مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

زمرة البيان التام الموجه الدوري من المرتبة p^n حيث p أولى و n صحيح موجب

الدكتور أسكندر علي*

(تاريخ الإيداع 23 / 1 / 2011. قُبِل للنشر في 28 / 3 / 2011)

□ ملخّص □

سنجد في هذا البحث أن زمرة الأوتومورفيزم للبيان التام الموجه الدوري ألتربيعي تساوي الزمرة *نصف الخطية* $L(n, p)$ *الجزئية في الزمرة الخطية العامة* $GL(n, p)$ *وذلك بالاعتماد على نظرية* الزمر البدائية القابلة للحل في زمرة التباديل وعلى الزمر الجزئية البدائية القابلة للحل العظمى في الزمرة الخطية العامة GL(n ,p).

الكلمات مفتاحية: زمرة بدائية، بيان تام موجه، بيان تام موجه دوري.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

Cyclotomic Tournament of Order p^n, Where p Is a Prime & n Is an Integer

Dr. Eskander Ali*

(Received 23/1/2011. Accepted 28/3/2011)

□ ABSTRACT □

In this paper, we will prove that the group of cyclotomic tournament is equal to semilinear subgroup of general linear group GL(n, p). However, we have used the theory of permutation groups and maximal solvable irreducible subgroup of general linear group GL(n, p).

Keywords: Primitive Group, Tournament, Cyclotomic Tournament.

***Professor; Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tishreen; Lattakia, Syria.**

مقدمة:

سأدرس في هذه المقالة بناء البيانات التامة الموجهة الدورية بشكل عام، ومن ثم أبحث عن زمرة الأوتومورفيزم الموافقة لهذه البيانات، إذ إنّ تصنيف البيانات باستخدام الخوارزميات مسألة تملك درجة تعقيد عالية)أي أنها خوارزميات غير فعالة) لذلك ظهرت مسألة تصنيف البيانات من خلال تصنيف زمرها (من وجهة نظر الأيزومورفيزم) وكما هو معروف فإن نظرية تصنيف الزمر متقدمة وبالتالي هي أداة مساعدة في تصنيف البيانات التامة الموجهة وفق صفوف متماثلة ويتم ذلك وفق الخطوات الآتية:

1) يتم بناء البيان التام الموجه الدوري بواسطة مجموعة جزئية من عقد البيان.
2) ثم يتم بناء زمرة الأوتومورفيزم الموافقة لهذا البيان.
3) نعتبر جميع البيانات التامة الموجهة المتماثلة (الأيزومورفيه) فيما بينها صفا واحدا .

ومما هو جدير بالذكر أن Annie Astie درست بناء البيانات التامة الموجهة المتعدية والتي تملك زمرة أوتومورفيزم بحيث إن عدد مداراتها على مجموعة الأضلاع للبيان أصغري [1]

كما حدد Dixon J.D الرتبة العظمى لزمرة البيان التام الموجه في [2]

واضح أن عدد مدارات الزمرة على مجموعة أضلاع البيان التام الموجه يعتمد على مرتبة (rank) هذه الزمرة. لذلك يوجد عمل على التوازي بين نظرية الزمر ونظرية البيان في موضوع الزمر ذوات مراتب صغرى وتقدم أي من الفرعين يساعد في تقدم الأخر.

أهمية البحث وأهدافه:

إن أهمية البحث تكمن في تصنيف البيانات التامة الموجهة من خلال استخدام زمرة الأوتومورفيزم ومعلوم أن نظرية الزمر متقدمة على نظرية البيانات وتقدم أي من ا لموضوعين يغني الآخر .

طرائق البحث ومواده:

استخدمت المقالات ذات الصلة والمراجع الملائمة .

<u>تعريف [3]</u>: يسمى البيان الذي يوجد بين كل عقدتين مختلفتين فيه وصلة موجهة واحدة فقط ببيان تام موجه (tournament) .

نرمز للبيان التام الموجه بالرمز $T = (V, U)$ حيث V مجموعة عقد T (vertex) وأما U فهي مجموعة وصلاته الموجهة (arcs). إذا كانت x، y عقدتين من V سنرمز للضلع (arc) الموجه من العقدة x إلى العقدة y بالرمز (x,y) ونعبر عن ذلك بأن:

$$(x ,y) \in U$$

<u>تعريف:</u>

نعرف زمرة الأوتومورفيزم للبيان التام الموجه T بأنها مجموعة التباديل f من الزمرة المتناظرة sym (V) والتي تحافظ على تجاور (dominate) أضلاع البيان التام الموجه T.

ونرمز لزمرة الأوتومورفيزم لـ T بالرمز Aut (T) وهى تحقق العلاقة الآتية:

$$\forall f \in Aut(T), \forall (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U$$

معلوم من [3] أن الشرط اللازم الكافي لكي يوجد من أجل زمرة مجرده H بيان تام موجه T بحيث إن $Aut(T) \cong H$ هو أن تكون رتبة H عدداً فردياً (أي أن |H| فردي)

وعليه فإن Aut (T) زمرة قابلة للحل (Solvable) بحسب نظرية (Feit- Thompson) [4]. ومعلوم أيضاً من[5] أنه إذا كانت زمرة البيان التام الموجه T بدائية (primitive) فإن عدد عقده يساوي p^n حيث p أولي و n صحيح موجب.

تعريف:

لنأخذ الزمرة الجدائية $GF^*(P^n)$ في الحقل $GF(P^n)$ ثم لنقسم العدد P^n-1 على العامل 2 عدداً من المرات$v(p^n-1)$ حتى نحصل على ناتج قسمة فردي عندئذٍ يكون:

$$p^n-1 = 2^{v(pn-1)}h \qquad \text{(حيث h عدد فردي)}$$

ولنأخذ الزمرة الجزئية H من $GF^*(p^n)$التي رتبتها h، ثم نشكل زمرة القسمة $GF^*(p^n)/H$ والتي تحوي $2^{v(pn-1)}$ صفاً مجاوراً للزمرة H.

ندعو بالتعريف هذه الصفوف بالصفوف الدورية في الحقل $GF(p^n)$.

يمكننا تجزئة الزمرة الجدائية $GF^*(p^n)$ إلى k صف دوري حيث $(2^{v(pn-1)}) \frac{1}{2} = k$.

واضح أن $xH \neq -xH$ لكل $x \in GF(p^n)$.

وبما أن رتبة H عدد فردي أعظمي، إذن تكون H من الشكل:

$$H = \langle a^{2v(pn-1)} a : a \neq 0 \in GF(P^n) \rangle$$

وهذا يعني أن:

$$GF^*(p^n) = x_1H \cup (-x_1)H \cup \ldots\ldots \cup x_k H \cup (-x_k)H$$

حيث $k = 2^{v(Pn-1)} - 1$

تعريف [1]:

البيان التام الموجه الدوري هو بيان معّرف بواسطة الزمرة:

$$H = \langle a^{2v(pn-1)} : 0 \neq a \in GF(p^n) \rangle$$

كما يلي:

$$T = (X, U): \begin{cases} X = GF(p^n) \\ (x, y) \in U \Leftrightarrow y - x \in S = \cup^{k} \varepsilon_i x_i H \end{cases}$$

حيث إن $\varepsilon_i = \pm 1$ لكل $i = 1.2 \ldots\ldots, k$

نلاحظ أن S هي اجتماع k صف دوري يتم اختيارهم من 2k صف دوري في $GF^*(p^n)$، بحيث إذا تمّ اختيار xH في S فلا يدخل الصف الدوري H(x -) في S والعكس صحيح.

تعريف [1]:

ليكن p عدداً أولياً فردياً وليكن V فضاء متجهات عدد أبعاده n على الحقل GF (p) ولتكن S مجموعة جزئية في V، ولنكتب $^-S = \{ ^-v ; v \in S \}$ عندئذ نقول إن المجموعة S تعرّف البيان التام الموجه T إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

(1) $^-S \cap S = \varnothing$

(2) $S \cup {^-S} = V \setminus \{o\}$

(3) لكل زوج $u, v \in V$ فإن الشرط اللازم الكافي لكي يكون (u , v) ضلعاً في T هو أن يكون $v - u \in S$.

عندئذٍ نعّبر عن البيان التام الموجه T المعّرف بالمجموعة S والتي تحقق (3) ,(2) ,(1) بالشكل:

$$T = T (S)$$

فإذا رمزنا لزمرة الانسحابات المتوازية على الفضاء V بالرمز $F = \{ x \rightarrow x + a : x, a \in V \}$

فنجد بسهولة أن $F \subseteq Aut\ T (S)$:

إذا كان $f : x \rightarrow x + a$ عنصراً اختيارياً من F وإذا كان (u , v) ضلعاً في T (S) فإن $v- u \in S$ (بحسب التعريف).

ومن جهة ثانية نجد أن:

$$f (v) – f (u) = (v + a) – (u + a) = v – u \in S$$

أي أن (f (u) , f (v)) ضلع فيT (S).

وهذا يعني أن f يحافظ على تجاور الأضلاع في T (S) وبالتالي فإن $f \in Aut\ T (S)$.

ننظر الآن إلى حقل جالوا $GF (p^n)$ بوصفه توسيعاً يسيراً للحقل G F (p)، وهذا يعني أنه يوجد عنصر ω بدائي (primitive) من $G F (p^n) \setminus G F (p)$، بحيث إن ω جذر بدائي لكثيرة الحدود $x^{p^n} -1$ المعرفة على GF(p)، وبالتالي يمكن اعتبار $G F (p^n)$ فضاء متجهات معرّفاً الحقل GF (p) بحيث إن:

$\{ 1, \omega , \omega^2 , …., \omega^{pn-1} \}$ قاعدة للفضاء $GF (p^n)$ على الحقل GF (P).

وهذا يعني أن $\dim GF (p^n) = n$.

البيان التام الموجه الدوري ألتربيعي:

لنأخذ في الفضاء $GF (p^n)$ المجموعة الآتية:

$$S = \{ \omega^2, \omega^4 , \omega^6 , …..\omega^{pn-1} = 1 \}.$$

فنجد أن S زمرة جزئية في $GF^* (p^n)$.

من الشكل $S = <\omega^2>$ حيث ω هو احد الجذور البدائية في $GF (p^n)$.

لكي تعّرف S بيانياً تاماً موجها T يجب أن تحقق الشروط (3) , (2) ,(1) الأنفة الذكر. ولتحقق الشرط $^-S \cap S = \varnothing$ نجد في الزمرة العاملة $GF^* (p^n) / <\omega^2>$ أن تقاطع الصفين –S, S يكون خاليا عندما يكون: الممثل (-1) من الشكل ω^h حيث h فردي

وبالتالي يجب أن يكون $\omega^h = \omega^{\frac{p^n-1}{2}}$

وعليه فإن $\frac{p^n-1}{2} = 2\ell + 1$ حيث ℓ صحيح موجب وعليه فإن $p^n \equiv 3 \pmod 4$. وينتج من ذلك أن n عدد صحيح موجب فردي.

نرمز الآن لزمرة جميع التباديل على $GF(p^n)$ والتي عناصرها من الشكل الآتي:

$$\{x \to \omega^2 \sigma(x) + b \,;\, b, x \in GF(p^n), \sigma \in \mathrm{Aut}\, GF(p^n)\}$$

بالرمز $L(n, p)$.

ولنرمز للزمرة الجزئية في $L(n, p)$ المثبتة للصفر بالرمز $L_0(n, p)$، أي أن:

$$L_0(n, p) = \{x \to \omega^2 \sigma(x) \,;\, x \in GF(p^n), \sigma \in \mathrm{Aut}\, GF(p^n)\}$$

لقد برهن الباحث D.s. Passman في [6] النظرية الآتية:

نظرية (1):

لتكن G زمرة جزئية قابلة للحل (solvable) في الزمرة الخطية العامة $GL(n, p)$

بحيث إن $|G| \;\Big|\; \frac{p^n-1}{p^m-1}$ للكل عدد صحيح m قاسم للعدد $n, m \neq n$

عندئذٍ اما أن تكون G محتواة في الزمرة الآتية:

$$\tau(n, p) = \{x \to b\,\sigma(x) \,;\, b \neq o, x \in GF(p^n), \sigma \in \mathrm{Aut}\, GF(p^n)\}.$$

وإما أن تكون الثنائية (n, p) من الشكل:

$$(n, p) = (2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 11), (2, 23)\ (2, 47), (4, 3), (6, 2).$$

نظرية (2):

إذا كان $p^n \equiv 3 \pmod 4$ وكانت S مجموعة العناصر من $GF(p^n)$ القابلة للجذر ألتربيعي في $GF(p^n)$ فإن:

$$\mathrm{Aut}\, T(S) = L(n, p)$$

البرهان: بما أن $p^n \equiv 3 \pmod 4$ إذن $P^n - 1 = 2h$

حيث h عدد فردي. وينتج من ذلك أن:

$$-S \neq S \qquad (|S| = h \text{ لأن})$$

وبالتالي فإن البيان التام الموجه المعرّف بالمجموعة S هو دوري أي أن $T(S)$ بيان تام موجه دوري تربيعي.

سأبرهن أن زمرة الأوتومورفيزم للبيان التام الموجه الدوري ألتربيعي تساوي الزمرة $L(n, p)$:

واضح أولاً أن $L(n, p) \subseteq \mathrm{Aut}(T(S))$:

فإذا كان $g(x) = \omega^2 \sigma(x) + b$ عنصراً اختيارياً من $L(n, p)$ وإذا كان $v - u \in S$ فإن:

$$g(v) - g(u) = g(v - u) = \omega^2 \sigma(v - u) =$$
$$= \omega^2 (v - u)^{p^t} ; \quad t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

وهذا يعني أنه إذا كان $v - u \in <\omega^2>$ فإن $g(v) - g(u) \in S$ وهذا ما يبرهن أن جميع عناصر $L(n, p)$ تنتمي إلى $Aut(T(S))$.

سأبرهن الآن أن $L(n, P)$ بدائية (Primitive):

معلوم أن زمرة الانسحابات المتوازية الآتية متعدية [5]:

$$F = \{ x \to x + b \,/\, x ,\ b \in Gf(p^n)\}$$

وبالتالي، فإن $L(n, p)$ متعدية (لأن $F \subset L(n, p)$) ومعلوم من [5] أن الشرط اللازم الكافي لكي تكون الزمرة المتعدية $L(n, p)$ بدائية هو أن تكون الزمرة الجزئية $L_o(n, p)$ في $L(n, p)$ غير خزوله (irreducible).

لنفرض جدلاً أن $L_o(n, p)$ خزوله فهذا يعني أنه يوجد فضاء جزئي خاص $GF(p^m)$ في الفضاء $GF(p^n)$ بحيث يكون $GF(p^m)$ مستقراً بالنسبة للزمرة الجزئية $L_o(n, p)$ وبما أن $GF(p^m)$ خاص فهذا يعني $m \mid n$ و $n \neq m$. وبما أن $GF(p^m)$ مستقر بالنسبة إلى عناصر $L_o(n, p)$ فهذا يعني أن $|\, GF(p^m) \,| \,\|\, L_o(n, p) \,|$

وبالتالي فإن:

$$\frac{p^n - 1}{2} \quad \mid \quad (p^m - 1)$$

وينتج من ذلك أنه يوجد عدد صحيح فردي t

بحيث أن:

$$\frac{P^n - 1}{2} \quad t = p^m - 1$$

حيث $m \mid n$, $m \neq n$. أي أن $n = \ell m$, $\ell \neq 1$ صحيح

وعليه فإن:

$$\frac{p^n - 1}{p^m - 1} \quad t = 2$$

أو:

$$(p^{n-m} + p^{n-2m} + \ldots\ldots + p^{n-\ell m})\, t =$$
$$= (p^{n-m} + p^{n-2m} + \ldots\ldots + 1)\, t = 2 \qquad (1)$$

وهذا تناقض (لان المضروب الأول في المساواة الأخيرة لا يمكن أن يقسم العدد 2)

وبذلك تُم البرهان على أن $L_o(n, p)$ غير خزوله وعليه فإن الزمرة $L(n, p)$ بدائية وينتج من ذلك أن $Aut(T(S))$ بدائية لأن $L(n, p) \subset Aut(T(S))$

وبما أن رتبة $Aut(T(S))$ عدد فردي

إذن فهي قابلة للحل بحسب نظرية (Feit - Thompson) [4]

وبما أن $Aut\, T(S)$ بدائية وقابلة للحل إذن تكون من الشكل $Aut(T(S)) = F A_o$ [5]

حيث F نظامية في $Aut\, T(S)$ وهي من الشكل:

$$F = \{ x \to x + b \,/\, x,\ b \in F(p^n) \}$$

وأما A_o فهي الزمرة الجزئية في الزمرة $Aut\ (\ T\ (S)\ )$ المثبتة للصفر

ومن السهل البرهان أن $A_o \subseteq GL\ (n, p)$:

لننظر إلى الحقل $GF\ (p^n)$ بوصفه فضاءً متجهيّاً معرفاً على $GF\ (p)$، عندئذٍ يمكن مطابقة $GF\ (p^n)$ مع فضاء الأعمدة $F^n_p = [\ GF\ (p)\ ]^n$.

للبرهان على أن A_o محتواة في $Aut(F_p^n\ ,\ +\ )$ نفرض أنّ g_o عنصر اختياري من A_o، عندئذٍ لكل عنصرين اختياريين من الزمرة الجمعية $(F^n_p\ ,\ +\ )$ مثل $a\ ,\ b$ يكون لدينا:

$$g_o\ (a) = g_o\ f_a\ (0); \quad f_a \in F$$

وبالتالي فإن f_a من الشكل $f_a\ (x) = x + a$ وينتج من ذلك أن:

$$g_o\ (a) = g_o\ f_a\ (0) = g_o\ f_a\ g_0^{-1}\ (0)$$

وبما أن F نظامية في $Aut\ T\ (S)$ إذن $g_o\ f_a\ g_o^{-1} \in F$.

نرمز الآن للعنصر $g_o\ f_a\ g_o^{-1}$ من F بالرمز f_c فيكون لدينا:

$$g_o\ (a) = f_c\ (0) = c$$

وبشكل مماثل نبرهن أن:

$$g_o\ (b) = g_o\ f_b\ (0) = f_d\ (0) = d\ ; \qquad f_d = g_o\ f_a\ g_o^{-1}$$

وبالحساب المباشر نجد أن

$$\begin{aligned} &g_o\ (a + b) = g_o\ (f_a\ f_b\ (0)\ ) = \\ &= g_o\ f_a\ f_b\ g_o^{-1}\ (0) = f_c\ f_d\ (0) = c + d = \\ &= g_o\ (a) + g_o\ (b) \Rightarrow g_o \in Aut\ (F^n_p\ , +) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g_o \in GL\ (n, p) \Rightarrow A_o \subset GL\ (n, p) \end{aligned}$$

وبما أن $L_o\ (n, p) \subseteq A_o$ إذن $|\ L_o\ (n, p)\ |\ |\ |\ A_o\ |$

وبالتالي يوجد عدد صحيح فردي t بحيث إن:

$$|\ A_o\ | = t\ n\ \frac{p^n-1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (p^n-1)\ \ |\ |\ A_o\ |$$

وعليه فإنه لكل عدد صحيح موجب m بحيث إن $m \neq n,\ m\ |\ n$ يكون:

$$\frac{P^n-1}{P^m-1}\ \ |\ |\ A_o\ |$$

وباستخدام النظرية (1) نجد أن $A_o \subseteq \tau\ (n, p)$ (لأن A_o قابلة للحل باعتبارها زمرة جزئية من الزمرة القابلة للحل $Aut\ T\ (S)$ و لأن n عدد فردي).

وبما أن A_o متعدية فقط على العناصر القابلة للجذر ألتربيعي في $G\ F\ (p^n)$ وأما $\tau\ (n, p)$ فهي متعدية على كل العناصر في $G\ F\ (p^n)$ إذن $\tau\ (n, p) \neq A_o$

وبالتالي فإن $\tau\ (n\ ,p) : A_o = 2$

إذن $L_o\ (n, p) = A_o$ وهذا ما يبرهن أن $Aut\ T\ (S) = F\ A_o$

مثال:

نأخذ الحقل $GF(7)$ فنجد أن $GF^*(7) = <3>$ وبالتالي فإن الصفين الدوريين في $GF^*(7)$ هما
$\omega H = 3H = \{3,5,6\}$, $H = <3^2> = \{1,2,4\}$

وبالتالي توجد المجموعتان $S_1 = H$, $S_2 = 3H$ بحيث إن كلاً من $T(S_1)$, $T(S_2)$ هو بيان تام موجه تربيعي وزمرة الأوتومورفيزم لكل من $T(S_i)$ (حيث $i = 1, 2$) هي:

$$\mathrm{Aut}\, T(S_i) = \{x \to 3^2 x + b\} = \{x \to 2x + b\}$$

حيث $x, b \in GF(7)$

البيان التام الموجه الدوري

نظرية (3):

ليكن حقل جالوا $GF(p^n)$ حيث $p \geq 3$ و $(n, p) \neq (2, 1+2^s)$

نرمز لزمرة جميع التباديل على $GF(p^n)$ المؤلفة من العناصر:

$$x \to a^{2v(pn-1)} \sigma^{v(n)}(x) + b \; ; a \neq o, b, x \in GF(p^n) \; ; \sigma \in \mathrm{Aut}\, GF(p^n)$$

بالرمز $L(n, p)$

عندئذ تكون زمرة الأوتومورفيزم للبيان التام الموجه الدوري المعّرف بالمجموعة:

$$S = \cup^{k}_{i=1} \varepsilon_i x_i H \; ;$$
$$H = < a^{2v(pn-1)} > , 0 \neq a \in GF(p^n), \varepsilon_i = \pm 1, \; i = 1,2,\ldots\ldots, k$$

هي الزمرة $L(n, p)$.

البرهان:

واضح أن $L(n, p) \subseteq \mathrm{Aut}\, T(S)$

وبما أن $L(n, p)$ بدائية بحسب النظرية (2) إذن $\mathrm{Aut}\, T(S)$ بدائية وعليه فإن:

$\mathrm{Aut}\, T(S) = F A_o$.

حيث F زمرة الانسحابات المتوازية على $GF(p^n)$ وأما A_o فهي زمرة جزئية غير خزوله ومثبته للصفر في $GL(n, p)$

واضح أن $L_o(n, p) \subseteq A_o$ وعليه نميز حالتين (1) , (2):

1) إذا كان $n \neq 2$ فيجري البرهان على أن $A_o \subseteq L_o(n, p)$ كما في النظرية (2) بعد مراعاة أن الطرف الأيمن في المساواة (1) من النظرية المذكورة يصبح 2^s وعليه فان المساواة (1) تتحقق فقط عندما يكون $n = 2$ و $1+ p = 2^s$ (وهذه الحالة مستثناة في الفرض) وبالتالي فإن:
$\mathrm{Aut}\, T(S) \subseteq L(n, p)$

2) إذا كان $n = 2$ فإن العددين $|A_o|$, $n = 2$ أوليان فيما بينهما لأن $|A_o|$ فردي ونجد من مبرهنة Huppert بحسب [7] أن الزمرة غير الخزوله في $GL(n, p)$ والتي رتبتها أولية مع العدد n تكون دورية، وبالتالي فإنه عندما يكون $n = 2$ تصبح A_o من الشكل:

$$A_o = \{x \to ax \quad a \neq 0, x \in GF(p^n)\}$$

وعليه فإن $A_o \subseteq L_o(n, p)$ مرة ثانية وهذا ما يبرهن أن:

$$Aut\ T\ (S) \subseteq L\ \ (n, p)$$

اذن في كلتا الحالتين تتحقق المساواة الآتية:

$$Aut\ T\ (S) = L\ (n, p)$$

النتائج والمناقشة:

برهنت على صحة النظريتين (2, 3) في الحالة التي يكون فيها عدد عقد البيان التام الموجه الدوري هو عدداً أولياً مرفوعاً إلى قوة صحيحة. وأنجزت الخطوات الآتية:

1) الخطوة الأولى: بناء جميع البيانات التامة الموجهة الدورية والتي يكون عدد عقدها أولياً مرفوعاً إلى قوة صحيحة موجبة.
2) الخطوة الثانية: قمت ببناء زمرة الأوتومورفيزم لجميع البيانات التامة الموجهة الدورية.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلت إلى تصنيف البيانات التامة الموجهة الدورية إذ برهنت أن زمرها الأوتومورفية جميعها بدائية قابلة للحل و تبنى بالاعتماد على الزمر غير الخزولة في الزمرة الخطية العامة، أما عندما تكون هذه الزمر غير بدائية تصبح المسألة في غاية التعقيد، وأوصي بمتابعة البحث عندما يكون البيان التام غير دوري.

المراجع:

[1] ANNIE ASTIE-VIDAL. *Near-homogeneous tournaments and permutation group*s, Discrete Mathematics 102 (1992) 111-120.

[2] DIXON J. D, *On the determination of the maximum order of the group* of *a tournament*. Canad. Math. Bull., 16, 1973.

[3] J. W. MOON, *tournaments with a given automorphism group*, can. J. Math. 16 (1964) 485-489.

[4] W, FEIT and J. THOMPSON, *The solvability of groups of odd order*, Pac. J. Math. 13 (1963) 775-1029.

[5] D. A. SUPRUNENKO, *Matrix groups, by K.A Hirsch* (1999) 252 pages.

[6] D. S. PASSMAN, *p - solvable doubly transitive permutation groups*, Pac. J. Math. 26 (1968) 555-577.

[7] B. HUPPERT. *Ensliche Gruppen I. Berlin*. Newyork 1967.

[8] DIXON J. D.; MORTMER, B: *Permutation groups*, Berline: Sprimgervelag, 1996.