مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

دراسة في شبكة الأسس في الحلقات

الدكتور أحمد الغصين*
رنا مبيض**

(تاريخ الإيداع 18 / 1 / 2011. قُبِل للنشر في 28 / 3 / 2011)

□ ملخّص □

تعتبر شبكات الأسس في الحلقات من أحدث أصناف الشبكات، إذ تم الاهتمام بدراستها في أواخر التسعينات من القرن الماضي. الهدف من هذا البحث هو دراسة العلاقة بين شبكة الأسس في الحلقة وبين شبكة بول، ونهتم بشكل خاص بالسمات التي تتصف بها علاقة الترتيب في شبكة الأسس. ومن أهم النتائج إعطاء مثال على أن شبكات الأسس في الحلقات لا تشكل بالضرورة شبكات.

الكلمات المفتاحية: أساس، شبكة الأسس، صف مورِّث، شبكة بول.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية
** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

On The Lattice of Radicals Ring

Dr. Ahmad Gusain*
Rana Mobayed**

(Received 18 / 1 / 2011. Accepted 28 / 3 / 2011)

□ ABSTRACT □

The lattice of radicals ring is considered the most recent type of lattices, and has been studied since the nineties of the last century. The purpose of this article is to reveal the relationship between the lattice of radicals ring and Boolean lattice, specially the specific characteristics of the order relation in the Lattice of radicals. However, one of the most important conclusions is that giving examples shows that the lattices of radicals rings are not necessarily Boolean lattices, even if they were complete distributive lattice.

Keywords: Radical, Lattice of Radicals, Hereditary Class, Boolean Lattice.

* **Professor in Mathematic Department, Science Faculty, Tishreen University, Latakia, Syria.**
** **High Studies student (Master Degree), Mathematic Department, Science Faculty, Tishreen University, Latakia, Syria.**

مقدمة:

لا تخفى على أحد أهمية علم الحلقات الجبرية وذلك لتعدد فروعه وتطبيقاته. وبما أن علم الشبكات الجبرية هو التطور الأبرز لعلم الجبر والمنطق الرياضي وبخاصة الإمكانيات التي فتحتها دراسته باستخدام برمجيات الكمبيوتر، لذا كان الدمج بين هذين العلمين من أفضل السبل لإعادة الشباب لعلم الجبر العجوز. ولعل من أهم أساليب هذا الدمج شبكة الأسس لبعض البنى الجبرية (مثل الزمر والحلقات والحقول) ودراسة خواص هذه الشبكة وصفاتها واختلاف هذه الصفات باختلاف صفوف الأسس المدروسة.

أهمية البحث وأهدافه:

الهدف من هذا البحث هو أخذ صنف جديد من الشبكات وهي شبكات الأسس التي شهدت تطوراً كبيراً و أصبح بالإمكان دراستها وتمثيلها برمجياً، مما فتح المجال لنقل الدراسة المجردة تماماً إلى دراسة تطبيقية وذلك من خلال دراسة العلاقة بين شبكات الأسس للحلقات و الشبكات البوليانية.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقتنا في هذا البحث على الاستفادة من مفهوم الأساس، لذا نبدأ هنا بإعطاء بعض التعريفات والخصائص الضرورية لعرض الموضوع والتي تستخدم في مبرهنات البحث ونتائجه.

النتائج والمناقشة:

لتكن $\mathcal{A}$ صف جميع الحلقات التبديلية. إن جميع الحلقات المدروسة هنا هي حلقات من الصف $\mathcal{A}$ وجميع الحلقات مغلقة بالنسبة للتشاكلات المختارة للصفوف الجزئية من $\mathcal{A}$.

1. نظرية الأسس في الحلقات:

1.1. تعريف: [9]

بفرض $\alpha: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ تطبيقاً من الصف $\mathcal{A}$ في نفسه بحيث تقابل كل حلقة A من $\mathcal{A}$ بالمثالية $\alpha(A)$ (بحيث تشكل صورة أية حلقة من المنطلق مثالية في المستقر) عندئذٍ:

i) المثالية I للحلقة A نسميها $\alpha-$ مثالية إذا كانت $\alpha(I) = I$.

ii) المثالية J للحلقة A نسميها $\alpha-$ أساس (α –radical) للحلقة A ، إذا كانت J أكبر $\alpha-$ مثالية للحلقة A.

1.2. تعريف: [9]

نسمي التطبيق $\alpha: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ أساساً في الصف $\mathcal{A}$ إذا حقق الشروط الآتية:

i) من أجل أي تشاكل حلقي $\varphi: A \to \bar{A}$ يكون: $\alpha(\varphi(A)) \subseteq \varphi(\alpha(A))$.

ii) في أية حلقة اختيارية A المثالية $\alpha(A)$ تكون $\alpha-$ أساساً للحلقة A.

iii) مهما تكن الحلقة A فإن $\alpha\left(A/_{\varphi(A)}\right) = 0$.

1.3. تعريف: [9]

ليكن $\alpha : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ أساساً اختيارياً في الصف $\mathcal{A}$ عندئذٍ:

* الحلقة A نسميها $\alpha-$ حلقة إذا كان $\alpha(A) = A$.
* الحلقة A نسميها حلقة $\alpha-$ نصف بسيطة إذا كان $\alpha(A) = 0$.

إن صف جميع الحلقات التي لها الشكل $\alpha-$ حلقة نرمز له بالرمز $\mathcal{R}(\alpha)$.

وصف جميع الحلقات التي لها الشكل $\alpha-$ نصف بسيطة نرمز له بالرمز $\mathcal{P}(\alpha)$.

* إن الصف $\mathcal{R}$ من الحلقات نسميه صف أساس (radical class of rings) إذا كانت $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\alpha)$ من أجل أساس α محدد.
* الصف $\mathcal{P}$ من الحلقات نسميه صفاً نصف بسيط (semisimple class of rings) إذا كانت $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\alpha)$ من أجل أساس α محدد.

الأساس α: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ يكون محدداً بشكل منتظم و وحيد من خلال كل من $\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{P}(\alpha)$، وبالتالي من أجل تعيين أساس يكفي أن نحدد صف الأساس له أو صف نصف البسيط للحلقات.

يمكن ترتيب صفوف الأسس للحلقات أو الحلقات نصف البسيطة جزئياً بعلاقة الاحتواء كما يأتي:

من أجل أي أساسين α , γ فإن $\mathcal{R}(\alpha) \subseteq \mathcal{R}(\gamma)$ إذا وفقط إذا كان $\mathcal{P}(\gamma) \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$.

1.4. تعريف: [9]

نسمي الصف $\mathcal{R}$ من الحلقات صفاً مغلقاً بالنسبة للتشاكل إذا كان صورة كل حلقة من الصف $\mathcal{R}$ وفق تشاكل ما هي حلقة من الصف $\mathcal{R}(\alpha)$.

1.5. تعريف: [9]

نسمي الصف $\mathcal{R}$ صفاً مغلق التمديد إذا كان من أجل كل مثالية J للحلقة A الحلقتان J و A/J تنتميان للصف $\mathcal{R}$ ينتج أن الحلقة A تنتمي للصف $\mathcal{R}$ أيضاً.

1.6. تعريف: [9]

نسمي الصف $\mathcal{R}$ صفاً يحقق خاصة الاستقراء إذا حقق الشرط:

من أجل أية سلسلة صاعدة .... $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq$ من المثاليات في حلقة A ، بحيث كل $I_n \in \mathcal{R}$ عندئذٍ $\cup I_n$ ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}$.

1.7. نظرية: [7]

صف الحلقات $\mathcal{R}$ هو صف أساس إذا و فقط إذا كان:

i) $\mathcal{R}$ صفاً مغلقاً تشاكلياً.

ii) $\mathcal{R}$ مغلقاً بالنسبة إلى التمديد.

iii) $\mathcal{R}$ يحقق خاصة الاستقراء.

من هذه المبرهنة نحصل على النتيجتين الآتيتين:

.1.8 نتيجة:

إذا كان $\{\alpha_i : i \in\mathbb{N}\}$ أسرة أسس فإن الصف $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i)$ يكون أيضا صفاً أساساً، الأساس المرافق لهذه الأسرة نرمز له $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$.

.1.9 نتيجة:

من أجل أي صف اختياري $\mathcal{M}$ من الحلقات يوجد أصغر أساس α بحيث أن $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}(\alpha)$ هذا الأساس نسميه الأساس الأدنى المولَّد بالصف $\mathcal{M}$ (the lower radical of class $\mathcal{M}$) و نرمز له $\ell_{\mathcal{M}}$.

إذا كان الصف مؤلفاً من حلقة واحدة A فقط فإن $\ell_{\mathcal{M}}$ نرمز له ℓ_A.

.1.10 تعريف: [9]

الصف $\mathcal{R}$ من الحلقات نسميه صفاً مورِّثاً للمثاليات إذا حقق الشرط:

إذا كان I مثالياً في الحلقة A من الصف $\mathcal{R}$ فإن I هي حلقة من الصف $\mathcal{R}$.

.1.11 نظرية: [9]

يكون صف الحلقات $\mathcal{P}$ صفاً نصف بسيط إذا كان:

i) $\mathcal{P}$ صفاً مورِّثاً على المثاليات.

ii) $\mathcal{P}$ صفاً مغلقاً بالنسبة إلى التمديد.

iii) المجموع المباشر لأية حلقات من الصف $\mathcal{P}$ هو أيضاً حلقة من الصف $\mathcal{P}$.

.1.12 نتيجة:

أن الجزء المشترك من أية أسرة من الحلقات α− نصف البسيطة (تنتمي للصف $\mathcal{P}$) هو أيضاً صف نصف بسيط، بالتالي من أجل أي صف $\mathcal{M}$ من الحلقات يوجد أصغر صف نصف بسيط من $\mathcal{P}$ يحوي الصف المعطى $\mathcal{M}$.

.1.13 تعريف:

إن أكبر أساس α مرافق للصف $\mathcal{M}$ بحيث أن $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ نسميه الأساس الأعلى المعرف من خلال صف الحلقات $\mathcal{M}$ (the upper radical of class $\mathcal{M}$) نرمز لهذا الأساس $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.

.1.14 تعريف: [9]

نسمي الصف $\mathcal{M}$ من الحلقات صفاً نظامياً (regular) إذا كان كل مثاليّاً غير صفري لحلقة من الصف $\mathcal{M}$ ممكن نقله وفق هومومرفيزم إلى حلقة غير صفرية من الصف $\mathcal{M}$.

من هذين التعريفين يمكن ذكر المبرهنة الآتية:

.1.15 مبرهنة: [7]

إذا كان $\mathcal{M}$ صفاً نظاميّاً من الحلقات، عندئذٍ يوجد أساس أعلى $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ معرف من خلال $\mathcal{M}$.

والحلقة A تكون $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$− حلقة فقط إذا كانت الحلقة A لا يمكن نقلها تشاكلياً إلى حلقة غير صفرية من الصف $\mathcal{M}$.

ويكون من أجل كل أساس α: $\alpha=\mathcal{U}_{\mathcal{P}(\alpha)}$.

2. شبكة الأسس والشبكات الجزئية فيها:

2.1. تعريف الشبكة: [5]

نقول عن المجموعة المرتبة جزئيا $(L , \leq)$ أنها شبكة إذا وجد الحد الأعلى الأصغر (sup) والحد الأدنى الأعظم (inf) (أي $\sup(a,b)=a\vee b$ وَ $\inf(a,b)=a\wedge b$) من أجل أي عنصرين a , b من L. وندعو الثلاثية $(L, \wedge, \vee)$ شبكة جبرية.

ينتج من التعريف أن أية مجموعة جزئية منتهية غير خالية من L تملك sup و inf.

2.2. تعريف: [5]

نقول عن الشبكة $(L, \wedge, \vee)$ أنها شبكة تامّة إذا وجد الحد الأعلى الأصغر والحد الأدنى الأعظم لأية مجموعة X جزئية (ليس بالضرورة منتهية) في L.

2.3. مبرهنة:

الأسرة $\mathbb{L}$ المؤلفة من جميع الأسس في الصف $\mathcal{A}$ يمكن ترتيبها جزئياً بالشكل:

إذا كان α_1 ، α_2 أساسين من $\mathbb{L}$ فإن:

$\mathcal{R}(\alpha_1) \subseteq \mathcal{R}(\alpha_2)$ عندما $\alpha_1 \leq \alpha_2$

أو $\mathcal{R}(\alpha_1) \subset \mathcal{R}(\alpha_2)$ عندما $\alpha_1 < \alpha_2$

عندئذ الأسرة $\mathbb{L}$ مع العمليتين:

$$\{\alpha_i; i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \ \& \ \{\alpha_i; i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \ell_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i)} = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$$

تشكل شبكة تامّة.

البرهان: لتكن $X=\{\alpha_i : i\in\mathbb{N}\}$ مجموعة جزئية في المجموعة $\mathbb{L}$ لإثبات أنها شبكة تامّة يجب إيجاد الحد الأعلى الأصغر و الحد الأدنى الأعظم لِ X بالنسبة للعمليتين المعرفتين أعلاه.

من النتيجة 1.8 نجد أن التقاطع غير المنتهي لأسرة صفوف الأسس هو صف أساس أي أن: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i)$ فيكون هو الصف الأساس لتقاطع الأسس $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ أي أن $\mathcal{R}(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i)$

أما بالنسبة إلى اجتماع الأسس فليس بالضرورة أن يكون اجتماع صفوف الأسس هو صف أساس لذلك نأخذ الأساس الأدنى للاجتماع $\ell_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i)}$ وهو موجود بحسب النتيجة 1.9، وبالتالي الأسرة $\mathbb{L}$ المؤلفة من جميع الأسس في صف الحلقات $\mathcal{A}$ هي شبكة تامّة.

من المبرهنة السابقة نستنتج أن أصغر عنصر في $\mathbb{L}$ هو الأساس θ حيث $\theta(A)=0$ من أجل كل حلقة A من الصف $\mathcal{A}$ (هذا يعني أن جميع الحلقات هي $\theta-$ نصف بسيطة). وأن أكبر عنصر فيها هو الأساس Σ حيث $\Sigma(A)=A$ من أجل كل $A\in\mathcal{A}$ (بمعنى أن جميع الحلقات تكون $\Sigma-$ حلقات).

ويكون لدينا من أجل أي أسرة $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ من الأسس:

$$\mathcal{R}(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(\alpha_i) \ \& \ \mathcal{P}(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\alpha_i)$$

2.4. مبرهنة:

من أجل حلقة A تكون المساواة $(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i)(A)=A$ محققة إذا وفقط إذا وجدت سلسلة صاعدة من المثاليات $\{I\mu\}$ في الحلقة A حيث: $I_0=0$، $I_{\mu+1}/I_\mu$ هي α_i− أساس من أجل بعض الأسس α_i، $I_\upsilon = \bigcup_{\mu<\upsilon} I_\mu$ من أجل عدد محدود ν، و $\bigcup_\mu I_\mu = A$.

البرهان: إن برهان الشرط الكافي في هذه المبرهنة يسير بشكلٍ مشابه كما في [3] لذا ليس من الضروري ذكره. أما لإثبات اللزوم فنجد من الواضح بما أن $I_{\mu+1}/I_\mu$ هي $\vee\alpha_i$− أساس وأن صفوف الأساس مغلقة بالنسبة إلى التمديد والاجتماع.

2.5. مبرهنة:

من أجل A حلقة تكون المساواة $(\wedge\alpha_i)(A) =0$ محققة إذا وفقط إذا وجدت سلسلة من المثاليات $\{I\mu\}$ في الحلقة A حيث: $I_0=0$، $I_{\mu+1}/I_\mu$ هي α_i− نصف بسيطة من أجل بعض الأسس α_i، $I_\upsilon = \bigcap_{\mu<\upsilon} I_\mu$ من أجل عدد محدود ν، و $\bigcap_\mu I_\mu = 0$.

البرهان: من أجل الشرط الكافي انظر [3]. أما الشرط اللازم واضح.

2.6. مبرهنة:

إن صورة الحلقة A وفق تقاطع أسرة الأسس $\{\alpha_i\}$ تعطى بالشكل:

$(\wedge\alpha_i)(A)=\Sigma$ {$I \leq A$: A مثالي في I & α_i من أجل كل أساس $\alpha_i(I)=I$}

البرهان: واضح مباشرةً من المبرهنة 2.3.

مما سبق يمكن أن نورد المثال الآتي الذي يبين أن الشبكة $\mathbb{L}$ ليست معيارية، أي لا تحقق الشرط:

من أجل أي أسس α , σ , γ بحيث أن $\alpha \leq \sigma$ فإن: $(\gamma \vee \alpha) \wedge \sigma = (\alpha \vee (\sigma \wedge \gamma)$.

2.7. مثال:

لنأخذ كثيري الحدود $q(x) , p(x)$ بأساس مشترك (p , q)، الحلقة A هي (p , q)− حلقة نظامية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $a \in A$ يوجد $b \in A$ بحيث إن: $a = p(a)\, b\, q(a)$.

ليكن α أساس جاكبسون، $\gamma = (x , x)$، $\sigma=(x , 1)$ من الواضح أن $\gamma \leq \sigma$.

من أجل الحلقة $\mathbb{Z}_4$ نجد : $(\gamma \vee (\alpha \wedge \sigma))(\mathbb{Z}_4)=0$ ولكن $((\gamma \vee \alpha) \wedge \sigma)(\mathbb{Z}_4)= \mathbb{Z}_4$

هذا يعني أن: $\gamma \vee (\alpha \wedge \sigma) \neq (\gamma \vee \alpha) \wedge \sigma$.

2.8. تعريف: [8]

تسمى الحلقة A حلقة ممدد جوهري للحلقة I (essential extension) إذا كانت:

$I \lhd A$ & $I \cap C \neq 0$ (حيث $\lhd$ يعني أن I مثالية في A) ومن أجل كل $C \lhd A$ و $C \neq 0$، ويدعى أيضاً I مثاليّاً جوهرياً أو مثاليّاً أكبر (large) للحلقة A ونرمز له $I \lhd \cdot A$.

2.9. تعريف: [9]

نقول عن صف حلقات $\mathcal{R}$ إنه مغلق بالنسبة إلى التمديد الجوهري إذا كان الممدد الجوهري لأية حلقة من الصف $\mathcal{R}$ هي أيضاً حلقة من الصف $\mathcal{R}$.

2.10. مبرهنة: [7]

إن الأساس α هو أساس مورِّث فقط إذا كان α يحقق أحد الشرطين الآتيين المتكافئين:

i) من أجل كل مثالي I للحلقة A يكون $\alpha(I) = I \cap \alpha(A)$.

ii) (α) مغلق بالنسبة للتمديد الجوهري، حيث (α) هو الأساس المولد بـ α.

ملاحظة: نقول عن أساس ما إنّه مورِّث إذا كان الصف الأساس الموافق له مورّثاً.

2.11. مبرهنة:

صف جميع الأسس المورِّثة $\mathbb{T}$ هو شبكة جزئية في شبكة جميع الأسس $\mathbb{L}$.

البرهان: لقد بينا في النتيجة 1.12 أن تقاطع أسس مورِّثة هو أساس مورِّث، وبالتالي يكفي فقط إثبات أن اتحاد أسس مورِّثة هو أساس مورِّث. لتكن $\{\alpha_i\}$ أسرة من الأسس المورِّثة ولنفرض أن $(\vee\alpha_i)(I)=0$ حيث I مثالي أكبر في حلقة A، عندئذٍ يكون $\alpha_i(I)=0$ من أجل جميع α_i، وبما أن α_i مورِّث فيكون $\alpha_i(A)=0$ بحسب مبرهنة 2.10 ومنه $(\vee\alpha_i)(A)=0$ وفق المبرهنة 2.3 وبالتالي يكون $\vee\alpha_i$ مورّثاً بحسب مبرهنة 2.10 أيضاً.

نذكر الآن النظرية التالية حول الأسس المورِّثة.

2.12. مبرهنة: [9]

i) شبكة جميع الأسس المورِّثة $\mathbb{T}$ هي شبكة توزيعية أي أن:

من أجل أي أسرة α_i حيث $i \in \mathbb{N}$ من الأسس المورِّثة، ومن أجل أي أساس مورِّث γ مورِّث يكون:

$$\gamma \wedge \left(\vee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \right) = \vee_{i\in\mathbb{N}} (\gamma \wedge \alpha_i)$$

ii) من أجل أي أسرة α_i حيث $i \in \mathbb{N}$ من الأسس ومن أجل أي أساس مورِّث γ يكون:

$$\gamma \wedge \left(\vee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \right) = \vee_{i\in\mathbb{N}} (\gamma \wedge \alpha_i)$$

ولكن سنعطي الآن مثالاً يبيِّن أن الشبكة $\mathbb{T}$ ليست شبكة بول مما يفتح المجال أمام دراسة جديدة في الشبكات التوزيعية التامّة.

2.13. مثال:

لنبين أنه لا يوجد أساس مورِّث $\mathcal{J}'$ بحيث أن $\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}' = \theta, \mathcal{J} \vee \mathcal{J}' = \Sigma$ حيث $\mathcal{J}$ أساس جاكبسون:

بالحقيقة إذا وجد مثل هذا الأساس عندئذ كل $\mathcal{J}-$ حلقة بسيطة تكون $\mathcal{J}'-$ نصف بسيطة.

لنشكل الحلقة A من جميع الأعداد الصحيحة الزوجية، بما أن كل مثالي (2n) في الحلقة A تكون حلقة

القسمة $^{(2n)}\!/_{(4n)}$ هي $\mathcal{J}-$ حلقة بسيطة ومنه فإن الحلقة A هي $\mathcal{J}V\mathcal{J}'-$ نصف بسيطة هذا يعني أن $\Sigma\neq\mathcal{J}V\mathcal{J}'$ وهذا غير ممكن.

أما الآن فسنتحدّث عن شبكة الأسس المعدومة القوة $\mathbb{K}$.

2.14. تعريف: [9]

* نسمي الحلقة A حلقة معدومة القوة (nilpotent) إذا وجد عدد طبيعي $n>1$ بحيث $A^n=0$.
* يقال عن صف أساس إنه فوق معدومة القوة (over nilpotent radical class)، إذا احتوى على صف الصفر–حلقات $\mathbb{Z}^0$، وبالإضافة لكونه مورّثاً.
* ويقال عن أساس أنه فوق معدوم القوة إذا كان صفه الأساس كذلك.

2.15. تعريف: [9]

أساس بيِّير β (Baer) هو الأساس الأعلى لصف الحلقات المعدومة القوة وهو أيضاً الأساس الأعلى لصف الصفر–حلقات $\mathbb{Z}^0$ (الحلقات المعرف عليها الجداء الصفري).

2.16. مبرهنة: [4]

إذا كان $\mathcal{M}$ صف حلقات مورِّث على المثاليات، فإن $\ell_{\mathcal{M}}$ هو أيضاً أساس مورِّث.

2.17. نتيجة:

من المبرهنة 2.3 ومن تعريف أساس بيِّير يكون β أساس مورِّث.

ومن المعلوم أيضاً من [1] أن (Armendariz) حدد جميع الأسس المورِّثة التي تصغر أساس بيِّير β وبيّن أن كل أساس منها هو أساس أدنى بالشكل: $\ell_{\oplus\sum_{p\in Q}\mathbb{Z}_p^0}$ حيث Q مجموعة جميع الأعداد الأوليَّة و $\mathbb{Z}_p^0$ حلقة معرف عليها الجداء الصفري والجمع كما ضمن الحقل $\mathbb{Z}_p$. في هذه الحالة شبكة جميع الأسس المورِّثة التي تصغر β تكون إيزومورفية مع شبكة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة قابلة للعد. بما أن صفوف الأسس مغلقة بالنسبة إلى التمديد، من الواضح أن كل صف أساس فوق معدوم القوة يحوي جميع الحلقات المعدومة القوة. عندئذ جميع الأسس فوق معدومة القوة حاوية على β، وبالتالي أساس بيِّير هو أصغر أساس فوق معدومة القوة.

2.18. مبرهنة [7]:

الأسرة $\mathbb{K}$ أسرة جميع الأسس فوق معدومة القوة تشكل شبكة توزيعية تامّة، $\mathbb{K}$ هي شبكة جزئية من $\mathbb{L}$.

2.19. نتيجة:

من المثال 2.14، ومن تعريف الأساس فوق معدوم القوة لجاكبسون $\mathcal{J}$، ينتج أن $\mathbb{K}$ ليست شبكة بول وبالتالي $\mathbb{L}$ ليست شبكة بول.

2.20. تعريف: [8]
نقول عن أساس α إنه يحقق متطابقة المصفوفة إذا كان $\alpha(A_n)=(\alpha(A))_n$ من أجل جميع الحلقات A، حيث A_n تدل على المصفوفة من الدرجة $n \times n$ عناصرها من الحلقة A.

2.21. مبرهنة: [8]
إن العلاقة التالية محققة من أجل أية أسرة $\{\alpha_i\}$ من الأسس الموزّثة: $(\wedge\alpha_i)(A)=\cap\, \alpha_i(A)$.

2.22. مبرهنة:
ليكن α أساس ما، عندئذٍ $\alpha(A_n) = I_n$ من أجل بعض المثاليات I لكل حلقة A.
البرهان: يمكن إدخال الحلقة A كمثالي في حلقة B مع واحدة 1. فتكون A_n مثالي في B_n وبالتالي $\alpha(A_n)$ مثالي في B_n بحسب [6]. وبما أن B بواحدة 1 عندئذٍ $\alpha(A_n)=I_n$ من أجل بعض المثاليات I للحلقة B. ولكن $\alpha(A_n) \subseteq A_n$ ومنه $I \subseteq A$.

2.23. مبرهنة: القضايا التالية متكافئة:
i) الأساس α يحقق متطابقة المصفوفة.
ii) يكون $\alpha(A_n)=A_n$ فقط إذا كان $\alpha(A)=A$.
iii) يكون $\alpha(A_n)=0$ إذا وفقط إذا كان $\alpha(A)=0$.
البرهان: إن إثبات (i)⇐(ii) & (ii)⇐(iii) واضح. لإثبات (iii) ⇐(i):
نلاحظ أن $\alpha(A/\alpha(A))=0$ وبالتالي $\alpha((A/\alpha(A))_n)=0$ $\alpha(A_n/(\alpha(A))_n)=$ ومنه $\alpha(A_n)\subseteq(\alpha(A))_n$.
وأيضاً $\alpha(A_n)=I_n$ من أجل بعض المثاليات I في A بحسب المبرهنة 2.23. فيكون $\alpha((A/I)_n)=\alpha(A_n/I_n)=0$ والذي يعطي $\alpha(I)=0$ بحسب (iii)، ومنه $\alpha(A) \subseteq I$.

2.24. مبرهنة:
إن صف جميع الأسس التي يحقق متطابقة المصفوفة هو شبكة جزئية تامّة في شبكة جميع الأسس.
البرهان: لتكن $\{\alpha_i\}$ أسرة من الأسس تحقق متطابقة المصفوفة، يجب أن نثبت أن $\vee\alpha_i \& \wedge\alpha_i$ يحققان متطابقة المصفوفة.
ليكن $(\wedge\alpha_i)(A)=A$ أي أن A هي α_i− أساس وبالتالي A_n هي α_i− أساس من اجل جميع α_i، وبالتالي $(\wedge\alpha_i)(A_n)=A_n$، بشكل مشابه نجد أن $(\wedge\alpha_i)(A_n)=A_n$ يعطي $(\wedge\alpha_i)(A)=A$، ومنه $\wedge\alpha_i$ يحقق متطابقة المصفوفة بحسب المبرهنة 2.24.
وبذات الأسلوب نبين أن $(\vee\alpha_i)(A)=A$ فقط إذا كان $(\vee\alpha_i)(A_n)=A_n$ ويكون وفق المبرهنة 35، $\vee\alpha_i$ يحقق متطابقة المصفوفة.

3. الأساس الخاص للحلقات:

3.1. تعريف: [9]

نقول عن حلقة A إنها أوليَّة (prime) إذا كان I,J مثاليين للحلقة A بحيث $IJ=0$ فإنه إما $I=0$ أو $J=0$.
نقول عن حلقة A أنها نصف أوليَّة (semi-prime) إذا كان I مثالياً غير صفري في الحلقة A فإن $I^2=0$.

3.2. تعريف: [9]

* مجموعة المثاليات للصف $\mathcal{M}$ من الحلقات الأوليَّة تجعل منه صفاً خاصّاً إذا حقق الشرط:

إذا كان I مثالياً غير صفري أولي للحلقة A ويكون I كذلك في $\mathcal{M}$ فإن A تكون من $\mathcal{M}$ أيضاً.

* نسمي الأساس α أساساً خاصاً إذا كان $\alpha=\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ من أجل $\mathcal{M}$ صف خاص.

نذكر فيما يلي بعض النظريات عن الأسس الخاصة.

3.3. نظرية: [7]

من أجل أي صف خاص $\mathcal{M}$

i) الأساس الخاص $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ هو أساس فوق معدوم القوة أي $\mathcal{M}$ هو صف مورِّث.

ii) من أجل كل حلقة A وصف خاص $\mathcal{M}$ ، $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$ هو الجزء المشترك لجميع المثاليات B للحلقة A بحيث إن الحلقة $A/_B$ هي حلقة من الصف $\mathcal{M}$، $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)=\bigcap\{B: B\lhd A, A/_B\in\mathcal{M}\}$ لذلك $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$ هي حلقة نصف أوليَّة.

من المعلوم [7] أن الصف π صف جميع الحلقات الأوليَّة هو أكبر صف خاص، وأن أصغر صف خاص هو المجموعة الخالية Φ.

ونقول إن الأساس المبتذل $\Sigma=\mathcal{U}_{\Phi}$، ومن المعلوم أيضاً [2] أن جميع الأسس المعروفة هي أسس خاصة وبشكل عام من أجل أساس بيِّير Bear لدينا $\beta=\mathcal{U}_{\pi}$ وبالتالي β هو أصغر أساس خاص.

3.4. نظرية: [7]

من أجل أي أساس مورِّث α، الصف $\pi(\alpha)=\pi\cap\mathcal{P}(\alpha)$ جميع الحلقات الأوليَّة α− نصف بسيطة يكون صفاً خاصّاً. وبالتالي الأساس $\mathcal{U}_{\pi(\alpha)}$ هو أصغر أساس خاص يحوي الأساس المعطى α. وأيضاً الأساس المورِّث α هو أساس خاص فقط إذا كان $\alpha=\mathcal{U}_{\pi(\alpha)}$.

3.5. مبرهنة:

إذا كان α_1, α_2 أساسين خاصين فإن $\alpha_1\leq\alpha_2$ فقط إذا كان $\pi(\alpha_1)\supseteq\pi(\alpha_2)$.

البرهان: يكون من علاقات التكافؤ التالية:

$$\pi(\alpha_1)\supseteq\pi(\alpha_2)\Leftrightarrow\pi\cap\mathcal{P}(\alpha_1)\supseteq\pi\cap\mathcal{P}(\alpha_2)\Leftrightarrow\mathcal{P}(\alpha_1)\supseteq\mathcal{P}(\alpha_2)\Leftrightarrow\alpha_1\leq\alpha_2.$$

3.6. مبرهنة: [7]

من أجل أي أسرة $\mathcal{M}_i$ حيث $i\in\Gamma$ من الصفوف الخاصة فإن: $\mathcal{R}\left(\mathcal{U}_{\bigcup_{i\in\Gamma}M_i}\right)=\bigcap_{i\in\Gamma}\mathcal{R}\left(\mathcal{U}_{M_i}\right)$.

من هذه المبرهنة 4.6 ينتج أنه من أجل أي صف $\mathcal{M}$ من الحلقات يوجد أساس خاص أصغري $\hat{\ell}_{\mathcal{M}}$ بحيث أن $\mathcal{M} \subseteq (\hat{\ell}_{\mathcal{M}})$.(lower special radical of class $\mathcal{M}$)

في حالة كون الصف $\mathcal{M}$ يحوي فقط (مؤلف فقط) من حلقة واحدة A فإن $\hat{\ell}_{\mathrm{M}}$ نرمز لها بـ $\hat{\ell}_{\mathrm{A}}$.

وبالتالي يكون: من أجل أي صف $\mathcal{M}$ من الحلقات $\hat{\ell}_{\mathcal{M}} = \mathcal{U}_{\pi(\ell_{\langle\mathcal{M}\rangle})}$ حيث $\langle\mathcal{M}\rangle$ الصف المؤلف من جميع الحلقات R بحيث إنه يوجد حلقة A في $\mathcal{M}$ تكون A حلقة جزئية قابلة للوصول في R.

3.7. نتيجة:

مما سبق نستنتج أن الأسرة $\mathbb{S}$ المؤلفة من جميع الأسس الخاصة مع العمليات:

$\bigwedge_{i\in\Gamma} \alpha_i$ & $\bigvee_{i\in\Gamma} \alpha_i = \hat{\ell}_{\bigcup_{i\in\Gamma} \mathcal{R}(\alpha_i)}$ (حيث α_i أي أسرة من الأسس الخاصة)_هي شبكة تامّة.

ومن المعلوم أن: $\bigvee_{i\in\Gamma} \alpha_i = \mathcal{U}_{\bigcup_{i\in\Gamma} \pi(\alpha_i)}$

ومن أجل أي أسرة α_i من الأسس الخاصة والأساس الخاص γ لدينا:

$$\gamma \wedge \left(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \right) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} (\gamma \wedge \alpha_i)$$

وبالتالي فإن الشبكة $\mathbb{S}$ هي شبكة توزيعية.

إن أصغر عنصر فيها هو أساس بيِّر (Baer) β وأكبر أساس فيها هو الأساس Σ.

وسنبين الآن أن $\mathbb{S}$ لا تشكل شبكة بول.

من أجل ذلك نشكل مثالاً عن أساس خاص α بحيث إنه لا يوجد أساس خاص α' بحيث إن:

$\alpha \wedge \alpha' = \theta, \alpha \vee \alpha' = \Sigma$

3.8. مثال:

لنأخذ الصف $\mathcal{M}$ المؤلف من جميع الحقول $\mathbb{Z}_p$ عندئذٍ بالطبع الصف $\mathcal{M}$ والصف $\pi\backslash\mathcal{M}$ صف جميع الحلقات الأوليَّة التي لا تنتمي لِ $\mathcal{M}$ تكونان صفين خاصين، علاوة على ذلك:

$$\pi(\alpha) = \pi\backslash\mathcal{M}; \alpha = \mathcal{U}_{\pi\backslash\mathcal{M}}$$

بالحقيقة إذا كانت الحلقة A من الصف $\pi(\alpha)$ وكانت من $\mathcal{M}$ فإن $A \simeq \mathbb{Z}_p$ من أجل p عدد محدد، من ناحية ثانية استناداً للمبرهنة 22 الحلقة A حلقة جزئية بسيطة في الصف $\pi\backslash\mathcal{M}$ هذا يعني أنه من أجل $B \lhd A$ هي حلقة من الصف $\pi\backslash\mathcal{M}$ وبالتالي فإن $\mathbb{Z}_p$ هي حلقة من $\pi\backslash\mathcal{M}$ و هذا غير ممكن.

لنبرهن الآن أن $\alpha = \mathcal{U}_{\pi\backslash\mathcal{M}}$ هو الأساس المطلوب (الذي نبحث عنه):

إذا كان من أجل أساس خاص معطى α' حيث $\alpha \wedge \alpha' = \theta, \alpha \vee \alpha' = \Sigma$ فإننا نحصل على:

$$\pi = \pi(\alpha \wedge \alpha') = \pi(\alpha) \cup \pi(\alpha') = (\pi\backslash\mathcal{M}) \cup \pi(\alpha')$$
$$\phi = \pi(\alpha \vee \alpha') = \pi(\alpha) \cap \pi(\alpha') = (\pi\backslash\mathcal{M}) \cup \pi(\alpha') \quad \&$$

وبالتالي $\pi(\alpha') = \mathcal{M}$ أي أن $\alpha' = \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ وعندئذٍ حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تكون حلقة من الصف $\mathcal{P}(\alpha')$ لأن الحلقة $\mathbb{Z}$ مجموع نصف بسيط من الحقل $\mathbb{Z}_p$ ومن الصف $\mathcal{P}(\alpha')$، وبما أن صف الحلقات نصف البسيطة مغلق استناداً إلى المجموع الجزئي.

من ناحية ثانية $\mathbb{Z}$ حلقة من الصف $\pi\backslash\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ وبالتالي $(\alpha \vee \alpha')(\mathbb{Z}) = 0 \neq \mathbb{Z}$

أي أن $\alpha \vee \alpha' \neq \Sigma$ و هذا غير ممكن.

3.9. نتيجة:

من المثال ينتج أيضاً أنه لا يوجد أساس فوق المعدوم القوة (معدوم القوى علوي) α' بحيث إن $\alpha\wedge\alpha'=\theta, \alpha\vee\alpha'=\Sigma$

لأنه إذا كان ذلك محققاً فإن:

$$\pi(\alpha) = \pi\backslash\mathcal{M} \ \& \ \mathcal{P}(\alpha)\cap\mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}})=0$$

وهذا غير ممكن وبالتالي الشبكة $\mathbb{K}$ لا تشكل شبكة بول.

4. العناصر الذرية في شبكات الأسس:

إن الهدف من هذا الجزء هو الإجابة على التساؤل: هل يوجد في شبكات الأسس ذرات؟ وإن وجدت ما هي مميزات تلك الذرات؟

نعلم من تعريف الحلقة البسيطة ومن كون A^2 مثالي في A، من أجل أية حلقة بسيطة A لدينا إما $A^2=A$ أو $A^2=0$.

4.1. تعريف: [9]

* إذا كانت $A^2=A$ فإننا نقول إن الحلقة A جامدة (idempotent).

* الأساس α نسميه أساساً جزئياً جامداً (subidempotent radical) إذا كانت كل $\alpha-$ حلقة هي حلقة جامدة .

4.2. مبرهنة: [4]

إن كل ذرَّة في الشبكة $\mathbb{L}$ إما أن تكون أساساً جزئياً جامداً أو أساساً أدنى $\ell_{\mathbb{Z}^0_{p^\infty}}$ مولداً بحلقة مع عملية الضرب الصفري على الزمرة الجمعية $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ حيث p عدد أوليّ.

أن كل حلقة بسيطة Q بواحدة تولد ذرَّة ℓ_Q للشبكة $\mathbb{L}$.

4.3. مبرهنة:

لا يوجد حلقة بسيطة مع عملية الضرب صفري تولد ذرَّة في الشبكة $\mathbb{L}$.

البرهان: إذا كان ℓ_A ذرَّة في $\mathbb{L}$ فإنه استناداً إلى [7] $\ell_A = \ell_{\mathbb{Z}^0_{p^\infty}}$. لأن الزمرة الجمعية في الحلقة $\mathbb{Z}^0_{p^\infty}$ هي $p-$ زمرة قسمة وأن صف الحلقات التي فيها الزمر الجمعية هي $p-$ زمرة قسمة هو صف أساس، ومنه فإن كل الـ $\ell_{\mathbb{Z}^0_{p^\infty}}-$ حلقة تملك زمرة قسمة جمعية وتكون $p-$ زمرة. وبالتالي الزمرة الجمعية للحلقة A لها أيضاً هذه الخاصة، ينتج أن A مجموع مباشر لحلقات من الشكل $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. وهذا يعني أنه لا يمكن أن تكون الحلقة A حلقة بسيطة وهو المطلوب.

4.4. تعريف: [9]

لتكن A حلقة ما، إن القلب $H(A)$ للحلقة A يعرف كما يلي: $H(A) = \cap(I\lhd A: I\neq 0)$.

تكون الحلقة A غير قابلة للتحليل المباشر إذا كان $H(A)\neq 0$، أي أن A تملك مثالياً أصغرياً وحيداً. سنحدد الآن جميع الذرات في شبكة الأسس المورِّثة.

بينت المبرهنة 2.17 أن الأساس الأدنى $\ell_{\mathcal{M}}$ للصف الموزّث $\mathcal{M}$ من الحلقات هو أيضاً موزّث.
ستكون الحلقات البسيطة ذات مربع صفري.

4.5. <u>مبرهنة</u>:
لتكن S حلقة بسيطة، عندئذٍ ℓ_S ذرّة في شبكة الأسس الموزّثة.
البرهان: ليكن α أساس موزّث بحيث $0 < \alpha \leq \ell_S$.
لتكن الحلقة A $\alpha-$ أساس. لتكن الحلقة غير القابلة للتحليل $T \neq 0$ عاملاً في المجموع المباشر للحلقة A تملك قلب H حيث $\alpha(H)=H$. بالتالي إما H حلقة بسيطة أو $H^2=0$.
إذا كان $H^2=0$، لنأخذ $H \ni x \neq 0$. عندئذ المثالي في H المولد بِ x زمرة دورية بجداء صفري وبالتالي لديه عامل حلقة بسيطة.
في الحالة الثانية سنحصل على $\alpha-$ حلقة بسيطة K، وبما أن $\alpha \leq \ell_S$ فإن ℓ_S- أساس وبما أنه يحوي حلقة جزئية قابلة للوصول متشاكلة مع S (نظرية 22). عندئذٍ $\ell_K = \ell_S \leq \alpha$.

4.6. <u>نتيجة</u>: إذا كان S,K حلقتان بسيطتان غير متشاكلتين، فإن $\ell_K \neq \ell_S$.

4.7. <u>نتيجة</u>: كل أساس موزّث يحوي ذرّة. والذرّات فقط من الشكل ℓ_S من أجل S حلقة بسيطة.
البرهان: ليكن α أساس موزّث، نحصل على S حلقة بسيطة $\alpha-$ أساس، وبذات الأسلوب في المبرهنة 4.5 نجد $0 \neq \ell_S \leq \alpha$.

4.8. <u>تعريف</u>: [9]
إن الأساس الأعلى لصف جميع الحلقات الغير قابلة للتحليل المباشر، والتي تملك قلباً معدوم القوة يدعى الأساس الغير بسيط (anti simple radical) ويرمز له β_φ.
من المعلوم [9] أنه أساس فوق معدوم القوة وخاص أيضاً.

بُرهن في [7] أنه من أجل حلقة بسيطة Q الأساس $\widehat{\ell}_Q$ هو ذرّة خاصة في الشبكة $\mathbb{S}$، وتم وضع الأسئلة التالية:
1) هل كل أساس ذرّي خاص له الشكل $\widehat{\ell}_Q$ من أجل حلقة محددة بسيطة Q؟
2) هل الشبكة $\mathbb{S}$ هي شبكة ذرّية؟
3) هل يمكن أن نكتب جميع العناصر الذرية الخاصة؟
للإجابة عن هذه الأسئلة نعطي المبرهنة التالية:

4.9. <u>مبرهنة</u>: [9]
إذا كان α أساساً ذرّياً خاصّاً، عندئذٍ إما أن يكون $\alpha = \widehat{\ell}_Q$ من أجل حلقة بسيطة Q محددة، وإمّا $\alpha \leq \beta_\varphi$.
البرهان: إذا كان α ذرّياً خاصاً وبما أن β_φ أساس خاص فإن $\alpha \wedge \beta_\varphi$ يشكل أساساً خاصّاً. إضافة لذلك $\beta \leq \alpha \wedge \beta_\varphi \leq \alpha$ من هنا نجد إما $\beta = \alpha \wedge \beta_\varphi$ أو $\alpha = \alpha \wedge \beta_\varphi$. في الحالة الأولى $\alpha \nleq \beta_\varphi$ & $\alpha = \widehat{\ell}_Q$ من أجل حلقة بسيطة Q محددة. وفي الحالة الثانية $\alpha \leq \beta_\varphi$ وهو المطلوب.

من هذه المبرهنة نجد أن الإجابة عن الأسئلة (1) و(2) ليست إيجابية بآن واحد. من هنا ينتج أيضاً أنه لدراسة الموضوع يكفي فقط دراسة العناصر الذرية الخاصة المحتواة في β_φ.

الاستنتاجات والتوصيات:

ومن هنا نجد أن العديد من شبكات جميع الأسس $\mathbb{L}$ ليست شبكة بول وكذلك بعض الشبكات الجزئية فيها مثل $\mathbb{T}$ شبكة جميع الأسس المورِّثة و$\mathbb{K}$ شبكة جميع الأسس فوق معدومة القوة، و$\mathbb{S}$ شبكة جميع الأسس الخاصة. إن التطوير الأساسي للنتائج في هذه المقالة تكمن في إجراء دراسة لمعرفة أية أصناف شبكات الأسس تحقق كونها شبكة بول لأن معرفة ذلك تتيح توضيح العلاقة بشكل كامل بين شبكات الأسس والشبكات البوليانية.

المراجع:

[1] N. J. Divinsky, *Rings and Radicals*, Univ. of Toronto Press, Toronto, (1965), 160 pages.
[2] W. G. Leavitt, *Sets of radical classes*, Publ. Math. Debrecen, 14 (1967), 321-324.
[3] E. P. Armendariz, *Hereditary subradicals of the lower Baer radical*, Publ. Math. Debrecen. 15 (1968), 91-93.
[4] R. L. Snider, *Lattices of radicals*, Pacific J. Math. 42 (1972), 207-220.
[5] L. C. A. van Leeuwen, C. Roos and R.Wiegandt, *Characterizations of semisimple classes*, J. Austral. Math. Soc. 23 (1977), 172-182.
[6] V. A. Andrunakievich and Yu. M. Ryabukhin, *Radicals of algebras and structure theory*, (Russian), Nauka, Moscow, (1979), 10-50.
[7] E. R. Puczylowski, *On unequivocal rings*, Acta Math. Acad. Sci. 36 (1980), 57-62.
[8] B. J. Gardner, R. Wiegandt, *Radical theory of rings*, Marcel Dekker, (2004), 366 pages.
[9] Stuart. A. Steinberg, *Lattice-ordered Rings and Modulesm*, Toledo, OH, USA, (2010), 630 pages.