مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

اتخاذ القرارات التفاعلية لمسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف الضبابية

الدكتور زياد قناية*

(تاريخ الإيداع 20 / 9 / 2011. قُبِل للنشر في 1 / 11 /2011)

□ ملخّص □

نقدم في هذا البحث طريقة اتخاذ قرارات تفاعلية لمسائل الأمثَلة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف، وتعالج تلك الوسائط كأعداد ضبابية.

يحدد متخذ القرار الدرجة α للمجموعة α–مرتبة، وعند كل تكرار يكون على متخذ القرار تخمين الأوزان الوسطية المقايضة، ووفقاً للطريقة المقترحة يتم صياغة مسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف الضبابية كمسألة مكافئة غير ضبابية، وتستخدم تلك الطريقة الأوزان الوسطية المقايضة وتولد ما يسمى القاطع المقايض وذلك للحصول على الحل α–بارتو الأمثل (α-Pareto optimal).

الكلمات المفتاحية: البرمجة المتعددة الأهداف الضبابية، خوارزمية المستوي القاطع، الوسائط الضبابية، الأعداد الضبابية، أمثلية α–بارتو.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

Interactive Decision Making for Fuzzy Multiobjective Optimization Problem

Dr. Ziad A. Kanaya*

(Received 20 / 9 / 2011. Accepted 1 / 11 /2011)

□ ABSTRACT □

In this paper, we present an interactive decision making method for multiobjective optimization problems with fuzzy parameters in the objective functions. Theses fuzzy parameters are characterized by fuzzy numbers. The decision maker specifies the degree α of the α-level set. At each iteration, the decision maker is asked to estimate the tradeoff compromise weights. The proposed method involves formulation of fuzzy multiobjective optimization problem as nonfuzzy equivalent problem, and uses the tradeoff compromise weights and generates a so-called tradeoff cut for obtaining the α-Pareto optimal solution.

Key Words: Fuzzy multiobjective programming, Cutting-plane algorithm, Fuzzy parameters, Fuzzy numbers, α-Pareto optimality.

* **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

إن مسائل الأمثَلة نالت اهتماماً كبيراً من قبل الباحثين في هذا المجال، حيث تطورت طرائق اتخاذ القرارات التي تعالج مسائل الأمثَلة بتابع هدف وحيد. كما تزايد الاهتمام بمسائل الأمثَلة المتعددة الأهداف، حيث إن اتخاذ القرارات في تلك المسائل يحتاج إلى تقنيات حل مناسبة نظراً لتعاملها مع أكثر من تابع هدف وتلك الأهداف متعارضة فيما بينها. وتعدّ مسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف من المسائل الحيوية في بحوث العمليات والتي تظهر في مجالات متعددة كعلوم الإدارة وهندسة التحكم ونظرية القرار وغيرها.

عند صياغة مسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف التي تمثل حالة القرار الحقيقية، هناك عوامل متنوعة من النظام الحقيقي يجب أن تعكس في وصف توابع الهدف والقيود التي تتضمن العديد من الوسطاء، وقد توصف تلك الوسطاء ببعض الغموض أو عدم التحديد، ومن الممكن معالجة هذا الغموض وعدم التحديد باستخدام مفهوم المجموعة الضبابية (Fuzzy Set) .

هناك العديد من الأبحاث التي تعالج مسائل الأمثَلة المتعددة الأهداف في بيئة واضحة، ونذكر منها [2,3,12] التي قدمت عدة اقتراحات لحصول متخذ القرار على المعدلات الحدية لعبارات التفضيل. وقدم في [9,10] خوارزمية المستوي القاطع التفاعلية لتحديد أفضل حل وسطي.

أما بالنسبة للأبحاث التي تعالج مسائل الأمثلة المتعددة الأهداف في بيئة ضبابية، فقد قدم [14] مفهوم α−البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف، ومفهوم أمثلية α−بارتو. وتم في [13] دراسة التحليل النوعي لمجموعة الاستقرار من النوع الأول.وفي [7] تم تقديم الاستقرار التفاعلي لمسائل البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في القيود. وحديثاً، قدم في [4,5] الاستقرار التفاعلي لمسائل البرمجة غير الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف. وفي [6] تم تقديم طريقة تفاعلية تعتمد على خوارزمية المستوي القاطع انطلاقاً من نسب المقايضة الموضعية .

ندرس في هذا البحث مسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف، ويمكن كتابة المسألة وفق الصياغة التالية:

$$\text{(FP)}\quad \begin{aligned} &\max\ (f_1(x,\tilde{a}_1),\ f_2(x,\tilde{a}_2),\dots,\ f_k(x,\tilde{a}_k)) \\ &\text{subject to}\ x\in X=\{x\in R^n \mid g_j(x)\le 0,\quad j=1,2,\dots,m\} \end{aligned}$$

حيث:

$\tilde{a}_i=(\tilde{a}_{i1},\tilde{a}_{i2},\dots,\tilde{a}_{iq_i})$ يمثل شعاع من الوسطاء الضبابية ضمن تابع الهدف $f_i(x,\tilde{a}_i)$ ،

X مجموعة غير خالية ومتراصة.

وتعالج الوسطاء الضبابية في تلك المسألة كالأعداد الضبابية المقدمة في [1]، حيث إن العدد الضبابي $\tilde{p}$ هو مجموعة جزئية ضبابية محدبة من الخط الحقيقي R، وتابع الانتماء $\mu_{\tilde{p}}(p)$ معرف كما يلي:

1) تابع مستمر من R على المجال المغلق [0 , 1] .

2) $\mu_{\tilde{p}}(p)=0$ من أجل $p\in(-\infty,p_1]$.

3) متزايد تماماً على المجال $(p_1\ ,p_2)$.

4) $\mu_{\tilde{p}}(p)=1$ من أجل $p\in(p_2\ ,p_3]$.

5) متناقص تماماً على المجال (p_3 , p_4) .

6) $\mu_{\tilde{p}}(p) = 0$ من أجل $p \in [p_4 , +\infty)$.

أهمية البحث وأهدافه:

هذا البحث يسلط الضوء على مسائل البرمجة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف وعلى الخوارزميات المستخدمة لمعالجة مثل هذه المسائل. ويمكن تلخيص أهداف البحث في النقاط التالية:

1- دراسة مسائل البرمجة المتعددة الأهداف الضبابية.

2- تقديم طريقة تفاعلية لحل مسائل البرمجة المتعددة الأهداف في بيئة ضبابية.

3- إثبات أن الحل الناتج عن الطريقة المقترحة هو حل α-بارتو الأمثل.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم α-مرتبة لصياغة المسألة α-البرمجة المتعددة الأهداف التي تتوافق مع مسألة الأمثَلة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف (FP) من أجل قيمة محددة لـ α، ومفهوم أمثلية α-بارتو. بالإضافة إلى ما يسمى الأوزان الوسطية المقايضة وذلك لتوليد ما يسمى قاطع المقايضة.

تعريف: إن مجموعة α-مرتبة للأعداد الضبابية $\tilde{a}_i$ حيث $i=1,2,\ldots,k$، هي المجموعة $L_\alpha(\tilde{a})$ التي يكون فيها درجة توابع الانتماء للأعداد $\tilde{a}_i$ تتجاوز المرتبة α، وبالتالي لدينا:

$$L_\alpha(\tilde{a}) = \{a \mid \mu_{\tilde{a}_i}(a_i) \geq \alpha, \quad i = 1,2,...,k\}$$

من أجل درجة معينة α ، يمكننا التعامل مع المسألة (FP) على أنها مسألة α-البرمجة المتعددة الأهداف والتي يمكن كتابتها وفق الصياغة التالية:

$$(\alpha\_P) \quad \begin{array}{l} \max \,(f_1(x,a_1),\, f_2(x,a_2),...,\, f_k(x,a_k)) \\ \text{subject to}\, x \in X,\;\; a \in L_\alpha(\tilde{a}) \end{array}$$

ويمكن إعادة كتابة المسألة (α_P) وفق الصياغة المكافئة التالية:

$$(\alpha P) \quad \begin{array}{l} \max \,(f_1(x,a_1),\, f_2(x,a_2),...,\, f_k(x,a_k)) \\ \text{subject } \; x \in X, \\ A_i \leq a_i \leq B_i, \quad i \;=\; 1, 2, ..., k \end{array}$$

حيث A_i, B_i الحدان الأعلى والأدنى على الترتيب للعدد $\tilde{a}_i$.

تعريف: نقول عن النقطة $(x^*, a^*) \in X \times L_\alpha(\tilde{a})$ إنها حل α-بارتو الأمثل للمسألة (αP)، إذا وفقط إذا لا يوجد حل آخر (x,a) بحيث يكون

1- $f_i(x,a_i) \geq f_i(x^*, a_i^*)$ for all $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

2- $f_i(x,a_i) > f_i(x^*, a_i^*)$ for all $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

في هذا البحث، نفرض أن تابع المنفعة لمتخذ القرار $U\,(f_1(x,a_1),\, f_2(x,a_2),...,\, f_k(x,a_k)) \to R$ هو تابع مقعر وقابل للمفاضلة، ويجب على متخذ القرار عند نقطة معطاة ولتكن $(x^q, a^q) \in X \times L_\alpha(\tilde{a})$ أن يخمن الأوزان المقايضة $t_{i,j}^q$ من أجل $i \leq j$ حيث:

$$t_{i,j}^{q} = \frac{\partial U(z)/\partial z_j}{\partial U(z)/\partial z_i}, \quad i \le j \qquad ; z = z^q \equiv [\, f_1(x^q, a_1^q),..., f_k(x^q, a_k^q)]$$

وعندئذ يتم تحديد الأوزان الوسطية المقايضة w_i^q ، حيث $i = 1, 2, ..., k$ ، من جملة المعادلات التالية:

$$w_{k-1}^q = t_{k-1,k}^q w_k^q$$
$$w_{k-2}^q = \tfrac{1}{2}(t_{k-2,k-1}^q w_{k-1}^q + t_{k-2,k}^q w_k^q)$$
$$\vdots$$
$$w_1^q = \tfrac{1}{k-1}(t_{1,2}^q w_2^q + t_{1,3}^q w_3^q + \cdots + t_{1,k}^q w_k^q)$$
$$\sum_{i-1}^{k} w_i^q = 1$$

باستخدام تلك الأوزان يتولد قاطع المقايضة التالي:

$$\sum_{i=1}^{k} w_i^q (z_i - z_i^q) \ge 0$$

حيث $z_i \equiv f_i(x, a_i)$ وذلك من أجل $i = 1, 2, ..., k$.

النتائج والمناقشة:

إن الطريقة المقترحة في هذا البحث تحاول تعيين الحل الجديد للمسألة $(\alpha \mathrm{P})$ بشكل تفاعلي عن طريق حل المسألة التالية:

$$(\alpha \mathrm{P}^q) \qquad \begin{aligned} &\max \eta \\ &\text{subject to } \eta \le \sum_{i=1}^{k} w_i^h (z_i - z_i^h) \ ,h = 1, 2, ..., q \\ &\qquad (x, a) \in X \times L_\alpha(\tilde{a}). \end{aligned}$$

مبرهنة:

لتكن النقطة $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{\eta})$ حل للمسألة $(\alpha \mathrm{P}^q)$، ولتكن $\bar{z} \equiv (\, f_1(\bar{x}, \bar{a}_1),..., f_k(\bar{x}, \bar{a}_k))$. عندئذ النقطة $(\bar{x}, \bar{a})$ هي حل α–بارتو الأمثل للمسألة (αP).

البرهان:

لنفرض جدلاً أنّ $(\bar{x}, \bar{a})$ ليست حل α–بارتو الأمثل للمسألة (αP)، عندئذ توجد $(x^*, a^*) \in X \times L_\alpha(\tilde{a})$ بحيث يتحقق الشرط التالي:

$$z^* \ge \bar{z} \ , \ z^* \ne \bar{z}$$

حيث $z^* \equiv (\, f_1(x^*, a_1^*),..., f_k(x^*, a_k^*))$ ، عندئذ لدينا:

$$\bar{\eta} = \min_{h=1,2,...,q} \{w^h(\bar{z} - z^h)\}$$

وذلك لكون $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{\eta})$ حل للمسألة $(\alpha \mathrm{P}^q)$. وبما أن $w^h > 0$ من أجل $h = 1, 2, ..., q$ ، فإنّ:

$$w^h(\bar{z} - z^h) < w^h(z^* - z^h) \quad \text{for} \quad h = 1, 2, ..., q$$

عندئذ نجد أن:

$$\bar{\eta} = \min_{h=1,2,...,q} \{(w^h(\bar{z} - z^h)\} < \min_{h=1,2,...,q} \{(w^h(z^* - z^h)\},$$

وهذا تناقض مع كون $(\bar{x},\bar{a},\bar{\eta})$ حل للمسألة (αP^q)، وبذلك تكون النقطة $(\bar{x},\bar{a})$ حل α−بارتو الأمثل للمسألة (αP). □

الطريقة المقترحة لحل المسألة المدروسة:

الخطوة 1: يطلب من متخذ القرار تحديد قيمة α حيث $0 \le \alpha \le 1$.

الخطوة 2: نكتب المسألة (FP) وفق الصياغة (αP).

الخطوة 3: نضع قيمة أولية للعداد q تساوي 1 ، وبالتالي $q \leftarrow 1$.

الخطوة 4: نختار نقطة ابتدائية (x^q, a^q) من مجموعة القيود للمسألة (αP).

الخطوة 5: يطلب من متخذ القرار تحديد الأوزان الوسطية المقايضة w_i^q ، حيث $i = 1, 2, \ldots, k$ ، وذلك عند النقطة (x^q, a^q).

الخطوة 6: نجد حل المسألة (αP^q)، وليكن $(x^{q+1}, a^{q+1}, \eta^{q+1})$ الحل الأمثل لتلك المسألة.

الخطوة 7: نعطي زيادة للعداد q بمقدار 1 ، وبالتالي لدينا $q \leftarrow q+1$.

الخطوة 8: إذا كان $\eta^q = 0$ اذهب إلى **الخطوة 9**. وخلاف ذلك اذهب إلى **الخطوة 5**.

الخطوة 9: توقف عند الحل (x^q, a^q) كحل α−بارتو الأمثل للمسألة (αP).

ونوضح الطريقة المقترحة بالمثال الآتي:

مثال:

لندرس مسألة الأمثلة المتعددة الأهداف التالية:

$$(\text{FP}) \qquad \begin{aligned} &\max\ f_1(x,\tilde{a}_1) = -x_1 - \tilde{a}_1 \\ &\max\ f_2(x,\tilde{a}_2) = -x_2 - \tilde{a}_2 \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 14 \\ &\qquad\quad x_1 \ge 2 \\ &\qquad\quad x_2 \ge 3 \end{aligned}$$

مع تابعي الانتماء

$$\mu_{\tilde{a}_i}(a_i) = \begin{cases} 0 & -\infty < a_i \le p_{i1} \\ \dfrac{a_i - p_{i1}}{p_{i2} - p_{i1}} & p_{i1} < a_i < p_{i2} \\ 1 & p_{i2} \le a_i \le p_{i3} \\ \dfrac{a_i - p_{i4}}{p_{i3} - p_{i4}} & p_{i3} < a_i \le p_{i4} \\ 0 & p_{i4} \le a_i < \infty \end{cases}$$

حيث $i = 1, 2$ بالإضافة إلى القيم التالية:

$p_{11}=1$, $p_{12}=2$, $p_{13}=3$, $p_{14}=4$,
$p_{21}=2$, $p_{22}=4$, $p_{23}=5$, $p_{24}=7$.

وبفرض أن تابع المنفعة لمتخذ القرار كالآتي:

$$U=-[f_1(x,a_1)]^2-[f_2(x,a_2)]^2$$

الخطوة 1: افترض أن متخذ القرار اختار $\alpha=0.3$.

الخطوة 2: المسألة (FP) وفق الصياغة (αP)، تصبح كما يلي:

$$(\alpha\mathrm{P})\qquad \begin{aligned}&\max\ f_1(x,a_1)=-x_1-a_1\\&\max\ f_2(x,a_2)=-x_2-a_2\\&\text{subject to}\\&\quad x_1+x_2\geq 6\\&\quad x_1+x_2\leq 14\\&\quad x_1\geq 2\\&\quad x_2\geq 3\\&\quad 1.3\leq a_1\leq 3.7\\&\quad 2.6\leq a_2\leq 6.4\end{aligned}$$

الخطوة 3: نأخذ قيمة أولية للعداد q ، أي أن $q=1$.

الخطوة 4: نختار النقطة الابتدائية $(x^1,a^1)=(2.5\,,3.5\,,3.7\,,6.4)$.

الخطوة 5: إن الأوزان الوسطية المقايضة عند النقطة (x^1,a^1) هي:

$$w_1^1=0.62 \quad , \quad w_2^1=0.38$$

الخطوة 6: المسألة (αP^1) تصبح كما يلي:

$$(\alpha\mathrm{P}^1)\qquad \begin{aligned}&\max\ \eta\\&\text{subject to}\\&\quad \eta\leq 7.606-0.62(x_1+a_1)-0.38(x_2+a_2)\\&\quad x_1+x_2\geq 6\\&\quad x_1+x_2\leq 14\\&\quad x_1\geq 2\\&\quad x_2\geq 3\\&\quad 1.3\leq a_1\leq 3.7\\&\quad 2.6\leq a_2\leq 6.4\end{aligned}$$

ويكون الحل الأمثل لتلك المسألة هو:

$$(x^2,a^2,\eta^2)=(2\,,4\,,1.3\,,2.6\,,3.052)$$

الخطوة 7: بزيادة العداد بمقدار 1 تصبح $q=2$.

الخطوة 8: بما أن $\eta^2=3.052\neq 0$ لذلك يتم العودة إلى **الخطوة 5** .

ونتيجة لتكرار تنفيذ التعليمات من **الخطوة 5** إلى **الخطوة 8** نجد الآتي:

الأوزان الوسطية المقايضة عند النقطة (x^2,a^2) هي:

$w_1^2 = 0.67 \quad , \quad w_2^2 = 0.33$

عندئذ نحصل على قيد جديد يضاف إلى قيود المسألة السابقة (αP^1) وبالتالي تنتج المسألة (αP^2) التي تأخذ الصياغة التالية:

$$(\alpha \mathrm{P}^2) \qquad \begin{aligned} &\max \eta \\ &\text{subject to} \\ &\quad \eta \le 7.606 - 0.62(x_1 + a_1) - 0.38(x_2 + a_2) \\ &\quad \eta \le 4.389 - 0.67(x_1 + a_1) - 0.33(x_2 + a_2) \\ &\quad x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 14 \\ &\quad x_1 \ge 2 \\ &\quad x_2 \ge 3 \\ &\quad a_1 \ge 1.3 \\ &\quad a_1 \le 3.7 \\ &\quad a_2 \ge 2.6 \\ &\quad a_2 \le 6.4 \end{aligned}$$

والحل الأمثل للمسألة (αP^2) هو:

$$(x^3, a^3, \eta^3) = (2\,,4\,,1.3\,,2.6\,,0)$$

بما أن $\eta^3 = 0$، نذهب إلى **الخطوة 9**.

الخطوة 9: الحل الذي نتوقف عنده هو:

$$(x_1, x_2, a_1, a_2) = (2\,,4\,,1.3\,,2.6\,)$$

وهو حل α–بارتو الأمثل للمسألة (αP) .

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث طريقة تفاعلية لمعالجة مسائل الأمثَلة المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية في توابع الهدف وذلك باستخدام الأوزان الوسطية المقايضة وذلك لتوليد ما يسمى قاطع المقايضة، كما تم إثبات أن الحل الناتج عن الطريقة المقدمة هو حل α–بارتو الأمثل. وتم أيضاً توضيح الطريقة المقدمة من خلال مثال عددي، ويمكن استخدام تلك الطريقة لحل مسائل حقيقية.

المراجع:

[1] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and application*. Academic Press, New York, 1980, 393.

[2] DYER, J. S. *A time sharing computer program for the solution of the multiple criteria problem*. Management Science, 19, 1973, 1379-1383.

[3] GEOFFRION, A. M.; DYER, J. S.; FEINBERG, A. *An interactive approach for multi-criterion optimization with an application to the operation of an academic department*. Management Science, 19, 1972, 357-368.

[4] KANAYA, Z. A. *Interactive stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Advances in Fuzzy Sets and Systems, 4, 2009, 293-299.

[5] KANAYA, Z. A. *Interactive stability cutting-plane algorithm for fuzzy multiobjective nonlinear programming problems*. Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences (Mathematics Series), 23, 2010, 47-52.

[6] KANAYA, Z. A. *An interactive method for fuzzy multiobjective nonlinear programming problems*. Journal of King Abdulaziz University: Science, 22, 2010, 103-112.

[7] KASSEM, M. *Interactive stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters in the constraints*. Fuzzy sets and systems, 73, 1995, 235-243.

[8] KASSEM, M. *Interactive stability of vector optimization problems*. European Journal of Operational Research, 134, 2001, 616-622.
[9] KASSEM, M. *Interactive stability cutting-plane algorithm for multiobjective nonlinear programming problems*. Applied Mathematics and Computation, 192, 2007, 446-456.
[10] LOGANATHAN, G. V.; SHERALI, H. D. *A convergent interactive cutting-plane algorithm for multiobjective optimization*. Operations Research, 35, 1987, 365-377.
[11] MUSSELMAN, K.; TALAVAGE, J. *A tradeoff cut approach to multiple objective optimization*. Operations Research, 28, 1980, 1424-1435.
[12] OPPENHEIMER, K. R. *A proxy approach to multi-attribute decision making*. Management Science, 24, 1978, 675-689.
[13] OSMAN, M.; EL-BANNA A. *Stability of multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Mathematics and Computers in Simulation, 35, 1993, 321-326
[14] SAKAWA, M.; YANO, H. *Interactive decision making for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters*. Fuzzy sets and systems, 29, 1989, 315-326.