مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

شبكة الزمر البوليانية المنتهية (LBG)

الدكتور محمد الشيخ*
رؤوف درويش**

(تاريخ الإيداع 16 / 5 / 2011. قُبِل للنشر في 24 / 8 /2011)

□ ملخّص □

إن الهدف من هذا العمل هو دراسة الزمرة البوليانية المنتهية والتي تعرف بأنها الزمرة التي فيها كل عنصر x رتبته 2 ، وقد أثبتنا أن رتبة الزمرة البوليانية المولدة بـ n عنصراً هي 2^n ، سنرمز للزمرة البوليانية من الرتبة 2^n بالرمز B_n ، كما أثبتنا أن كل زمرة بوليانية من الرتبة 2^n ايزومورفية مع الزمرة $(Z_2^n, \oplus)$.

وفي هذه الحالة فإن كل عنصر من عناصر الزمرة البوليانية B_n يمكن التعبير عنه كمتتالية من n مركبة عناصرها من $\{0,1\}$ ، وبينّا كذلك أن كل زمرة بوليانية هي زمرة مرتبة بعملية ترتيب $\leq$ ثم إن كل زمرة بوليانية B_n هي شبكة مع العمليتين $\vee$ و $\wedge$ إثبات أنها شبكة بوليانية .

الكلمات المفتاحية: الزمرة البوليانية ، الشبكة البوليانية

* مدرس في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين-اللاذقية - سورية
** طالب ماجستير- قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة تشرين-اللاذقية - سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

Lattice Finite Boolean Groups (LBG)

Dr. Mohammad Alcheikh*
Raouf darweesh**

(Received 16 / 5 / 2011. Accepted 24 / 8 /2011)

□ ABSTRACT □

The purpose of this paper is to study the finite Boolean group which is known as the group in which every element *x* has order 2. We proved that the Boolean group order was generated by *n* elements is 2^n . We refer to the Boolean group from order 2^n as B_n .

In addition, we proved that every Boolean group from order 2^n was an isomorphism with the group ($Z_2^n, \oplus$). So, in this situation every element of the Boolean group B_n can be represented as a sequence of n projection whose elements are of $\{0,1\}$. We also showed that the Boolean group is an organized group by the order operation. Thus, every Boolean is a lattice with two operations $\wedge$ and $\vee$. This proves that it is a Boolean lattice.

Keywords: Boolean group, Boolean lattice.

***Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Postgraduate Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

إن هذا البحث هو دراسة نظرية لمفهوم يقع ضمن علم الجبر المجرد والمنطق الرياضي (جبر بول) وامتداد لدراسات سابقة ، لقد درس العديد من الباحثين الزمرة البوليانية في مجالات مختلفة بحسب أهميتها،حيث قاموا بدراسة التعبير عن الزمرة البوليانية والحلقة البوليانية وذلك من خلال دراسة إيجاد متطابقة وحيدة أصغريه وقد قام بذلك MENDELSOHN و PADMANABHAN [2] ، [3] .

واهتم الباحثون أيضاً بتطبيقات الزمرة البوليانية في بعض الحالات الاجتماعية ودراسة العلاقة بين الزمرة البوليانية والبيان التكعيبي وقد قام بذلك SUTNER [4] .

دراستنا تتركز على دراسة الزمرة البوليانية والتي هي زمرة رتبة كل عنصر فيها 2 أي أن $x^2 = e$ من أجل كل x حيث e هو العنصر الحيادي في تلك الزمرة [1].

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة وإضافة العديد من الخواص والمبرهنات البسيطة حيث قمنا بالبرهان على أن :

- رتبة كل زمرة بوليانية منتهية هي 2^{n} ، n هو عدد مولداتها .
- يوجد ايزومورفيزم بين كل زمرة بوليانية من الرتبة 2^n والزمرة $(Z_2^n, \oplus)$
- أن الزمرة البوليانية هي شبكة بوليانية وفق علاقة ترتيب معرفه عليها .

طرائق البحث ومواده:

اعتمدت طرائق البحث على الاطلاع على العديد من المراجع العلمية والبحوث النظرية المنشورة وكذلك البحوث التطبيقية وقمنا بوضع بعض التعاريف الأساسية التي سنستخدمها في البرهان على صحة المبرهنات وتطرقنا إلى بعض الأمثلة والتطبيقيات للزمرة البوليانية

تعاريف:

<u>تعريف1</u> [5]: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة نقول عن العنصر g من E إنه عنصر أكبر في المجموعة E إذا كانت جميع عناصر المجموعة E ترتبط بهذا العنصر بالعلاقة :

$$x \leq g \,;\, \forall x \in E$$

ونقول عن العنصر p من E إنه عنصر أصغر في المجموعة E إذا كان يرتبط مع جميع عناصر المجموعة E بالعلاقة :

$$\mathrm{p} \leq x \,;\, \forall x \in E$$

<u>تعريف2</u> [5]: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن $A \subseteq E$ نقول عن عنصر $s \in E$ إنه حد أعلى للمجموعة A إذا حقق الشرط : $x \leq s \,;\, \forall x \in A$

وإذا وجد مثل هذا العنصر فإننا نسمي A مجموعة محدودة.

<u>تعريف 3</u> [5]: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن $A \subseteq E$ نقول عن عنصر $s \in E$ إنه حد أعلى أصغري للمجموعة A إذا حقق الشرطين :

1) s حد أعلى للمجموعة A

2) إذا كان $\acute{s}$ حداً أعلى آخر للمجموعة A فإن $s \leq \acute{s}$

نرمز للحد الأعلى الأصغري للمجموعة A بالرمز $s = supA$

تعريف4 [5] : لتكن $(T, \leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن $A \subseteq E$ نقول عن عنصر $q \in E$ إنه حد أدنى للمجموعة A إذا حقق الشرط : $q \leq x \;;\; \forall x \in A$

تعريف 5 [5]: لتكن $(T, \leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن $A \subseteq E$ نقول عن عنصر $q \in E$ إنه حد أدنى أعظمي للمجموعة A إذا حقق الشرطين :

1) q حد أدنى للمجموعة A

2) إذا كان $\acute{q}$ حداً أعلى آخر للمجموعة A فإن $\acute{q} \leq q$

نرمز للحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A بالرمز $q = infA$

تعريف6 [5] : نقول عن مجموعة غير خالية مرتبة $(T, \leq)$ أنها شبكة إذا كان :

$\forall x, y \in T$ عندئذ $inf\{x, y\} \in T \;\wedge\; sup\{x, y\} \in T$

ونكتب $x \wedge y = inf\{x, y\}$ و $x \vee y = sup\{x, y\}$

ونعبر عن الشبكة بالبنية $(T, \leq, \vee, \wedge)$

تعريف7 [5]: نقول عن الشبكة $(T, \leq, \vee, \wedge)$ إنها توزيعية إذا كان من أجل كل $x, y, z \in T$ يتحقق أحد الشرطين الآتيين :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

تعريف8 [5]: نقول عن الشبكة $(T, \leq, \vee, \wedge)$ إنها مغلقة إذا كانت $(T, \leq)$ تملك عنصراً أصغر نرمز له بالرمز $\mathbf{0}$ وعنصراً أكبر نرمز له بالرمز $\mathbf{1}$ ونرمز لهذه الشبكة بالرمز $(T, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

تعريف 9 [5]: لتكن $(T, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ شبكة مغلقة وليكن $x \in T$. إذا وجد في T عنصر مثل y يحقق الشرطين : $x \vee y = \mathbf{1}$ و $x \wedge y = \mathbf{0}$ فإننا نسمي العنصر y متمم العنصر x ونرمز له بالرمز $\bar{x}$ إذا كان وحيداً.

تعريف 10 [5]: نقول عن الشبكة $(T, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ إنها شبكة متممة إذا كان لكل عنصر من T متمم واحد على الأقل .

تعريف11 [5]: نسمي شبكة بول كل شبكة مغلقة ، متممة وتوزيعية نرمز لشبكة بول بالبنية $(T, \leq, \vee, \wedge, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

تعريف12 [6]: لتكن G زمرة و a عنصراً كيفياً من G . نعرف $\langle a \rangle = \{a^i \,; i \in Z\}$ ندعو $\langle a \rangle$ الزمرة الجزئية من G المولدة بـ a .

النتائج والمناقشة:

I- الزمرة البوليانية

تعريف1 [1]:الزمرة المنتهية $(G, *)$ نسميها زمرة بوليانية إذا كان رتبة كل عنصر مختلف عن e فيها تساوي 2 يرمز عادة لـ$x * y$ بالرمز $x.y$

مثال1 : الزمرة $(P(X),\Delta)$ حيث X مجموعة غير خالية و P(X) مجموعة أجزاء X معرفة عليها عملية الفرق التناظري بالشكل التالي:

$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B); \forall A , B \in P(X)$$

هي زمرة بوليانية

مثال 2: زمرة كلين الرباعية المعرفة بالجدول التالي :

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	a	a	e

هي زمرة بوليانية وفي هذه الزمرة نلاحظ أن كل عنصر $x \in \{a , b , c\}$ يحقق $x * x = e$

مبرهنة1: كل زمرة بوليانية هي زمرة إبدالية .

فيما يلي سنكتب xy بدلاً من $x * y$

الإثبات:

مهما تكن $x, y \in B$ فإن $xy \in B$ لأنها مغلقة وبالتالي يمكننا أن نكتب

$$(xy)(xy) = e \Rightarrow$$
$$x(xy)(xy) = xe \Rightarrow (xx)y(xy) = x$$
$$\Rightarrow ey(xy) = x \Rightarrow y(xy) = x \Rightarrow yy(xy) = yx$$
$$\Rightarrow e(xy) = yx \Rightarrow xy = yx , \forall x, y \in B$$

مبرهنة2: لتكن B زمرة بوليانية منتهية عندئذ :

1) رتبة B هي قوة لـ 2 : $|B| = 2^{\mathrm{n}}$

2) B هي الجداء المباشر ل n زمرة جزئية دورية $H_1, \dots , H_n$ في B ، رتبة كل منها تساوي 2 $|B| = 2^{\mathrm{n}}$

3) n هو عدد مولدات الزمرة البوليانية .

الإثبات :

بما أن B زمرة إبدالية فإن كل زمرة جزئية منها هي زمرة جزئية نظامية ، ليكن $x_1 \in B ; x_1 \neq e$ إن رتبة أي عنصر هي 2 بالتالي فإن $H_1 = \langle x_1 \rangle$ حيث إن H_1 زمرة جزئية نظامية في B و رتبتها 2 إذا كان $B =$ H_1فقد تم المطلوب لآن $|B| = |H_1| = 2$. لنفرض أن $B \neq H_1$ وليكن $x_2 \in B$ و $x_2 \notin \mathrm{H}_1$ ولتكن $H_2 = \langle x_2 \rangle$ عندئذ H_2 زمرة جزئية نظامية في B ورتبتها 2 و $H_1 \cap H_2 = e$ إذا كان $B = H_1 H_2$ فإن $B \cong H_1 \times H_2$ و $|\mathrm{B}| = 2^2$

بما أن B منتهية فبعد عدد محدود من الخطوات المتشابهة والمشابهة لما سبق نحصل على الزمر الجزئية $H_1, \dots , H_n$

حيث H_i زمرة جزئية نظامية من B و $|H_i| = 2$ ، $1 \leq i \leq n$ و

$$B = H_1 \dots H_n \cong H_1 \times \dots \times H_n$$

و

$$|B| = |H_1| \dots |H_n| = 2 \dots 2 = 2^n$$

بالتالي تم إثبات 1 و 2 معاً

سنبرهن الآن أن عدد مولدات الزمرة البوليانية المنتهية التي رتبتها 2^n هو n مولد.
بحسب مبدأ الاستقراء الرياضي لدينا من أجل $n=1$ تكون رتبة الزمرة البوليانية 2 أي أن $B=\{e,g\}$ وهي مولدة بالعنصر g .

من أجل $n=2$ لدينا $B=\{e,g_1,g_2,g_3\}$ وهي زمرة مولدة بعنصرين أي

$B=\langle g_1,g_2\rangle=\langle g_1,g_3\rangle=\langle g_2,g_3\rangle$ وهي زمرة كلين الرباعية

بالتالي فهي محققة من أجل $n=2$

بفرض أنها محققة من أجل n أي أن $B_n=\langle g_1,g_2,\dots,g_n\rangle$ زمرة بوليانية مولدة ب n عنصر ومنه $B_n=\{g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n};\alpha_i=0\vee 1;i=1\dots n\}$ ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$.

أي لنبرهن أن الزمرة البوليانية $B_{n+1}=\langle g_1,g_2,\dots,g_n,g_{n+1}\rangle$.

الزمرة البوليانية B_{n+1} من الرتبة $2^{n+1}=2.2^n$ تحوي الزمرة الجزئية B_n ذات الرتبة 2^n

وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي فإن $B_n=\langle g_1,g_2,\dots,g_n\rangle$.

عندئذ يوجد عنصر g_{n+1} حيث $g_{n+1}\in B_{n+1}\wedge g_{n+1}\notin B_n$

وبما أنه $\forall g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}\in B_n\Longrightarrow g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}\in B_{n+1}$

و أن $g_{n+1}\in B_{n+1}$ فإن $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\in B_{n+1}$

لنبرهن أنه عندما $\alpha_{n+1}\neq 0$ أي $\alpha_{n+1}=1$ فإن العنصر $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\notin B_n$

(إذا كان $\alpha_{n+1}=1\Longrightarrow g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}\in B_n$

فإنه يوجد $g_1^{\beta_1}g_2^{\beta_2}\dots g_n^{\beta_n}\in B_n$

بحيث $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}=g_1^{\beta_1}g_2^{\beta_2}\dots g_n^{\beta_n}$

بتشكيل $g_i^{\alpha_i};\alpha_i\neq 0,i=1..n$ إلى طرفي المساواة يكون لدينا

$g_{n+1}=g_1^{\omega_1}g_2^{\omega_2}\dots g_n^{\omega_n};\ \omega_i=0\vee 1\Longrightarrow g_{n+1}\in B_n$

وهذا تناقض أي أن $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}\notin B_n$).

إن عدد العناصر من الشكل $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ حيث $\alpha_{n+1}=1$ هو 2^n عنصراً عندئذ سنحصل على $2^n+2^n=2^{n+1}$ عنصراً في B_{n+1} وتكون

$$B_{n+1}=B_n\cup\{g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}};\alpha_{n+1}=1\}$$

بالتالي كل عنصر من B_{n+1} هو من الشكل $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}};\ \alpha_{n+1}=0\vee 1$ إما يساوي الصفر أو الواحد وهذا يعني أن :

$$\Longrightarrow\ B_{n+1}=\langle g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}g_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\rangle.$$

نعلم أن $(Z_2^n,\oplus)$ زمرة بالنسبة للعملية $\oplus$ حيث

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\in Z_2^n$$
$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\oplus(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$$
$$;\gamma_i=(\alpha_i+\beta_i)mod2\,;i=1\dots n\ .$$

مبرهنة 3 :إن الزمرة $(B_n,*)$ إيزومورفية مع الزمرة $(Z_2^n,\oplus)$

الإثبات : ليكن f تطبيقاً معرفاً بالقاعدة : $f:(B_n,*)\longrightarrow(Z_2^n,\oplus)$

$$f(g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n})=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n);\ \forall g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n}\in B_n$$

إن f معرف جيداً:

$$g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} \Longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$
$$\Longrightarrow f\left(g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}\right) = f(g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n})$$

f هومومرفيزم زمر

$$\forall\, x, y \in B_n; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \wedge y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n}$$
$$xy = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} = g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}$$
$$; \gamma_i = (\alpha_i + \beta_i) mod2\, ; i = 1 \dots n$$

بالتالي فإن :

$$f(xy) = f\left(g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}\right) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \oplus (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = f(x) \oplus f(y)$$

f متباين

من المعلوم أن :

$$kerf = \left\{x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \in B_n; f(x) = (0,0, \dots, 0)\right\}$$
$$= \left\{x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \in B_n; f(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0, \dots, 0)\right\}$$
$$= \left\{x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \in B_n; \alpha_i = 0; i = 1 \dots n\right\}$$
$$kerf = \{x = e\}$$

ملاحظة: يمكن إثبات **المبرهنة 3** بطريقة أخرى وذلك بالاعتماد على **المبرهنة 2**

لقد وجدنا في **المبرهنة** 2 أن

$$\mathrm{B}_n = H_1 \dots H_n \cong H_1 \times \dots \times H_n$$

حيث $|H_i| = 2$ من أجل $i = 1 \dots n$ ولذلك فإن $H_\mathrm{i} \cong \mathrm{Z}_2$

ومنه

$$\mathrm{B}_n \cong Z_2 \times \dots \times Z_2 = (Z_2^n, \oplus)$$

نتيجة1 : من تعريف f في المبرهنة السابقة نجد أنه بالإمكان مقابلة كل عنصر من زمرة بوليانية B_n بمتتالية

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \alpha_i = 0 \vee 1\, ; i = 1 \dots n$ ثم إن $e \mapsto (0,0, \dots, 0)$

نتيجة2 : أي مولد g_i من مولدات الزمرة البوليانية B_n المولدة بـ n مولد يقابل $(0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$

مثال 3 : زمرة كلين الرباعية $G = \{e, a, b, c\}$ يمكن مقابلة عناصرها بالعناصر الآتية :

$$e \mapsto (0,0)\ \ , a \mapsto (1,0)\ \ , b \mapsto (0,1)\ \ , c \mapsto (1,1)$$

أو :

$$e \mapsto (0,0)\ \ , a \mapsto (1,0)\ \ , c \mapsto (0,1)\ \ , b \mapsto (1,1)$$

مثال 4 : لتكن لدينا الزمرة البوليانية $B_3 = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ فإن عناصر هذه الزمرة يمكن مقابلتها بالمتتاليات:

$$e \mapsto (0,0,0)\ \ , g_1 \mapsto (1,0,0)\, , g_2 \mapsto (0,1,0)\, , g_3 \mapsto (0,0,1)$$
$$g_1 g_2 \mapsto (1,1,0)\, , g_1 g_3 \mapsto (1,0,1)\, , g_2 g_3 \mapsto (0,1,1)\, , g_1 g_2 g_3 \mapsto (1,1,1)$$

II– الزمرة البوليانية وعلاقة الترتيب :

لتكن $B_n = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ زمرة بوليانية نعرف العلاقة $\leq$ على الزمرة B_n كمايأتي :

$$\forall\, x, y \in B_n; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}\ ,\ \ y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n}$$
$$x \leq y \iff \alpha_i \leq \beta_i\ \ ; \forall\, i = 1 \dots n\, .$$

إن هذه العلاقة هي علاقة ترتيب

1) العلاقة $\leq$ انعكاسية لأنه:

$$\alpha_i \leq \alpha_i \ \forall i = 1..n \implies \forall x \in B_n ; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$$

بالتالي $x \leq x$

2) العلاقة $\leq$ تخالفيه لأنه:

$$\forall x, y \in B_n ;\ x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} ,\ \ y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n}$$

$$\implies \left.\begin{array}{l} x \leq y \iff \alpha_i \leq \beta_i ; \forall i = 1 \dots n \\ y \leq x \iff \beta_i \leq \alpha_i ; \forall i = 1 \dots n \end{array}\right\} \implies \alpha_i = \beta_i ; \forall i = 1 \dots n$$

$$\implies g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} \implies x = y$$

3) العلاقة $\leq$ متعدية لأنه:

$$\forall x, y, z \in B_n ;$$

$$x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} ,\ \ y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} , z = g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \iff \alpha_i \leq \beta_i \ \forall i = 1 \dots n \\ y \leq z \iff \beta_i \leq \gamma_i ; \forall i = 1 \dots n \end{array}\right\} \implies \alpha_i \leq \gamma_i ; \forall i = 1 \dots n \implies x \leq z.$$

والزمرة البوليانية B_n مجموعة مرتبة بالعلاقة $\leq$.

نعرف على المجموعة المرتبة $(B_n, \leq)$ العمليتين الآتيتين :

من أجل كل $x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} ,\ y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} \in B_n$

$$x \vee y = sup\{x, y\} = g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n} ;\ \gamma_i = max(\alpha_i , \beta_i); \forall i = 1 \dots n.$$

$$x \wedge y = inf\{x, y\} = g_1^{\omega_1} g_2^{\omega_2} \dots g_n^{\omega_n} ;\ \omega_i = min(\alpha_i , \beta_i); \forall i = 1 \dots n.$$

عندئذ البنية $(B_n, \leq , \vee , \wedge)$ هي شبكة لأنه من أجل كل

$$x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} ,\ \ y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} \in B_n$$

فإن $x \vee y \in B_n \ ,\ x \wedge y \in B_n$

نتيجة 1 :

الشبكة $(B_n, \leq , \vee , \wedge)$ مغلقة لأن العنصر e هو العنصر الأصغر و العنصر $g_1 g_2 \dots g_n$ هو العنصر الأكبر .

في الحقيقة :

$$\forall x \in B_n ; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$$

$$\implies e = g_1^0 g_2^0 \dots g_n^0 \leq g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$$

لأن $0 \leq \alpha_i \ ;\ \forall i = 1 \dots n$ و أيضاً:

$$\forall x \in B_n ; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$$

$$\implies g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \leq g_1 g_2 \dots g_n ;\ \alpha_i \leq 1 \ ;\ \forall i = 1 \dots n$$

نرمز للعنصر الأصغر بالرمز **0** ونرمز للعنصر الأكبر $g_1 g_2 \dots g_n$ بالرمز **1**

إن المتمم لعنصر $x \in B_n$ هو :

$$\forall x \in B_n ; x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} \implies \bar{x} = g_1^{\acute{\alpha}_1} g_2^{\acute{\alpha}_2} \dots g_n^{\acute{\alpha}_n} ;\ \acute{\alpha}_i = (1 + \alpha_i) mod 2$$

مبرهنة: البنية $(B_n, \leq , \vee , \wedge, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ شبكة بوليانية .

الإثبات : $(B_n, \leq , \vee , \wedge)$ شبكة متممة حيث إن كل عنصر فيها له متمم

$$x \vee \bar{x} = e = \mathbf{0} \quad , \qquad x \wedge \bar{x} = g_1 g_2 \dots g_n = \mathbf{1}$$

شبكة توزيعية $(B_n, \leq, \vee, \wedge)$

$$\forall x, y, z \in B_n;$$
$$x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}, \quad y = g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n}, z = g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}$$
$$x \vee (y \wedge z) = sup\{x, (inf\{y, z\})\} = g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots g_n^{\nu_n}$$

حيث

$$\nu_i = max\big(\alpha_i, mine(\ \beta_i, \gamma_i)\big) ; i = 1 \dots n$$

كما أن

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = inf\{(sup\{x, y\}), (sup\{x, z\})\}$$
$$= g_1^{\mu_1} g_2^{\mu_2} \dots g_n^{\mu_n}$$

حيث

$$\mu_i = min\big(\ max(\alpha_i, \beta_i), max(\alpha_i, \gamma_i)\big) ; i = 1 \dots n$$

ولكن

$$max\big(\alpha_i, mine(\ \beta_i, \gamma_i)\big) = min\big(\ max(\alpha_i, \beta_i), max(\alpha_i, \gamma_i)\big)$$

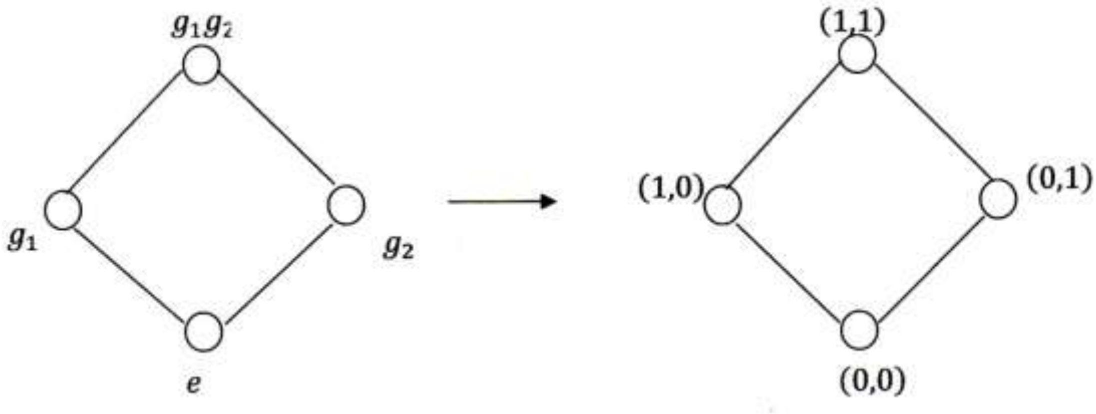
ولذلك فإن

$$\nu_i = \mu_i \ ; i = 1 \dots n$$

وبالتالي:

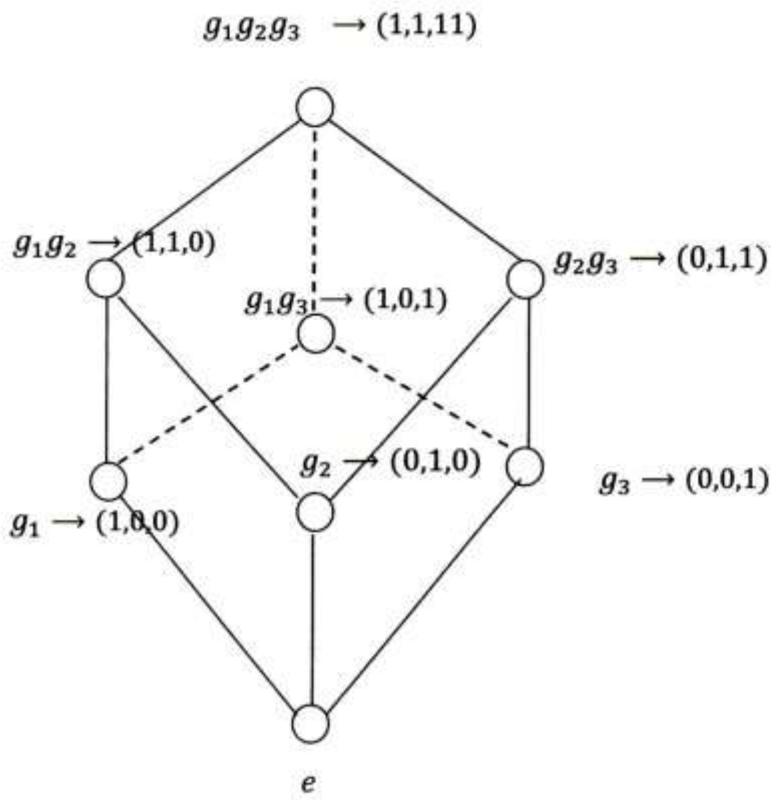
$$\Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

مثال 1 : $(B_2, \leq, \vee, \wedge)$ حيث $B_2 = \{e, g_1, g_2, g_1 g_2\}$



(1)

مثال 2: $B_3 = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$



(2)

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم البرهان على أن الزمرة البوليانية المنتهية هي زمرة من الرتبة 2^n حيث n هو عدد مولداتها وعلى وجود إيزومورفيزم بين كل زمرة بوليانية من الرتبة 2^n والزمرة $(z_2^n, \oplus)$ وأنها شبكة بوليانية وفق علاقة الترتيب المعرفة عليها .

إذن كل زمرة بوليانية $(B,*)$ منتهية هي شبكة بوليانية وبالتالي فهي جبر بول .

التوصيات استنتاج العمليات على جبر بول $+,\cdot,/$ من خلال عملية ثنائية واحدة معرفة على الزمرة البوليانية والحصول إن أمكن على أقصر متطابقة لتعريف جبر بول .

المراجع:

[1]-SUTNER, K. *Action and counting Carnegie* .Mellon university fall (2008)66-69.

[2]-MENDELSOHN, N.S; PADMANABHAN, R. *A Single identity for Boolean Groups and Boolean rings*. Journal of Algebra Canada, vol.20, , N°. 1, 1972, 78-82.

[3]-MENDELSOHN,N.S; PADMANABHAN, R. *Minimal identities for Boolean groups*. Journal of algebra Canada, vol.34, N°. 3,1975, 451-457.

[4]- HAGE, P; HARARY, F. *Arapesh Sexual Symbolism, Primitive Thought and Boolean Groups.* L'Homme,vol.23,N°.2,1983, 57 – 77.

[5]-BALBES,R;DWINGER,P.*Distributire Lattices* .University of Missouri press,1983,40-89.

[6]-W.EDWIN,C. *Elementary Abstract Algebra*. Department of Mathematics, University of South Florida,2001,34.