مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

تبولوجيا - Co*Kc*

الدكتور عدنان ظريف[*]
فاتن عبد الرزاق [**]

(تاريخ الإيداع 1 / 6 / 2011. قُبِل للنشر في 11 / 10 /2011)

□ ملخّص □

يقال عن فضاء تبولوجي (X , τ) إنه فضاء Kc إذا كانت كل مجموعة متراصة فيه مجموعة مغلقة، ويقال عن فضاء تبولوجي (X , τ) إنه فضاء Kc أصغري(MKc) إذا كان (X , τ) فضاء Kc وكان من أجل أية تبولوجيا على X مثل τ^* و بحيث $\tau \supset \tau^*$ لا يكون (X , τ^*) فضاء Kc .
لقد قمنا في هذا البحث بدراسة $coKc$ − تبولوجيا والعلاقة بين Kc − تبولوجيا و $coKc$ − تبولوجيا.

الكلمات المفتاحية: $coKc$ − تبولوجيا، فضاء Kc ، فضاء Kc أصغري .

[*] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات –كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية– سورية.
[**] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

CoKc-Toplogies

Dr. Adnan Zarif *
Faten Abd Al-Razak**

(Received 1 / 6 / 2011. Accepted 11 / 10 /2011)

□ ABSTRACT □

Let (X, τ) be a topological space,we say that (X, τ) is Kc -space if every compact subset of X is closed in (X, τ),

Kc -space is called Minimal Kc - space (MKc) if every topology τ^* of X such that $\tau^* \subset \tau$ implies (X, τ^*) is not a Kc -space.

In this research we will study $coKc$ -topology and the relation between Kc -topology and $coKc$ -topology.

Key words: $coKc$ -topology, Kc -space, Minimal Kc - space.

*Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعد فضاءات Kc ، وفضاءات Kc الأصغرية (MKc) من المفاهيم التبولوجية الهامة والقديمة نسبياً، وتبرز أهميتها بأنها تجمع بين مفهومي التراص والإغلاق ، تعود بداية هذا المفهوم إلى عام 1943 . من أول الباحثين فيه العالم Hewitt الذي أثبت صحة أهم المبرهنات التي تخص هذا الفضاء : كل فضاء هاوسدورف متراص هو فضاء MKC .

عام 1947، برهن العالم Ramanathan على صحة المبرهنة الآتية: كل فضاء KC متراص هو فضاء MKC .وقام العالم Aull عام 1965 بإثبات صحة أن : كل فضاء هاوسدورف هو فضاء KC ، وأن كل فضاء KC هو فضاء T_1 ، انظر الأعمال [1],[2],[3],[4],[5].

في العمل[6] تم دراسة الشروط اللازمة كي تكون الصورة المباشرة لفضاء Kc (MKc) وفق تابع مستمر، و وفق $K-$ تطبيق.....،هي فضاء Kc (MKc)، و الشروط اللازمة كي تكون الصورة العكسية لفضاء Kc (MKc) وفق تابع مستمر، و وفق $K-$ تطبيق.. ،هي فضاء Kc (MKc).

إن بحثنا هذا يناقش مفهوماً تبولوجياً يتعلق بتلك الفضاءات وهو $coKc-$ تبولوجيا والعلاقة بين $Kc-$ تبولوجيا و $coKc-$ تبولوجيا.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى محاولة إيجاد مفاهيم جديدة تتعلق بهذه الفضاءات كمفهومي تبولوجيا المتممات لفضاءات Kc و تبولوجيا المتممات لفضاءات متراصة...

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولا بإعطاء بعض التعاريف الضرورية لعرض الموضوع والتي تستخدم في برهان النتائج التي حصلنا عليها .

تعريف(1):

يُقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) أنه فضاء Kc إذا كانت كل مجموعة متراصة فيه مجموعة مغلقة[1] .

تعريف(2):

يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) أنه فضاء Kc أصغري(MKc) إذا كان (X,τ) فضاء Kc وكان من أجل أية تبولوجيا على X مثل τ^* بحيث $\tau \supset \tau^*$ لا يكون (X,τ^*) فضاء Kc .[1].

النتائج والمناقشة:

مبرهنة(1) : الفضاء الجزئي من فضاء Kc يكون فضاء Kc .

البرهان: ليكن (X,τ_X) فضاء Kc، و (Y,τ_Y) فضاءً جزئياً من (X,τ_X) ، ولتكن A مجموعة متراصة كيفية من نقاط (Y,τ_Y)، عندئذٍ تكون A متراصة في (X,τ_X) لكن X فضاء Kc. لذلك تكون A مغلقة في X ، وبالتالي $A=A\cap Y$ مجموعة مغلقة في Y أي أن Y فضاء Kc .□

نتيجة: تقاطع فضائي Kc هو فضاء Kc .

البرهان: واضح بالاعتماد على المبرهنة(1).

مبرهنة(2): اتحاد أي فضائي Kc مغلقين جزئيين من فضاء تبولوجي (X,τ) هو فضاء Kc .

البرهان: ليكن X_1 ، X_2 فضائي Kc مغلقين جزئيين من فضاء تبولوجي (X,τ) ولتكن A مجموعة متراصة كيفية من نقاط $(X_1\cup X_2,\tau_{X_1\cup X_2})$.

إن $X_1\cap A$ مجموعة متراصة في (X_1,τ_{X_1})، وبالتالي مغلقة فيه، كما أن $X_2\cap A$ مجموعة متراصة في (X_2,τ_{X_2}) لذلك فهي مغلقة فيه.

إن A تكتب بشكل اتحاد منته لمجموعات مغلقة في (X,τ) كما يلي:

$$A=(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)$$

لذلك فهي مغلقة في (X,τ)، و بالتالي فهي مغلقة في $(X_1\cup X_2,\tau_{X_1\cup X_2})$، أي أن $(X_1\cup X_2,\tau_{X_1\cup X_2})$ فضاء Kc .□

نتيجة: اتحاد عدد منتهٍ من فضاءات Kc مغلقة في فضاء تبولوجي (X,τ) هو فضاء Kc .

تعريف: تبولوجيا المتممات لفضاءات Kc :

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولنعرف الأسرة :

$$kc(\tau)=\{T\in\tau : X-T \ : \ Kc \text{ -space in } (X,\tau)\ \}\cup\{\phi\}$$

إن $kc(\tau)$ تشكل تبولوجيا على X (لاحظ النتيجتين السابقتين). سندعو التبولوجيا $kc(\tau)$ تبولوجيا المتممات لفضاءات Kc ($coKc$ - تبولوجيا).

ملاحظة: من الواضح أن $\tau\supseteq kc(\tau)$.

نتيجة: إذا كان (X,τ) فضاء Kc، فإن $\tau=kc(\tau)$.

البرهان: ليكن T عنصراً كيفياً من τ ، عندئذٍ يكون $X-T$ فضاء Kc مغلقاً جزئياً من (X,τ) وفق المبرهنة(1)، وبالتالي $T\in kc(\tau)$ أي أن $\tau\subseteq kc(\tau)$. □

مبرهنة(3): ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً،عندئذٍ يكون الشرطان الآتيان متكافئين:

(1) (X , τ) فضاء Kc .

(2) $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc .

البرهان:

(1) $\Leftarrow$ (2) :واضح من النتيجة السابقة.

(2) $\Leftarrow$ (1) : لتكن A مجموعة متراصة كيفية من نقاط (X , τ) ،عندئّذ تكون A متراصة في $(X , kc(\tau))$ وبما أن $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc ،إذا A مغلقة في $(X , kc(\tau))$ وبالتالي مغلقة في (X , τ) لذلك فإن (X , τ) فضاء Kc. □

نتيجة: يكون (X , τ) فضاء Kc إذا وفقط إذا كان أمكن كتابته على شكل اتحاد فضائي Kc مغلقين جزئيين من (X , τ) .

البرهان:

$\Leftarrow$: واضح.

$\Rightarrow$:بفرض $X = X_1 \cup X_2$ حيث X_1 ، X_2 فضائي Kc مغلقين جزئيين من X ، عندئذ وبحسب المبرهنة(2) يكون (X , τ) فضاء Kc . □

مبرهنة(4): يكون $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc إذا وفقط إذا أمكن كتابة X على شكل اتحاد فضائين جزئيين مغلقين في $(X , kc(\tau))$ومختلفين عن X .

البرهان:

$\Leftarrow$: لنفرض أن $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc ، ولنفرض أن $X \neq X_1 \cup X_2$ وذلك أيا كان X_1 ، X_2 فضائين مغلقين جزئيين من X ومختلفين عن X ، عندئذٍ وبحسب تعريف $kc(\tau)$ يكون X_1 ، X_2 فضائي Kc مغلقين في (X , τ) ،أي أن (X , τ) ليس فضاء Kc (حسب النتيجة السابقة)، وهذا يناقض كون $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc.

$\Rightarrow$:بفرض $X = X_1 \cup X_2$ حيث X_1 ، X_2 مغلقين في $(X , kc(\tau))$ بحيث $X_1 \neq X, X_2 \neq X$ ، عندئذٍ وبحسب تعريف $kc(\tau)$ يكون X_1 ، X_2 فضائي Kc مغلقين في (X , τ) ،أي أن (X , τ) فضاء Kc بحسب المبرهنة(2) وبالتالي $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc . □

نتيجة: يكون (X , τ) فضاء Kc إذا وفقط إذا أمكن كتابة X بشكل اتحاد فضائين مغلقين جزئيين من $(X , kc(\tau))$ ومختلفين عن X .

نتيجة: إذا كان $(X , kc(\tau))$ فضاء غير مترابط ، فإن $(X , kc(\tau))$ فضاء Kc .

البرهان: بفرض $(X,kc(\tau))$ فضاء غير مترابط، عندئذ توجد $kc(\tau) \ni T,G$ بحيث: $T\cap G=\phi$ ، $T\cup G=X$ و $T\neq\phi, G\neq\phi$

إن $X-T$ ، $X-G$ مغلقتين ومخلفتين عن X ،كما أن

$(X-T)\cup(X-G)=X-(T\cap G)=X-\phi=X$ وبالتالي $(X,kc(\tau))$ فضاء Kc .□

مبرهنة(5): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، يكون (X,τ) فضاء Kc غير مترابط إذا وفقط إذا كان $(X,kc(\tau))$ فضاء غير مترابط.

البرهان:

$\Leftarrow$: (X,τ) فضاء Kc ،لذلك فإن $\tau=kc(\tau)$ ، وبما أن (X,τ) غير مترابط فإن $(X,kc(\tau))$ فضاء غير مترابط.

$\Rightarrow$: $(X,kc(\tau))$ فضاء غير مترابط، فهو فضاء Kc (بحسب النتيجة السابقة)،أي أن (X,τ) فضاء Kc ،وبما أن $\tau\supseteq kc(\tau)$ و $(X,kc(\tau))$ فضاء غير مترابط،فإن (X,τ) فضاء Kc غير مترابط. □

مبرهنة(6): اتحاد أي فضائين جزئيين متراصين من فضاء تبولوجي (X,τ) هو فضاء متراص.

البرهان: ليكن X_1 ، X_2 فضائين جزئيين متراصين من فضاء تبولوجي كيفي (X,τ) ، ولتكن $\{T_i : i\in I\}$ تغطية مفتوحة كيفية للمجموعة $X_1\cup X_2$ في الفضاء (X,τ) ، عندئذٍ تكون $X_1\cup X_2\subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$.

إن $X_1\subseteq X_1\cup X_2\subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$ ، أي أن $\{T_i : i\in I\}$ تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي المتراص X_1 ، وبالتالي يوجد عدد طبيعي منته n_1 بحيث $X_1\subseteq \bigcup_{k=1}^{n_1} T_{i_k}$.

كما أن $X_2\subseteq X_1\cup X_2\subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$ أي أن $\{T_i : i\in I\}$ تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي المتراص X_2 ، وبالتالي يوجد عدد طبيعي منته n_2 بحيث $X_2\subseteq \bigcup_{j=1}^{n_2} T_{i_j}$.

لنأخذ الآن $n_0=n_1+n_2$ ، عندئذٍ يكون $X_1\cup X_2\subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} T_i$ ، أي أن $X_1\cup X_2$ مجموعة متراصة في الفضاء (X,τ) .□

نتيجة: تقاطع فضائين متراصين مغلقين هو فضاء متراص.

تعريف: تبولوجيا المتممات لفضاءات متراصة:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولنعرف الأسرة :

$$c(\tau)=\{T\in\tau : X-T \text{ compact space in } (X,\tau)\}\cup\{\phi\}$$

إن $c(\tau)$ تشكل تبولوجيا على X (وفق المبرهنة(6) والنتيجة السابقة)، سندعو التبولوجيا $c(\tau)$ تبولوجيا المتممات لفضاءات متراصة.

ملاحظة: من الواضح أن $\tau \supseteq c(\tau)$.

نتيجة: إذا كان (X , τ) فضاءً متراصاً، فإن $\tau = c(\tau)$.

البرهان: بفرض T عنصراً كيفياً من τ ،عندئذٍ تكون $X - T$ مغلقة في (X , τ) المتراص، وبالتالي $X - T$ متراصة في (X , τ)، أي أن $T \in c(\tau)$ لذلك فإن $\tau \subseteq c(\tau)$. □

نتيجة: ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً،عندئذ يتحقق الشرطان الآتيان:

(1)إذا كان (X , τ) فضاء Kc ، فإن $c(\tau) \subseteq kc(\tau)$.

(2) إذا كان (X , τ) فضاء متراص ، فإن $kc(\tau) \subseteq c(\tau)$.

البرهان:

(1)بما أن (X , τ) فضاء Kc ، فإن $\tau = kc(\tau)$ ، وبما أن $\tau \supseteq c(\tau)$ ،إذاً $c(\tau) \subseteq kc(\tau)$.

(2) بما أن (X , τ) فضاء متراص، فإن $\tau = c(\tau)$ ، وبما أن $\tau \supseteq kc(\tau)$ ،إذاً $kc(\tau) \subseteq c(\tau)$.

نتيجة: إذا كان (X , τ) فضاء MKc ،فإن $c(\tau) = kc(\tau)$.

البرهان: واضح بملاحظة كون (X , τ) فضاء MKc $\Leftrightarrow$ τ تبولوجيا متراصة أعظمية.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا إلى بعض النتائج المتعلقة بفضاءات Kc ، MKc وبعض المفاهيم التبولوجية الأخرى كمفهومي تبولوجيا المتممات لفضاءات Kc و تبولوجيا المتممات لفضاءات متراصة.....

وهدفنا المستقبلي هو إيجاد نتائج تخص مفاهيم تبولوجية أعم.

المراجع:

[1]- ALI. R, *Minimal Kc-spaces and Minimal Lc-spaces*, Tishreen University Journal, Syria, Vol(28), No.(1).2005, P.147-154.

[2]- A. KUNZI AND DOMINIC VAN DER ZYPEN, *Maximal (sequentially) compact topologies*, University of Cape Town, Arxiv. Math.GN, South Africa. 2003, P.1-15.

[3]- ARKHNGEL'SKII. A. V AND PONTRYAGIN. L.S (Eds.),*General Topology I* . New York. Vol(17).1990, P.61-66.

[4]- ARKHNGEL'SKII. A. V (Ed.), *General Topology II*. London. Vol(50).1995, P.19-24.

[5]- Bella.A, Costantini.C, *Topology and its Applications*, Vol (155).2008, P. 1426–1429.

[6]–ظريف، عدنان.، عبد الرزاق، فاتن. *فضاءات Kc وفضاءات Kc الأصغرية*(بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين2010/7/5)