \&\ x \notin l(a_3,a_6)\ \&\ x \notin l(a_4,a_5)\ \&\ x \notin l(a_4,a_6)\ \&\ x \notin l(a_5,a_6)$$

1–النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على ستة أثمان من أثمان الجملة $xLL'L''$ مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ :

النقطة a_1 تقع في الثمن الأول والنقطة a_2 تقع في الثمن الثاني و a_3 في الثالث و a_4 في الرابع و a_5 في الخامس و a_6 في الثامن.

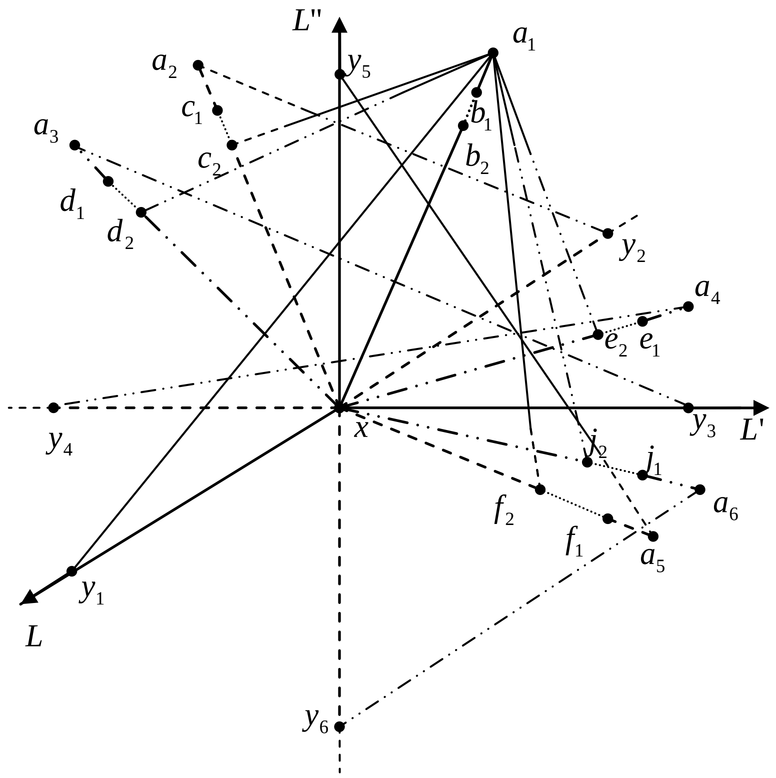
وهنا نميّز خمس حالات فرعية :

① إحدى النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ترى ضمن A خمس نقاط من النقاط $b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, j_2$

ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أنّ:

$$[a_1, c_2] \subset A \& [a_1, d_2] \subset A \& [a_1, e_2] \subset A \& [a_1, f_2] \subset A \& [a_1, j_2] \subset A.$$

انظر الشكل (2).



الشكل(2) يمثل المجموعة المبينة في الحالة①

بما أنّ : $[a_1, f_2] \subset A \quad \& \quad [f_2, x] \subset A \quad \& \quad [x, y_1] \subset A \quad \& \quad [y_1, a_1] \subset A$

فإنّ محيط المجموعة B التي جبهتها (a_1, f_2, x, y_1, a_1) محتوى في A وبما أنّ A محدّبة إحداثياً فإنّ $conv(B) \subset A$ ولكن لدينا $]b_1, b_2[\not\subset A$ بالرغم من كون $]b_1, b_2[\subset conv(B)$ فهذا تناقض لذلك فإنّ :

$\boxed{x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6}$.

② إحدى النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ترى ضمن A أربع نقاط من النقاط $b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, j_2$.

تتم دراسة هذه الحالة بشكل مشابه للحالة ① بأخذ نفس فرضياتها باستثناء $[a_1, d_2] \subset A$.

③ إحدى النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ترى ضمن A ثلاث نقاط من النقاط $b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, j_2$.

يمكننا أن نأخذ نفس فرضيات الحالة ① باستثناء $[a_1, e_2] \subset A \& [a_1, d_2] \subset A$ وتتم دراستها بشكل مشابه للحالة ①.

④ إحدى النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ترى ضمن A نقطتين من النقاط $b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, j_2$. تتم دراسة هذه الحالة بأخذ فرضيات مشابهة للحالة ① مع مراعاة أن إحدى النقاط ترى نقطتين فقط .

⑤ كل نقطة من النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ترى ضمن A نقطة واحدة من النقاط $b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, j_2$. وكذلك تتم دراسة هذه الحالة بشكل مشابه للحالة ① مع مراعاة فرضيات هذه الحالة (وهي أن كل نقطة ترى نقطة واحدة).

2- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتجمع معاً في أحد أثمان الجملة $xLL'L''$ مع مراعاة تحقق الشرط (▲).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتجمع معاً في الثمن الأول، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

3- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع خمس نقاط منها في ثمن معاً مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

وللدراسة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 تقع معاً في الثمن الأول أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الثاني،وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

4- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع أربع نقاط منها معاً في أحد هذين الثمنين مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3,a_4 تقع معاً في الثمن الأول أما النقطتين a_5,a_6 فتقعان معاً في الثمن الثاني، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

5- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثمنين مختلفين أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع كل ثلاثة نقاط منها معاً في ثمن من هذين الثمنين مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3 تقع معاً في الثمن الأول أما النقاط a_4,a_5,a_6 فتقع معاً في الثمن الثاني، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

6- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ بحيث تقع أربع نقاط منها معاً في أحد هذه الأثمان، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3,a_4 تقع معاً في الثمن الأول والنقطة a_5 تقع في الثمن الثاني أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الثالث، وعلى نحوٍ مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

7- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع ثلاث نقاط منها معاً في أحد هذه الأثمان، أما النقاط الثلاث المتبقية فتتوزع على الثمنين الباقيين ، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1,a_2,a_3 تقع معاً في الثمن الأول والنقطتان a_4,a_5 تقعان معاً في الثمن الثاني أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الثالث، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة .

8- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على ثلاثة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع كل نقطتين منها في ثمن معاً من هذه الأثمان ، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتين a_1,a_2 تقعان معاً في الثمن الأول والنقطتين a_3,a_4 تقعان معاً في الثمن الثاني أما النقطتين a_5,a_6 فتقعان معاً في الثمن الثالث، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة.

9- النقاط a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 تتوزّع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع ثلاث نقاط منها في أحد هذه الأثمان معاً، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقاط a_1, a_2, a_3 تقع معاً في الثمن الأول والنقطة a_4 تقع في الثمن الثاني والنقطة a_5 تقع في الثمن الثالث أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الرابع، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة.

10- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على أربعة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تتوزع أربع نقاط منها على ثمنين مختلفين من هذه الأثمان حيث كل نقطتين في ثمن، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتين a_1, a_2 تقعان معاً في الثمن الأول والنقطتان a_3, a_4 تقعان معاً في الثمن الثاني والنقطة a_5 تقع في الثمن الثالث أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الرابع، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة.

11- النقاط $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ تتوزّع على خمسة أثمان مختلفة من أثمان الجملة $xLL'L''$ على أنْ تقع نقطتان منها معاً في أحد هذه الأثمان، مع مراعاة تحقق الشرطين (▲) و '(#).

ولدراسة هذه الحالة سنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطتين a_1, a_2 تقعان معاً في الثمن الأول والنقطة a_3 تقع في الثمن الثاني والنقطة a_4 تقع في الثمن الثالث والنقطة a_5 تقع في الثمن الرابع أما النقطة a_6 فتقع في الثمن الخامس، وبشكل مشابه لدراسة الحالة الأولى تتم دراسة هذه الحالة.

مما سبق نلاحظ أنّ كلّتا الحالتين الرئيسيتين ❶و❷ بجميع حالاتهما الفرعية اقتضت تحقّق العلاقة: $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ وهذا يعني أنّ:

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots\dots \cup A_{n+1}$$

أي إنّ: $$x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots\dots \cup A_{n+1}$$

وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x من $\operatorname{int}(A)$ نجد أنّ :

$$\boxed{\operatorname{int}(A) \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots\dots \cup A_{n+1}} \qquad \boxed{\text{II}}$$

من العلاقتين $\boxed{\text{I}}$ و$\boxed{\text{II}}$ نستنتج أنّ :

$$\boxed{A \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots\dots \cup A_{n+1}} \qquad \boxed{2}$$

ومن العلاقتين $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أنّ :

$$\boxed{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots\dots \cup A_{n+1}} \quad .$$

وهذا يعني أنّ A تكتب بشكل اجتماع لـ$n+1$ مجموعة نجمية هي $A_1, A_2, A_3, \dots\dots, A_{n+1}$ بحيث يكون:

$$a_i \in \ker n(A_i) \qquad : \; i = \overline{1, n+1} \quad .$$

وبذلك نجد أنّ النظرية محققّة من أجل أيّ عدد طبيعي منته n . □

ملاحظة:

لقد تمت مناقشة النظرية السابقة من أجل أي عدد طبيعي $n \le 4$ بأسلوب مختلف في الأعمال [17]- [18]-[19].

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلنا إلى إيجاد معيار لكون مجموعة محدبة إحداثياً ومتراصة في R^3 اجتماعاً منتهياً لمجموعات نجمية، وهدفنا المستقبلي هو دراسة بعض التطبيقات العملية لنظرية المجموعات النجمية.

المراجع:

1- BOLTYANSKI,V.G.; SOLTAN, P.S. *Combinotorial Geometry of Classes of Convex Sets* , (in Russian) . Stinica . Kishinev,1978-279 .

2- BREEN, M .; ZAMFIRESCU,T. *A Characterization Theorem for Certain Unions of Two Starshaped Sets in R^2*.1987, Geom. dedic, 22, N1, 95-103.

3- BREEN, M . *Clear Visibility and Unions of Two Starshaped Sets in the Plane* ,Pacific . J. Math ., Vol 115.1989 , 267-275.

4- BREEN, M. *Unions of Three Starshaped Sets in R^2, J.of Geometry* , Vol, 1991, 36, 8-16.

5- BREEN, M, *Characterizing Compact Unions of Two Starshaped Sets in R^3* , pacific .J. of Math . . Vol, 1987,128, 63-72.

6 – KRASNONSEL'SKII , M.A. *Sur un critere qu'un domaine soit etope* , Math . sb.19, 61, 1946, 309-310.

7 – SOLTAN, V.P. *Introduction to Convexity Theory* (in Russian). Stinica. Kishinev. 1984, 225.

8- TABALE, A .E . ZARIF, A. *One Theorem a Starshaped Sets* (in Russian) .Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR, N14, 1994 , 16-20.

9- ZARIF, A. *Union of Starshaped Sets in Metric Space* (in Russian) . Ezvistia . Akad . Nauk . NSSR , N13, 1991, 20-31.

10 – ZARIF, A. *About Unions of Starshaped Sets in Normed Space*. (in Russian). Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR, N12, 1990, 35-47.

11- ظريف، عدنان.، أحمد، غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية في R^2*-مجلة جامعة تشرين- ،المجلد 25 ،العدد 13- 2003 . 35-45 .

12- ظريف، عدنان.، أحمد،غياث.، حسن، نجود. *الاجتماع المنتهي للمجموعات النجمية* (أطروحة ماجستير) -جامعة تشرين- 2003 م.

13- ظريف، عدنان.، الوسوف،أحمد.، عفيصة، براءة. *التحدّب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في R^2* -مجلة جامعة تشرين-، المجلد 27 ، العدد 1-2005، 111-138.

14- ظريف، عدنان.، الوسوف، أحمد.،عفيصة، براءة. *العلاقة بين المجموعات المحدّبة إحداثياً والمجموعات النجمية في R^2* (بحث مقبول للنشر في مجلة بحوث جامعة حلب بتاريخ 2005/10/25م).

15- ظريف، عدنان.، الوسوف،أحمد.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في R^2* *(أطروحة ماجستير)*- جامعة تشرين- 2006 م.

16-ظريف، عدنان.، محفوض، سهيل.،عفيصة، براءة.*العلاقة بين المجموعات المحدبة إحداثياً والمجموعات النجمية في R^3* (بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2008/8/27م).

17- ظريف، عدنان.، محفوض، سهيل.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع ثلاث مجموعات نجمية في* R^3 (بحث مشارك في المؤتمر الدولي الأول للرياضيات المقام في كلية العلوم بجامعة البعث بتاريخ 14-2008/10/16م ومقبول للنشر في مجلة جامعة البعث بتاريخ 2009/11/10م).

18- ظريف، عدنان.، محفوض، سهيل.،عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع أربع مجموعات نجمية في* R^3 (بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2009/11/23م).

19- ظريف، عدنان .، محفوض، سهيل.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع خمس مجموعات نجمية في* R^3 (بحث مشارك في المؤتمر الدولي الأول للرياضيات المنعقد في كلية العلوم بجامعة دمشق بتاريخ 4-2009/11/5م).