مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

دراسة المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى للدوال المحدبة في فضاءات منظمة

الدكتور محمد سويقات*
فادي برهوم **

(تاريخ الإيداع 18 / 4 / 2011. قُبِل للنشر في 19 / 7 /2011)

☐ ملخّص ☐

درس الرياضي روكافولار المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى في فضاءات منتهية البعد مستخدماً مفهوم التقارب فوق البيان ومن ثم تمت دراستها من قبل دو في فضاءات باناخ انعكاسية مستخدماً مفهوم التقارب لموسكو . أما عملنا فسيكون تعميم هذه المشتقات إلى فضاءات منظمة عامة باستخدام مفهوم جديد للتقارب يسمى تقارب سلايس ويتطابق مع مفهوم التقارب فوق البيان إذا كان الفضاء منتهي البعد ، ويتطابق مع تقارب موسكو إذا كان الفضاء انعكاسياً ويعود هذا المفهوم إلى الرياضي بيير.

الكلمات المفتاحية: التقارب فوق البيان ،الأمثليات، المشتق فوق البيان ، التفاضل الجزئي، تقارب موسكو، تقارب سلايس، مشتق فريشت.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

On First Order Epi-derivatives of Convex Functions in Normal Spaces

Dr. Mohamed Soueycatt *
Fadie barhoom **

(Received 18 / 4 / 2011. Accepted 19 / 7 /2011)

□ ABSTRACT □

Rockafeller introduced the epi- derivatives in terms of epi-convergence in finit dimensional space , and *Do* studied these results in terms of Mosco- convergence in reflexive Banach space.

The aim of this paper is to extend these setting to general normal spaces, using a stronger convergence notion called Epigraphical Slice Convergence introduced by *Beer*. It coincides with the epi- convergence in finit dimensional space and coincides with Mosco-convergence in reflexive Banach space.

Keywords: Epigrqhp, Optimization, Mosco-convergence, Epi-derivative, subdifferential, Epigraphical Slice Convergence, Frechet-derivative.

*Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia, Syria.
** Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تلعب المشتقات فوق البيانية دوراً هاماً في نظرية الأمثليات و تحديد الشروط الأمثلية وقد دُرس الموضوع من قبل العديد من الرياضيين تم ذكر منهم على سبيل المثال في الحالة غير المحدبة في المرجعين [9,14] وفي الحالة المحدبة المراجع [6,12,15] وكانت معظم هذه الدراسات في فضاءات منتهية البعد وفضاءات باناخ انعكاسية. ونتيجة لأهمية الموضوع وتطبيقاته في فضاءات ليست بالضرورة انعكاسية مثل الفضاء ℓ^1 فقد اكتشف بير في سلسلة من أعماله [3,4,5] مفهوماً جديداً سمي بمفهوم سلايس ملائماً لدراسة بعض مسائل الأمثليات في فضاءات منظمة وهذا المفهوم يتطابق مع مفهوم التقارب فوق البيان في الفضاءات منتهية البعد ويتطابق مع مفهوم موسكو في فضاءات باناخ انعكاسية . وعملنا سيكون استخدام هذا المفهوم في دراسة المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى في فضاءات منظمة غير منتهية وتعميم معظم النتائج الهامة التي توصل إليها روكافولار [13].

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة المشتقات من المرتبة الأولى وفق مفهوم سلايس لدالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى في فضاءات منظمة وإيجاد العلاقة بين هذه المشتقات وبين مشتقات فريشة وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في نظرية الأمثليات وتحديد الشروط الأمثلية لمسائل البرمجيات الخطية .

طرائق البحث ومواده:

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل المحدب والتي تساعدنا في عرض الموضوع، وسنستخدم مفهوماً جديداً للتقارب وهو تقارب سلايس الذي يعتبر من أهم المفاهيم الملائمة لدراسة المشتقات في فضاءات منظمة ولقد اُعتمد من قبل الكثير من الباحثين [2,3,4,5].

تعاريف ومفاهيم أساسية :

سنعتبر خلال هذا البحث أن E فضاء خطيا منظما ، وأن E^* فضاءه الثنوي وأن $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دالة معرفة على E ، سنرمز بـ $< z, x >$ للثنا الخطية بين z, x حيث $z \in E^*$ وسنفرض أن A مجموعة جزئية في E [1,8,10].

- نقول إن A مجموعة محدبة إذا وفقط إذا كان من أجل كل x, y من A وكل t من $[0,1]$ أن :

$$tx + (1-t)y \in A$$

- نقول إن f دالة محدبة إذا وفقط إذا كان من أجل كل x, y من E وكل t من $[0,1]$ أن:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- نقول إن f دالة نصف مستمرة من الأدنى في نقطة x من E إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) و متقاربة من النقطة X في E فإن

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \qquad (1)$$

- نعرف فوق البيان لدالة f ونرمز له بـ $epif$ بأنه مجموعة النقاط :

$$epif = \{(x,\propto) \in E \times \mathbb{R}; f(x) \leq \propto, \propto \in \mathbb{R}\}$$

ومن المعلوم أن f دالة محدبة إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة محدبة وأن f دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة مغلقة وأن f دالة خاصة إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة غير خالية [10].

- نعرف مرافقة الدالة f ونرمز لها بـ f^* بأنها الدالة المعرفة على E^* بالشكل :

$$f^*(z) = \sup_{x \in E} \{< z, x > - f(x)\} \quad \forall z \in E^* \qquad (2)$$

- نعرف المؤثر تحت التفاضل(subdifferential) $(\partial f(x))$ لدالة محدبة f في نقطة x من E (f محدودة في النقطة x) بالعلاقة:

$$\partial f(x) = \{z \in E^*; f(h) \geq f(x) + < z, h - x >; \forall h \in E\} \qquad (3)$$

ونشير إلى أنه في العلاقة التي التحليل المحدب تتحقق العلاقة الآتية :

$$z \in \partial f(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in B(x,\varepsilon); f(\xi) \geq f(x) + < z, \xi - x > \qquad (4)$$

حيث إن $B(x,\varepsilon)$ هي الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها ε .

- نقول إن للدالة f قيمة موضعية صغرى في x إذا وفقط إذا وجد $\propto > 0$ بحيث أن $f(x) \leq f(u)$ وذلك من أجل $\|u - x\| \leq \propto$ مهما يكن u من E .

ونقول إن لـ f قيمة صغرى في x إذا وفقط إذا كان $f(x) \leq f(u)$ من أجل كل u من E. ويبرهن بسهولة أنه إذا كان للدالة f قيمة موضعية صغرى في x فإن لها قيمة صغرى في x .

نرمز بـ $\Gamma(E)$ لمجموعة الدوال المحدبة، نصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرفة من E.

ونرمز بـ $C(E)$ لكل المجموعات الجزئية غير الخالية المحدبة والمغلقة في E .

ونرمز بـ $CB(E)$ لكل المجموعات الجزئية غير الخالية المحدبة والمغلقة المحدودة في E.

نعرف التطبيق (Gap functions) $D(A,C)$ بين المجموعتين A,C من $C(E)$ بالعلاقة :

$$D(A,C) = \inf\{\|a - c\| : a \in A \text{ and } c \in C\} \qquad (5)$$

في هذه النشرة نعرف على $C(E)$ التبولوجيا المولدة بالأسرة $\{D(B,.) : B \in CB(E)\}$ وتدعى تبولوجيا سلايس τ_s (انظر [5]).

<u>**تقارب سلايس للمجموعات، تقارب موسكو للمجموعات:**</u> [6]

لتكن $\{A_n\}$ متتالية مجموعات من $C(E)$ نقول أن A_n تتقارب من $A \in C(E)$ وفق سلايس إذا وفقط إذا كان:

$$D(A,B) = \lim_{n\to\infty} D(A_n,B) \qquad (6)$$

وذلك من أجل كل مجموعة B غير خالية و مغلقة ومحدودة ومحدبة وجزئية في E .

ونقول إن A_n تتقارب من A وفق موسكو إذا وفقط إذا كان:

$$D(A,K) = \lim_{n\to\infty} D(A_n,K) \qquad (7)$$

وذلك من أجل كل مجموعة K غير خالية ومتراصة بضعف ومحدبة وجزئية في E. ولكون كل مجموعة مغلقة ومحدودة ومحدبة وجزئية في أي فضاء انعكاسي هي مجموعة متراصة بضعف ومحدبة والعكس صحيح فإن تقارب سلايس يتطابق مع تقارب موسكو إذا كان الفضاء انعكاسياً.

تقارب موسكو للدوال: [11]

لتكن $\{f_n, f: E \to R\cup\{+\infty\};\ n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال. نقول إن (f_n) متقاربة وفق موسكو نحو f وسنرمز لذلك بالشكل: $f = M - \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$(i)\qquad \forall x\in E, \forall x_n \xrightarrow{w} x : f(x) \le \liminf_{n\to+\infty} f_n(x_n)$$

$$(ii)\qquad \forall x\in E, \exists x_n \xrightarrow{s} x : f(x) \ge \limsup_{n\to+\infty} f_n(x_n)$$

حيث إن ω, s تشيران إلى التقارب القوي والضعيف على الترتيب. في الحقيقة إن تقارب موسكو لا يقدم نتائج مهمة إلا إذا كان الفضاء E فضاء باناخ انعكاسي وكانت الدوال $f_n \in \Gamma(E)$.

تقارب سلايس للدوال: [5]

لتكن $\{f_n, f: E \to R\cup\{+\infty\};\ n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال المنتمية إلى $\Gamma(E)$، نقول إن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f وسنرمز لذلك بالشكل: $(\ f = \tau_s - \lim\limits_{n\to\infty} f_n\ )$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) من أجل كل $(y,\eta) \in epi(f^*)$ مع $f^*(y) < \eta$ ومن أجل كل متتالية محدودة (ξ_n) من نقاط E يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث أنه مهما يكن $n > n_0$ فإن:

$$f_n(\xi_n) > \langle y, \xi_n\rangle - \eta.$$

(2) من أجل كل $\xi \in E$ يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط E بحيث إن $f(\xi) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\xi_n)$.

وقد برهن بيير في [5] أن المتتالية (f_n) متقاربة وفق سلايس من f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجموعات $(epi\, f_n)$ وفق سلايس من $epi\, f$.

ملاحظة :

عندما يتم التعامل مع أسرة من الدوال $(f_t)_{t\ge0}$ التابعة للدليل $t>0$ ، فإن تقارب سلايس للدوال f_t نحو f لما $t\to0$ يعرف بطريقة طبيعية وذلك بالقول إن $f_{t_n} \xrightarrow{\tau_s} f$ من أجل كل متتالية حقيقية $t\to0$ أي أن:

$$f = \tau_s - \lim_{n\to\infty} f_{t_n}$$

النتائج والمناقشة:

سنعتبر في هذه الفقرة أن $\{f_n, f: E \to R\cup\{+\infty\};\ n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال المنتمية إلى $\Gamma(E)$.

1- بعض خواص تقارب سلايس.

مبرهنة 1.1 :

إذا كانت $f = \tau_s - \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ عندئذٍ فإنَّ :

a) $f(\xi) \leq f_n(\xi)$ وذلك من اجل n كبير بقدرٍ كافٍ ومهما يكن $\xi \in E$.

b) من أجل كل متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من $\xi \in E$ فإن $f(\xi) \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n(\xi_n)$.

الإثبات :

a) من أجل المتتالية الثابتة $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ و من أجل كل $(y,\eta) \in epi(f^*)$ مع $f^*(y) < \eta$ فإنه بحسب تعريف الدالة المرافقة يكون $\langle y,x\rangle - \eta < f(x)$ وذلك من أجل كل x من E . لذلك فإنه بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث إنه مهما يكن $n > n_0$ فإن $\langle y,\xi\rangle - \eta < f_n(\xi)$ وبما أن $f \in \Gamma(E)$ فإن f هي الغلاف العلوي لجميع الدوال الملساء المستمرة والتي تحد f من الأدنى لذلك فإن $f(\xi) \leq f_n(\xi)$ من أجل كل $n > n_0$.

b) بحسب ما سبق فإن $f(\xi_n) \leq f_n(\xi_n)$ وذلك من أجل كل $n > n_0$. الأمر الذي ينتج من ذلك أن

$$f(\xi) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(\xi_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n(\xi_n)$$

وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 1.2:

لنفرض أن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f عندئذ (λf_n) تتقارب وفق سلايس من λf من أجل كل $\lambda > 0$.

الإثبات :

لتكن $(y,\eta) \in epi((\lambda f)^*)$ مع $(\lambda f)^*(y) < \eta$ ولتكن (ξ_n) متتالية كيفية ومحدودة من نقاط E عندئذ لكون $(\lambda f)^*(y) < \eta$ فإن $sup_{y\in E^*}\{\langle y,\xi\rangle - \lambda f(\xi)\} < \eta$ وبالتالي فإن $\lambda\, sup_{\frac{y}{\lambda}\in E^*}\left\{\langle \frac{y}{\lambda},\xi\rangle - f(\xi)\right\} < \eta$. ومنه $(f^*)\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \frac{\eta}{\lambda}$.

بما أن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f وبما أن $(f^*)\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \frac{\eta}{\lambda}$ فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث إنه مهما يكن $n > n_0$ فإن $f_n(\xi_n) > \langle \frac{y}{\lambda},\xi_n\rangle - \frac{\eta}{\lambda}$ أي أن $(\lambda f_n)(\xi_n) > \langle y,\xi_n\rangle - \eta$

وبالتالي فإن الشرط الأول لتقارب سلايس محقق، أما الشرط الثاني فيبرهن بسهولة. وبذلك يتم المطلوب.■

مبرهنة 1.3 :

لنفرض أن (f_n) متتالية متزايدة بحيث إن $f = sup\ f_n$ لا يطابق $+\infty$ عندئذ فإن (f_n) متقاربة وفق سلايس نحو f.

الإثبات :

ليكن $(y,\eta) \in epi(f^*)$ مع $f^*(y) < \eta$ ولتكن (ξ_n) متتالية محدودة من نقاط E عندئذ ولكون $f^*(y) < \eta$ فإنه من أجل كل x من E سيكون:

$$\langle y,x\rangle - \eta < f(x) = sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

ومنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث إنه مهما يكن $n > n_0$ فإن $\langle y,\xi_n\rangle - \eta < f_n(\xi_n)$

وهذا يعني أن الشرط الأول من تقارب سلايس محقق. ليكن $\xi \in E$ عنصراً كيفياً عندئذ بأخذ المتتالية الثابتة (ξ_n) ومراعاة أن (f_n) متتالية متزايدة سنجد مباشرةً أن الشرط الثاني محقق. وبذلك يتم المطلوب. ■

2 – المشتق من المرتبة الأولى وفق سلايس.

تعريف 2.1 :

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى في $x\in E$ وفق سلايس إذا كانت نسب الدوال التفاضلية

$$(\Delta_t f)_x(\xi)=\frac{1}{t}\{f(x+t\xi)-f(x)\};\ \xi\in E.\quad (t>0) \tag{9}$$

تتقارب وفق سلايس عندما $(t\to 0)$ من دالة $\varphi\in\Gamma(E)$. تدعى الدالة φ مشتق سلايس فوق البيان من المرتبة الأولى للدالة f في x . وسنكتب $f_x^{'}$ بدلاً من φ. أي أن $f_x^{'}=\tau_s-\lim_{t\to 0}(\Delta_t f)_x$

نقول إن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة x من E.

مبرهنة 2.2 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E فإن:

$f_x'(\xi)\le(\Delta_t f)_x(\xi)$ وذلك $\forall t>0$.

الإثبات :

ينتج البرهان من كون الدوال $(\Delta_t f)_x$ متناقصة عندما t تتناقص نحو الصفر. وبمراعاة المبرهنة 1.1.■

مبرهنة 2.3 :

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ لدينا :

(1) الدالة f_x' متجانسة إيجابياً من المرتبة الأولى .

(2) $f_x'(0)=0$.

الإثبات :

حتى تكون f_x' متجانسة إيجابياً من المرتبة الأولى يجب أن يكون $f_x'(\lambda\xi)=\lambda f_x'(\xi)$ وذلك مهما يكن $\lambda>0$. لذلك من أجل كل $\xi\in E$ لدينا :

$$\forall\lambda>0:\ (\Delta_t f)_x(\lambda\xi)=\{f(x+\lambda t\xi)-f(x)\}/t\,;\forall t>0,\forall\xi\epsilon\mathrm{E}$$

بفرض أن $\eta=\lambda t$ نجد أن:

$$(\Delta_t f)_x(\lambda\xi)=\frac{\lambda}{\eta}\{f(x+\eta\xi)-f(x)\}=\lambda\,(\Delta_\eta f)_x(\xi);\eta>0$$

وبحسب المبرهنة 1.2 نجد أن :

$$\lambda f_x'(\xi)=\tau_s-\lim_n\left(\lambda(\Delta_{\eta_n}f)_x(\xi)\right)=\tau_s-\lim_n\left((\Delta_{t_n}f)_x(\lambda\xi)\right)=f_x'(\lambda\xi)$$

هنا n تسعى نحو عدم النهاية .

(2) نلاحظ بدايةً أن: $(\Delta_t f)_x(0)=0$ مهما يكن t .

وبما أن $\forall\ t_n\to 0$, $f_x^{'}=\tau_s-\lim_{n\to+\infty}(\Delta_{t_n}f)_x$ فإنه بحسب المبرهنة 2.2 نجد أن:

$$f_x'(0)\le(\Delta_{t_n}f)_x(0)=0$$

الأمر الذي يعني أن $f_x'(0)\le 0$ وأن f_x' ذو قيمة محدودة عند الصفر .

من جهة أخرى لكون f_x' متجانس إيجابياً من المرتبة الأولى نجد أن:

$$f_x'(0)=f_x'(\lambda.0)=\lambda f_x'(0)$$

الأمر الذي يعني أن $f_x'(0)=0$ وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.4 :

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ إذا كان للدالة f قيمة محلية صغرى في x فإن $f_x'(\xi) \geq 0$ وذلك مهما تكن $\xi \in E$.

الإثبات :

بما أن لـ f قيمة محلية صغرى في x ، فإن لها قيمة صغرى في x وبالتالي فإنه من أجل أي $\xi \in E$ ومن أجل أي متتالية t_n من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر فإن:

$$f(x + t_n\xi) \geq f(x)$$

وبالتالي فإن $\frac{f(x+t_n\xi)-f(x)}{t_n} \geq 0$ أي أن $(\Delta_{t_n}f)_x(\xi) \geq 0$.

الآن من أجل أي $\xi \in E$ فإنه بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس فإنه يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ بحيث أن

$$f_x'(\xi) = \lim_{n\to+\infty}\left(\Delta_{t_n} f\right)_x(\xi_n) \geq 0$$

الأمر الذي يعني أن $f_x'(\xi) \geq 0$. وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.5 :

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E، ولنفرض أن $f_x'(u - x) > 0$ وذلك من أجل كل $u \in E$ عندئذ فإنه لـ f قيمة صغرى في x .

الإثبات :

نلاحظ أنه من أجل كل $t \in (0,1]$ أن:

$$f(x + t(u-x)) = f(tu + (1-t)x) \leq tf(u) + (1-t)f(x)$$

وذلك لأن f محدبة، ومنه:

$$\begin{aligned} f(x + t(u-x)) - f(x) &\leq tf(u) + (1-t)f(x) - f(x) \\ &= t(f(u) - f(x)) \end{aligned}$$

وينتج عن ذلك أن:

$$\frac{f(x + t(u-x))}{t} \leq f(u) - f(x)$$

ومنه :

$$(\Delta_t f)_x(u - x) \leq f(u) - f(x)$$

لتكن الآن $(t_n)\,(t_n \to 0)$ متتالية من الأعداد الواقعة ضمن المجال $(0,1]$ والمتقاربة من الصفر عندئذ بحسب المبرهنة 1.1 نجد أن:

$$0 < f_x'(u-x) \leq \left(\Delta_{t_n} f\right)_x(u-x) \leq f(u) - f(x)$$

وهذا يعني أن $f(u) \geq f(x)$ من أجل u كيفية أي أن للدالة f قيمة صغرى في x على كامل E .

وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.6:

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ:

a) إذا كانت $z\epsilon\partial f(x)$ فإن :

$$f_x^{'}(\xi)\geq <z,\xi>,\ \forall\ \xi\in E$$

b) إذا كان $f_x^{'}(\xi)\geq <z,\xi>$ لكل $\xi\in E$ فإن $z\epsilon\ \partial f(x)$ وذلك مهما يكن $z\in E^{*}$.

الإثبات :

a) بما أن $z\epsilon\ \partial f(x)$ فإن $f(x+t\xi)\geq f(x)+t\langle z,\xi\rangle$ ومنه :

$$\frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t}\geq\langle z,\xi\rangle$$

وبالتالي $(\Delta_t f)_x(\xi)\geq\langle z,\xi\rangle$ ونتيجةً لتقارب $(\Delta_{t_n}f)_x$) وفق سلايس من $f_x'(\xi)$ فإنه بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس يوجد من أجل كل $\xi\in E$ متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ بحيث إن:

$$f_x^{'}(\xi)=\lim_{n\to+\infty}\left(\Delta_{t_n}f\right)_x(\xi_n)\geq\lim_{n\to+\infty}\langle z,\xi_n\rangle=\langle z,\xi\rangle$$

ومنه فإن $f_x'(\xi)\geq\langle z,\xi\rangle$ وذلك من أجل كل $\xi\in E$.

b) لنفترض أن $z\in E^{*}$ بحيث إن $f_x'(\xi)\geq\langle z,\xi\rangle,\ \ \forall\xi\epsilon E$ ولنفرض جدلاً أن $z\notin\partial f(x)$ عندئذ فبحسب العلاقة (4) يكون:

$$\forall\ \varepsilon>0;\exists h\in B(x,\varepsilon): f(h)<f(x)+\langle z,h-x\rangle$$

ويكافئ هذا بأنه توجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من الصفر بحيث أن:

$$f(x+\xi_n)-f(x)-<z,\xi_n>=\alpha_n<0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}\tag{10}$$

الآن بوضع

$$\varphi(\xi)=f(x+\xi)-f(x)-\langle z,\xi\rangle$$

نجد أن φ نصف مستمرة من الأدنى وأن $\varphi(0)=0$ وبالتالي فإن:

$$0=\varphi(0)\leq\liminf_{n\to\infty}\varphi(\xi_n)=\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}\alpha_n\leq0$$

أي أن $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ ونتيجةً لذلك يمكننا أن نفرض أن $0>\alpha_n>-1$ وذلك من أجل n كبيرة بقدر كاف.

من جهة أخرى فإن الدالة $g(\xi)=f(x+\xi)-f(x)$ محدبة وتحقق أن $g(0)=0$ وبالتالي فإنه من أجل n كبيرة بقدر كاف يكون :

$$g(-\alpha_n\xi)=g\left(-\alpha_n\xi+(1+\alpha_n)(0)\right)$$
$$\leq-\alpha_n g(\xi)+(1+\alpha_n)g(0)=-\alpha_n g(\xi);\ \forall\xi\in E$$

أي أن:

$$f(x+(-\alpha_n)\,\xi_n)-f(x)\leq-\alpha_n\left(f(x+\xi_n)-f(x)\right)$$

ونتيجةً لذلك نجد بأخذ $(t_n)=(-\alpha_n)$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر أن:

$$(\Delta_{-\alpha_n}f)_x(\xi_n)=\frac{f(x+(-\alpha_n)\,\xi_n)-f(x)}{-\alpha_n}\leq f(x+\xi_n)-f(x)$$

$$\left(\Delta_{-\alpha_n}f\right)_x(\xi_n)\leq<z,\xi_n>-(-\alpha_n)\tag{11}$$

بما أن $f_x^{'}(\xi)\geq<z,\xi>$ فرضاً لكل $\xi\in E$ فإن $(f_x')^{*}(z)\leq0$ وبالتالي فإن : $(f_x')^{*}(z)<-\alpha_n$ وذلك مهما يكن العدد الطبيعي n . ومنه من أجل المتتالية (ξ_n) المتقاربة من الصفر

والمحققة للعلاقة (10) وبأخذ $0<(t_n)=(-\alpha_n)\to 0$ نجد بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس للمتتالية $(\Delta_{-\alpha_n}f)_x$ نحو f'_x أن :

$$\left(\Delta_{-\alpha_n}f\right)_x(\xi_n)=\frac{f\left(x+(-\alpha_n)\xi_n\right)-f(x)}{-\alpha_n}><z,\xi_n>-(-\alpha_n) \qquad (12)$$

بمقارنة العلاقتين (11) ، (12) نجد أن هناك تناقضاً وسببه أن $z\notin\partial f(x)$ وهذا يعني أن $z\epsilon\,\partial f(x)$ وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.7 : [3] :

لتكن S,T مجموعتين محدبتين وغير خاليتين في فضاء تبولوجي متجهي وحقيقي X مع $\operatorname{int}(S)\neq\varnothing$ عندئذٍ سيكون $\operatorname{int}(S)\cap T=\varnothing$ إذا وفقط إذا وجد دالي خطي ومستمر Z مخالف للدالي الصفري وعدد حقيقي γ بحيث يكون $z(s)\le\gamma\le z(t)$ وذلك من أجل كل $s\in S$ وكل $t\in T$ مع $z(s)<\gamma$ وذلك مهما يكن $s\in\operatorname{int}(S)$ حيث إن $\operatorname{int}(S)$ تشير إلى داخلية S.

مبرهنة 2.8 :

ليكن E فضاءً منظماً ما ، وليكن $f:E\to R$ حيث $f\in\Gamma(E)$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x من E مع $\operatorname{int}(epi)\neq\varnothing$ عندئذٍ فإن :

$$f'_x(\xi)=\max\{\langle z,\xi\rangle,\quad \forall z\in\partial f(x)\}\ .$$

الإثبات :

بما أن f دالة محدبة ومستمرة في x فإن $\partial f(x)\neq\varnothing$ وعندئذٍ من أجل كل $z\in\partial f(x)$ فإن:

$\langle z,\xi\rangle\le f'_x(\xi)$ وذلك مهما يكن $\xi\in E$ ، وبالتالي فإن:

$$\max\{\langle z,\xi\rangle\quad ;z\in\partial f(x)\}\le f'_x(\xi)$$

الآن لإثبات أن $f'_x(\xi)\le\max\{\langle z,\xi\rangle\quad ;z\in\partial f(x)\}$ علينا إيجاد $z\in\partial f(x)$ بحيث أن $f'_x(\xi)=\langle z,\xi\rangle$ وذلك مهما يكن ξ . من أجل ذلك لنأخذ المجموعة المحدبة التالية :

$$T=\{(x+t\xi,f(x)+tf'_x(\xi))\in E\times R\quad ,t>0\,,\,\xi\in E\}$$

عندئذٍ بحسب المبرهنة (2.2) فإن : $f(x+t\xi)\ge f(x)+tf'_x(\xi)\quad ,\forall t\ge 0$

وهذا يعني أن :

$$(x+t\xi,f(x)+tf'_x(\xi))\notin\operatorname{int}(epif)\quad ,\forall t\ge 0.$$

وبالتالي فإن : $\operatorname{int}(epif)\cap T=\varnothing$.

الآن بما أن $epif$, T محدبتان و $\operatorname{int}(epif)\cap T=\varnothing$ فإنه بحسب المبرهنة 2.7 يوجد $z\in E^*$ وعددان γ,β بحيث أن $(z,\beta)\neq(0_{E^*},0)$ وتتحقق العلاقة :

$$\langle z,u\rangle+\beta\alpha\le\gamma\le\langle z,x+t\xi\rangle+\beta(f(x)+tf'_x(\xi)) \qquad (13)$$

وذلك من أجل كل $(\alpha,u)\in epif$ وكل $t\ge 0$.

عندئذٍ من أجل $u = x$ و $t = 0$ نحصل بشكل خاص على $\alpha \ge f(x) = f(u)$ ومنه $\beta\alpha \le \beta f(x)$ الأمر الذي يعني أن $\beta \le 0$.

إذا فرضنا أن $\beta = 0$ وبأخذ $t = 0$ نحصل من المتراجحة (13) على $0 \le \langle z, u - x \rangle$ وذلك من أجل كل $u \in E$ الأمر الذي يعني أن $z = 0_{E^*}$. فإذا كان $z = 0_{E^*}, \beta = 0$ فإن $(z, \beta) = (0_{E^*}, 0)$ وهذا تناقض ، إذاً $\beta \ne 0$ لذلك يجب أن تكون $\beta < 0$. لذلك من أجل كل $(u, \alpha) \in epif$ وبحسب العلاقة (13) نحصل على :

$$\frac{1}{\beta}\langle z, u - x - t\xi \rangle + \alpha \ge f(x) + tf_x'(\xi) \qquad (14)$$

بتعويض $t = 0, \alpha = f(u)$ في (14) سنجد أن:

$$f(u) \ge f(x) - \frac{1}{\beta}\langle z, u - x \rangle \quad , \forall u \in E$$

الأمر الذي يعني أن:

$$\frac{1}{\beta} z \in \partial f(x) \qquad (15)$$

الآن من اجل $u = x$, $\alpha = f(x)$ سنحصل من (14) على :

$$-\frac{1}{\beta}\langle z, \xi \rangle \ge f_x'(\xi) \qquad (16)$$

من (17) و (16) نحصل على: $f_x'(\xi) \le \max\{\langle z, \xi \rangle \quad ; z \in \partial f(x)\}$

الأمر الذي يعني مع مراعاة المتراجحة المعاكسة المبينة في بداية المبرهنة أن :

$f_x'(\xi) = \max\{\langle z, \xi \rangle \quad ; \quad z \in \partial f(x)\}$. وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.9 :

ليكن X ، E فضائين منظمين وليكن $A : X \to E$ مؤثراً خطياً إيزومورفيزم ولتكن f دالة من $\Gamma(E)$ وليكن $x \in X$. إذا كان f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax فإن $f \circ A$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x مع :

$$(f \circ A)'_x(\xi) = f'_{Ax}(A\xi) = (f'_{Ax} \circ A)(\xi)$$

الإثبات :

بدايةً نلاحظ أن :

$$(\Delta_t f)_{Ax}(A\xi) = \frac{f(Ax + t.A\xi) - f(Ax)}{t}$$

$$= \frac{(f \circ A)(x + t\xi) - (f \circ A)(x)}{t} = (\Delta_t (f \circ A))_x(\xi)$$

لنفرض أنَّ f قابلاً للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax، ولنبين أن الدوال $(\Delta_t (f \circ A))_x$ ستتقارب وفق سلايس من $(f'_{Ax} \circ A)$ ، من أجل ذلك لنأخذ أي متتالية محدودة (ξ_n) من نقاط X عندئذ ونتيجةً لكون A خطي و إيزومورفيزم فإن المتتالية $(A\xi_n)$ محدودة أيضاً .

ليكن $(y, \eta) \in epi(f' \circ A)^*$ مع $(f' \circ A)^*(y) < \eta$. عندئذ بحسب تعريف الدالة المرافقة فإن:

$$\langle y,\xi_n\rangle-\eta<(f'_{Ax}\circ A)(\xi_n)=f'_{Ax}(A(\xi_n));\forall n\in\mathbb{N}$$

وبالتالي ونتيجةً لكون f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax فإنه بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس فإنه يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث إنَّ :

$$\forall n>n_0\ (\Delta_{t_n}f)_{Ax}(A\xi_n)>\langle y,\xi_n\rangle-\eta\ ;$$

ومنه
$$(\Delta_{t_n}(f\circ A))_x(\xi_n)>\langle y,\xi_n\rangle-\eta$$

إذاً الشرط الأول من تقارب سلايس محقق. ولبيان تحقق الشرط الثاني فإنه لكون f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في Ax فإنَّها من أجل أيّ $\xi\in X$ يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط X متقاربة من ξ (وبالتالي ونتيجةً لأن A إيزومورفيزم فإن المتتالية $(\xi'_n)=(A\xi_n)$ متقاربة من $\xi'=A\xi$) بحيث إنَّ :

$$(f'_{Ax}\circ A)(\xi)=f'_{Ax}(A\xi)=f'_{Ax}(\xi')=\lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}f)_{Ax}(A\xi_n)=\lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}(f\circ A))_x(\xi_n)$$

وبتحقق شرطي تقارب سلايس نجد أنَّ $(f\circ A)$ قابل للاشتقاق وفق سلايس في x. وبذلك يتم المطلوب. ■

3- العلاقة بين المشتق وفق سلايس ومشتق فريشت لدالة محدبة.

لقد بين روكافيلر أن المشتق فوق البيان لدالة f من $\Gamma(E)$ من المرتبة الأولى يطابق مشتق فريشيه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في فضاءات منتهية البعد. وما سنبينه نحن هو أن مشتق سلايس لدالة f تنتمي إلى $\Gamma(E)$ يطابق مشتق فريشيه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في فضاءات خطية منظمة .

مبرهنة 3.1 :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x فإن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x مع :
$$f'_x(\xi)=\langle Df(x),\xi\rangle$$

الإثبات :

بما أن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x فإن f من $\Gamma(E)$، و الدالة $\varphi(\xi)=\langle Df(x),\xi\rangle$ من $\Gamma(E)$ الآن وبواسطة صيغة تايلور من المرتبة الأولى سنجد أن:

$$f(x+t\xi)=f(x)+t\langle Df(x),\xi\rangle+o(\|t\xi\|)$$

حيث إن :
$$\lim_{t\to 0}\frac{o(t\|\xi\|)}{t}=0$$

لتكن
$$(\Delta_t f)_x(\xi)=\langle Df(x),\xi\rangle+\frac{o(t\|\xi\|)}{t}$$

ولنبرهن الآن أن $\varphi=\tau_s-lim_n(\Delta_{t_n}f)_x$ وذلك من أجل كل متتالية (t_n) من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر.

لتكن $(y,\eta)\in epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y)<\eta$ (وبالتالي $\langle y,\xi\rangle-\eta<\varphi(\xi)$ وذلك من أجل كل $\xi\in E$ ولتكن (ξ_n) متتالية محدودة كيفية من نقاط E عندئذ بما أن $\frac{o(t_n\|\xi\|)}{t_n}$ موجب فإنه من الواضح أن

$$(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n)=\varphi(\xi_n)+\frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n}>\langle y,\xi_n\rangle-\eta.$$

وبهذا يتحقق الشرط الأول من تقارب سلايس. أما لإثبات تحقق الشرط الثاني فإنه من أجل كل $\xi\in E$ ومن أجل أية متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ ومن أجل أي $t_n\to 0$ فإن :

$$lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) = lim_{n\to\infty}\,\varphi(\xi_n) + lim_{n\to\infty}\frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n} = \varphi(\xi).$$

وذلك لأن φ دالة مستمرة. بتحقق شرطي تقارب سلايس نجد أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس وأن $f'_x(\xi) = \langle Df(x),\xi\rangle$. وبذلك يتم المطلوب. ■

ملاحظة 3.2

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بصورة عامة و يتوضح ذلك بأخذ دالة النظيم المعرفة على الفضاء $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{R})$. إن هذه الدالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس لكنها ليست قابلة للاشتقاق وفق فريشيه (Frechet).

مبرهنة 3:3 :

ليكن E فضاء خطياً منظماً ولتكن $g:E\to R\cup\{+\infty\}$ ، $f:E\to R$ دالتين من $\Gamma(E)$ ولتكن x إحدى نقاط E ولنفرض أن f قابلة للإشتقاق وفق فريشيه في x وأن g قابل للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x وليكن $h=f+g$، عندئذ فإن h قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x مع :

$$h'_x(\xi) = <Df(x),\xi> + g'_x(\xi)\ ,\forall\xi\in E\ .$$

الإثبات :

1) بدايةً لكون $h=f+g$ فإنه من الواضح أن:

$$(\Delta_\tau h)_x(\xi) = (\Delta_\tau f)_x(\xi) + (\Delta_\tau g)_x(\xi)$$

ولنبرهن الآن أن $(\Delta_t h)_x$ تتقارب وفق سلايس من $\varphi(\xi) = <Df(x),\xi> + g'_x(\xi)$.

ولتكن $(y,\eta)\epsilon epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y)<\eta$ وبالتالي حسب تعريف الدالة المرافقة ومن أجل (ξ_n) المتتالية المحدودة الكيفية من نقاط E و بحسب المبرهنتين 2.2 و 1.1 نحصل على:

$$\varphi(\xi_n) = \langle Df(x),\xi_n\rangle + g'_x(\xi_n) \le (\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) \ + (\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n),\forall n\in\mathbb{N}$$

الأمر الذي يعني أن $(\Delta_{t_n}h)_x(\xi_n) = (\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) + (\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n) > \langle y,\xi_n\rangle - \eta, \forall t_n\to 0.$

وبالتالي يتحقق الشرط الأول من تقارب سلايس .

الآن وبحسب صيغة تايلور من المرتبة الأولى فإننا نستطيع أن نكتب:

$$(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) = \langle Df(x),\xi_n\rangle + \frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n}$$

وبالتالي فإن: $lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) = lim_{n\to\infty}\langle Df(x),\xi_n\rangle + lim_{n\to\infty}\frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n} = \langle Df(x),\xi\rangle$

وذلك من أجل كل متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ .

من جهة أخرى ونتيجةً لكون g قابل للإشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى فإنه توجد متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ بحيث إن $g'_x(\xi) = \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n)$ وبالتالي من أجل هذه المتتالية (ξ_n) فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_{\tau_n}h)_x(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}(\Delta_{\tau_n}f)_x(\xi_n) + \lim_{n\to\infty}(\Delta_{\tau_n}g)_x(\xi_n) = \varphi(\xi)$$

الأمر الذي يعني أن الدوال $(\Delta_\tau h)_x$ متقاربة وفق سلايس من φ وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 3.4:

تحت نفس شروط المبرهنة 3.3 لدينا العلاقة

$z = Df(x) + y \in \partial h(x) \Leftrightarrow y \in \partial g(x)$.

الإثبات :

لنفترض أولاً أن $y \in \partial g(x)$ عندئذ فإن: $g(\xi) \geq g(x) + < y, \xi - x > , \forall \xi \in E$

وبما أن f دالة محدبة وقابلة للاشتقاق وفق فريشه :

$$f(\xi) \geq f(x) + < Df(x), \xi - x > , \forall \xi \in E$$

وبجمع العلاقتين السابقتين نجد أن

$$h(\xi) \geq h(x) + < Df(x) + y, \xi - x > , \forall \xi \in E$$

الأمر الذي يعني أن $z = Df(x) + y \in \partial h(x)$

ومن أجل العكس لنفرض أن $z = Df(x) + y \in \partial h(x)$ عندئذ وبحسب المبرهنة $(2.6, a)$ فإنه

$$< Df(x) + y, \xi > \leq h'_x(\xi) = < Df(x), \xi > + g'_x(\xi) \quad \forall \xi \in E$$

ومنه : $< y, \xi > \leq g'_x(\xi) \quad \forall \xi \in E$ وبالتالي وبحسب المبرهنة $(2.6, b)$ فإن $y \in \partial g(x)$.

وبذلك يتم المطلوب. ■

الاستنتاجات والتوصيات:

نوصي في نهاية هذا البحث أن تتم دراسة المشتقات وفق سلايس لمراتب عليا وبيان علاقتها مع مشتقات فريشت من مراتب عليا وما إذا كان يمكن تطبيق النتائج التي سيتم الحصول عليها في الحصول على القيم الدنيا وما إذا كان يمكن دراسة هذه المشتقات على مجموعات ذات خاصية مفيدة في تعيين القيم الدنيا مثل :المجموعة المخروطية $(Cone\ Sets)$ والمجموعة $(Tangent\ Cone)$.

المراجع:

[1] Attouch, H. *Variational convergence for functions and operators.* London, 1984, 264-333.
[2] Attouch, H ; Beer, B. *On the convergence of subdifferentials of convex functions.* Arch. Math. Vol. 60, 1993, 389-40.
[3] Beer, B. *On the Young-Fenchel transform for convex functions.* Amer .Math .Soc. 104,1115 – 1123.
[4] Beer, B. *On Mosco convergence for convex sets.* Bull.Aust.Math.Soc. 38, 1988 , 239 – 253.
[5] Beer, B. *The slice convergence : a viable alternative to Mosco convergence in non reflexive spaces*.sém. D'Anal.Convexe Montpellier, exposer n° 3, 19, 1992, 271-290.
[6] Cominetti, R . *On Pseudo-differentability*. Trans. Amer. Math. Soc., 322,1996.
[7] *C.N,DO , " Generalized Second derivatives of convex functions in reflexive Banach spaces ,"* Transactions Amer . Math. Soc . 334, 1982, 281-310**.**
[8] Ekeland, I.; Temam, T. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Paris, Dunod,1974, 12-52.
[9] J,JAHN .*Introduction to the theory of nonlinear optimization* ,Springer – Verlag , Berlin Heidelberg ,1996, 201-224.
[10] PHELPS,R .*Convex functions ,Monoton operators ,And differentiability* . Lecture notes in mathematics 1364 ,Springer – Verlag ,Berlin ,1989, 13-43.
[11] Mosco,M. *On the continuity of the Y0ung-Fenchel transformation.*Math.Anal.Appl.35,1971, 318-335.
[12] Rockafellar, R. : *Second-Order Variational Analysis and Bedond* . Conférence sur l'Analyse Variationnelle et l'Optimisation, Université de Montpellier II, France, 9-12 Septembre,2009.
[13] Rockafellar, R. *First and second-order epi-differentability in nonlinear programming*. Trans. Amer. Math. Soc.307 ,1988, 75-108.
[14] Rockafellar, R. *Second-order optimality conditions in nonlinear programming obtiened by way of epi-derivatives*. Math. of Op. Res., 14,1989, 462-484.
[15] M. Soueycatt : On second-order epi-derivativse in terms of $\rho-$Housdoroff distance. Mu'tah Lil-Buhuth Wad-Dirasat, Wad-Dirasat, 3, 2010.