

## دراسة متغيرات انتشار الحزم الغاوصية في الفراغ الحر ومحاكاتها لأنواع مختلفة من الليزر باستخدام MATLAB

الدكتور الكسندر ثلاثيان\*

(تاريخ الإيداع 21 / 11 / 2011. قُبِلَ للنشر في 12 / 4 / 2012)

### □ ملخص □

يقدم هذا البحث دراسة تحليلية لمتغيرات انتشار الحزم الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر بين مستويين مختلفين، الأول الممثل بموضع خصر الحزمة عند  $z=0$  والثاني الموازي له والممثل بأبعاد مختلفة لقيم  $z$  المتناقصة والمتصاعدة، التي تنتشر بشكل متناظر بين طرفي خصر الحزمة الغاوصية وفق المحور  $z$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي لأنواع مختلفة من الليزر الغازية وليزر الأقسام الصلبة ومن ثم محاكاتها عددياً باستخدام كل من البرنامجين Borland C++ builder 6 و MATLAB للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد لتوزيع شدة الإضاءة للحزمة الغاوصية وانزياح طورها وكذلك إيجاد توزيع السعة العقدية للحقل الكهربائي للحزمة الغاوصية وتمثيلها فراغياً بقسميه الحقيقي والتخيلي.

كما تم وصف انتشار الحزم الغاوصية في الفراغ الحر بدراسة كل من تغيرات نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  كتتابع لأبعاد مختلفة وفق منحى انتشار  $z$  للحزمة الليزرية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر باستخدام تقنية الطيف الزاوي.

**الكلمات المفتاحية:** انتشار الحزم الليزرية، الطيف الزاوي، الطرائق العددية في البصريات، النمط الأساسي  $TEM_{00}$

\* أستاذ مساعد - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة حلب - سورية.

## A Study of the Propagation of Gaussian Beams Variables in Free Space and its Simulation for Different Types of Lasers by Using MATLAB.

Dr. Alexander Talatinian \*

(Received 21 / 11 / 2011. Accepted 12 / 4 / 2012)

### □ ABSTRACT □

We present an analytical study of the propagation of Gaussian beams variables of the fundamental mode  $TEM_{00}$  during its propagation in free space between two different planes, the first plane is represented by a location of the beam waist; that is, when  $z = 0$ ; to the second parallel plane is represented by different locations for decreasing and increasing  $z$  values, which propagate symmetrically between both sides of the Gaussian beam waist according to the  $z$ -axis, using the angular spectrum technique for different types of lasers (gas and solid bodies) and then the numerical simulation using both programs: Borland C++builder 6 and MATLAB, in order to get the 2D and 3D geometrical shapes of the intensity of Gaussian beams illumination and the shift of its phase, and also to get the complex amplitude of Gaussian beams electrical field and its three-dimensional representation with its real and imaginary parts.

A description of the Gaussian beams propagation in free space has also been done via the study of the variables of the Gaussian beam radius (half width of beam)  $W(z)$  and the radius of curvature  $R(z)$  of the wave front by the functionality of different locations according to the propagation of the laser beam along the  $z$  - axis of Gaussian beam of the fundamental mode  $TEM_{00}$  during its propagation in free space using the angular spectrum technique.

**Keywords:** Propagation of laser beams, angular spectrum, numerical methods in optics, fundamental mode  $TEM_{00}$ .

---

\* Associate Prof at Physics Department, Faculty of Science, University Aleppo, Aleppo, Syria.

**مقدمة:**

من أهم خصائص انتشار الحزم الغاوصية في الفراغ الحر أو ضمن المجاوبات البصرية المستقرة هي الاتجاهية العالية أو الترابط الفراغي للحزم الليزرية المتولدة [1]. تعتبر الأبعاد الهندسية لمتغيرات الحزم الغاوصية كنصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  وانزياح طور غوي  $\phi(z)$  من المتغيرات الهامة في معرفة خصائص انتشار الحزم الغاوصية في تطبيقات الليزر الواسعة الاستخدام [2]. بالإضافة إلى هذا، ثمة الكثير من الثوابت التي تميز الحزمة الغاوصية: مجال رايلي  $z_R$  ومسافة التمحرق  $b = 2z_R$  وانفراج الزاوية الكلي  $2\theta$ . إن تحديد هذه المتغيرات والثوابت يساعدنا في تحديد نوعية الحزمة فراغياً بدقة وكيفية محرقتها، ومن ثم انتشارها في الفراغ الحر دون أن يكون لها زاوية انفراج كبيرة [3]. هذه المتغيرات لها أهمية في الدراسات التطبيقية لأغلب الليزرات العملية التي لها تأثير كبير في تحليل أشكال الحزم الليزرية [4].

يمكن معالجة انتشار الحزم الغاوصية المثالية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في الفراغ الحر من خلال المنظومات البصرية التي غالباً ما يكون لها شكل مبسط باستخدام علم الضوء الهندسي، والتي تحافظ عبرها الحزمة الغاوصية ضمن التقريب القطعي على شكلها الغاوصي بالاعتماد على تحويلات سيلف-فورييه [5,6]. أي أن الحزمة النافذة من المنظومة ستكون غاوصية أيضاً، لكن مع تغير موضع خصر الحزمة، وباستخدام تحويل فورييه ستملك شكلاً غاوصياً أيضاً، مما يجعل الحزمة الليزرية أكثر فعالية. سيتغير فقط كل من نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$ . ويمكن الحصول على مواصفات الحزمة الغاوصية بكاملها بقياس بسيط لعرض الحزمة  $2W(z)$  عند مسافة معينة ل  $z$  [7,8].

نركز اهتمامنا في هذا البحث بشكل خاص على النمط الأساسي  $TEM_{00}$  ذي التوزع العرضي والذي يعتبر من أكثر الأنماط أهمية واستعمالاً في مختلف تطبيقات الليزر. وذلك باعتباره يملك انفراجاً زاوياً صغيراً وكثافة طاقة عظيمة، وبالتالي سطوعاً ضوئياً عالياً [9].

**أهمية البحث وأهدافه:**

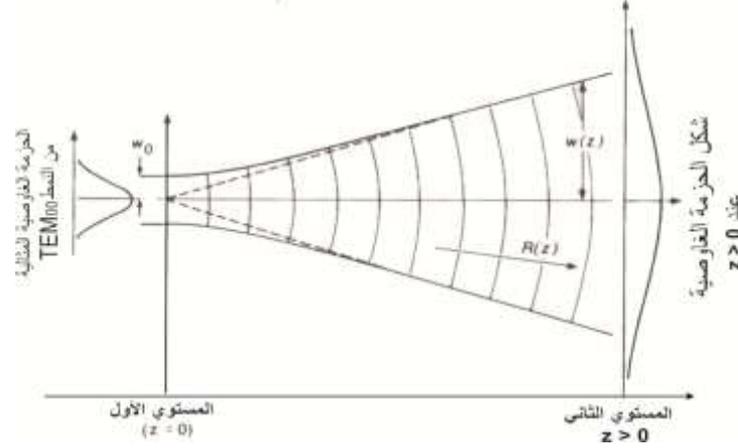
يقسم هذا البحث إلى نوعين من الدراسة:

1- دراسة تحليلية ومحاكاة عددية لمعالجة الظواهر الانعراجية لمتغيرات الحزم الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في الفراغ الحر باستخدام تقنية الطيف الزاوي عن طريق البرنامج الحاسوبي الخاص المكتوب بلغة Borland C++ builder 6 الذي تم تصميمه خصيصاً لهذا البحث ومن ثم الاستفادة من المعطيات والبيانات المستحصل عليها لمحاكاتها عددياً باستخدام MATLAB للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد لتوزع شدة الإضاءة للحزمة الغاوصية وانزياح طورها، وكذلك إيجاد توزع السعة العقدية للحقل الكهربائي في الحزمة الغاوصية وتمثيلها فراغياً بقسميها الحقيقي والتخيلي.

2- دراسة كل من تغيرات نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  كتوابع لأبعاد مختلفة وفق منحى انتشار  $z$  للحزمة الليزرية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر باستخدام تقنية الطيف الزاوي لأنواع مختلفة من الليزرات الغازية والأجسام الصلبة.

### حلول الحزم الليزرية لمعادلة الموجة المحورية:

لنفرض أنه لدينا حزمة غاوصية من النمط الأساسي TEM<sub>00</sub> ذات منطقة أصغرية نرمز لها بـ  $W_0$ . وتدعى بنصف عرض الحزمة الغاوصية والتي توافق تناقص سعتها بمقدار  $e^{-1} = 0.37$  مرة من قيمتها العظمى في ذروته عند مركز الحزمة وشدتها بمقدار  $e^{-2} = 0.137$  مرة من قيمتها العظمى  $|E(x, y, z)|^2$  إن جبهة الموجة المستوية  $R_0 = \infty$  معامدة على منحنى الانتشار  $z$ ، في المستوي الأول، أي عند  $z = 0$ . هذا المستوي يعرف بخصر الحزمة حيث يكون فيها توزع الشدة أعظماً كما هو موضح في الشكل (1).



الشكل (1): انتشار الحزمة الغاوصية من النمط الأساسي TEM<sub>00</sub> بين المستويين  $z = 0$  و  $z > 0$

يمكن التعبير عن توزع السعة العقدية للحقل الكهربائي للحزمة الغاوصية عند خصر الحزمة بالمعادلة التالية:

$$E(x, y, z = 0) = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{W_0^2}\right] = E_0 \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{W_0^2}\right] \quad (1)$$

حيث تمثل  $E_0$  السعة العظمى للحقل الكهربائي عند مركز الحزمة، و  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  نصف قطر الحزمة الغاوصية في المستوي  $x, y$  المعامد لمنحنى الانتشار. وتنتشر الحزمة الغاوصية بعد المستوي الأول بشكل كروي، ومن أجل ذلك يضاف معامل الطور التربيعي لتصبح كما يلي:

$$E(x, y, z) = E_0 \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)}\right] \exp\left[-ik \frac{(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right] \quad (2)$$

حيث تمثل  $k = 2\pi/\lambda$  العدد الموجي أو ثابت الانتشار والذي يحدد جهة انتشار الموجة، و  $\lambda$  طول موجة الضوء في وسط الانتشار، بينما يمثل  $R(z)$  نصف قطر انحناء جبهة الموجة عند خصر الحزمة، التي تكون جبهة الموجة عندها مستوية، وبالتالي تُهمل قيمة معامل الطور التربيعي من العلاقة (2)، ومنه نجد أن هناك تعريفين مختلفين للمستوي  $z = 0$ .

1- عندما تكون حجم البقعة صغيرة جداً  $2W(z) = 2W_0$  عند نقطة معينة من منحنى الانتشار  $z$ .

2- عندما تكون جبهة الموجة مستوية.

إن نموذج الحقل المنظم Normalized field لهذه الحزمة الغاوصية في أثناء انتشارها في الفراغ الحر بين المستويين: ابتداءً من المستوي الأول  $z = 0$  إلى مستوي آخر وممثل بأبعاد مختلفة لقيم  $z$  المتصاعدة والتي تنتشر على المحور  $z$  والذي يعطى بالعلاقة التالية [10]:

$$E(x, y, z) = E_0 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{q_0}{q(z)W_0} \exp \left[ -ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] \quad (3)$$

$$= E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{W_0 \exp[-ikz + i\phi(z)]}{W(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right]$$

تشير الرموز  $W(z)$  و  $R(z)$  و  $\phi(z)$  إلى كل من نصف عرض الحزمة Half width of beam الغاوصية ونصف قطر انحناء جبهة الموجة الغاوصية Radius of curvature of the wave front وطور الحزمة الغاوصية، وتسمى أيضاً بانزياح طور غوي Gouy phase shift على الترتيب.

يدعى  $q(z)$  معامل الحزمة الغاوصية، وهو يُعبر عن تغير السعة العقدية للحزمة الغاوصية في أثناء انتشارها في الفراغ الحر بين المستويين المعترضين، ويرتبط مع كل من نصف عرض الحزمة  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  عند أي مستوي  $z$  بالعلاقة التالية [11]:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kW^2(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (4)$$

يخضع المعامل العقدي  $q(z)$  في الفراغ الحر لقانون الانتشار بين المستويين  $z = 0$  و  $z > 0$  ويعطى بالعلاقة التالية:

$$q(z) = q_0 + z = z + iz_R \quad (5)$$

وله القيمة الابتدائية Initial value  $q(0) = q_0$  ، عند  $z = 0$  يكون نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z=0) \rightarrow \infty$  ومنه يمكننا تبسيط المعادلة (4) إلى الشكل التالي:

$$\frac{1}{q_0} = -i \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \Rightarrow q_0 = i \frac{\pi W_0^2}{\lambda} = iz_R \quad (6)$$

حيث  $z_R = \pi W_0^2 / \lambda$  مجال رايلي ويعرف بأنه المسافة التي يتزايد عندها نصف عرض الحزمة الغاوصية بمقدار  $\sqrt{2}$  مرة من قيمة خصر الحزمة الغاوصية  $W_0$  والتي يمكن اعتبارها حزمة ليزرية متوازية تقريباً ضمن هذا المجال  $-z_R \leq z \leq z_R$  وجبهة موجة شبه مستوية كما هو موضح في الشكل (2). ويمكن التعامل مع خصر الحزمة بوصفها منطقة التمرق للحزمة الغاوصية، وبالتالي نعرف القيمة  $2z_R$  بالعمق المحرق أو بالمعامل المحرق Confocal parameter ويعطى بالعلاقة التالية:

$$b = 2z_R = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda} \quad (7)$$



(الخط المنقط) كما هو موضح في الشكل (3) وبالتالي يُهمل الحد الأول من العلاقة (8)، ويزداد عندئذ نصف عرض الحزمة  $W(z)$  بشكل خطي مع المسافة  $z$ ، وفقاً للمعادلة:

$$W(z \gg z_R) \approx \frac{\lambda z}{\pi W_0} \approx \frac{W_0}{z_R} z \approx z\theta \quad (9)$$

وبما أن  $z$  أكبر بكثير من  $\pi W_0/\lambda$ ، لذا فإن معدل الشدة عند القيمة  $e^{-2}$  من قيمتها العظمى يقترب من نصف الزاوية القطرية المخروطية كما في المعادلة:

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W(z)}{z} = \frac{2}{k W_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (10)$$

تدعى هذه الزاوية  $\theta$  بزاوية الحقل البعيد أو ما يسمى بنصف زاوية انفراج الحزمة الغاوصية للنمط الأساسي  $TEM_{00}$ . تقع ذروة المخروط عند مركز خصر الحزمة الغاوصية  $z = 0$ ، وكأنها تمثل حزمة كروية صادرة من منبع نقطي متموضع في مركز خصر الحزمة كما هو موضح في الشكل (3) وعندها فإن الحزمة ستبدأ بالانفراج بمقدار نصف زاوية  $\theta = 1.693 \text{ mRad} = 0.097^\circ$

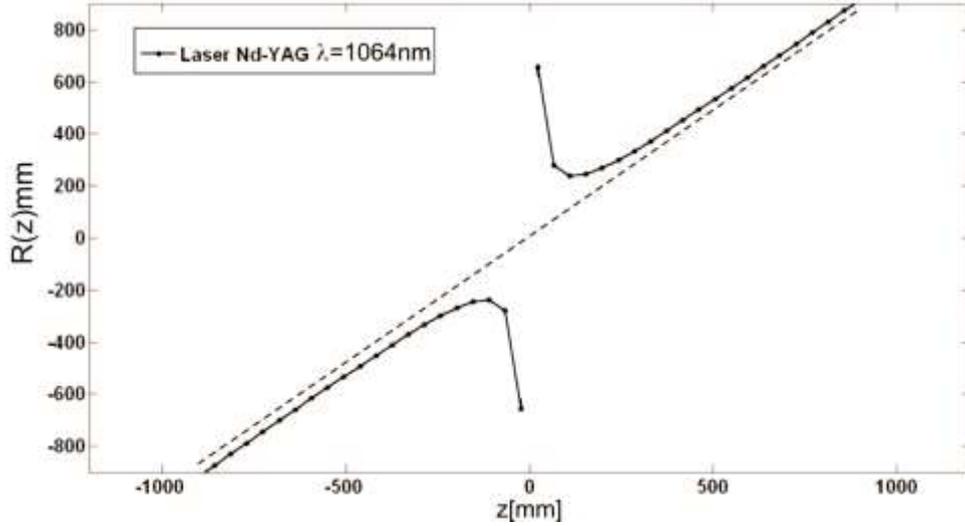
نلاحظ من العلاقة (3) أن المتغير  $R(z)$  يلعب دور نصف قطر انحناء جبهة الموجة، وأن الحزمة الغاوصية تملك جبهة موجة كروية نصف قطر انحنائها  $R(z)$  الذي يتغير وفق منحى الانتشار  $z$  وفق العلاقة الآتية:

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \approx \begin{cases} \infty & \text{for } z \ll z_R \\ 2z_R & \text{for } z = z_R \\ z & \text{for } z \gg z_R \end{cases} \quad (11)$$

تبين العلاقة (11) أن  $R(z)$  هو تابع غير منتظم ينقسم إلى ثلاث مراحل: الأولى ( $z \ll z_R$  أو  $z = 0$ ) و  $R(z) \rightarrow \infty$ ، وتكون جبهة الموجة مستوية، وفي الثانية هناك قمتان أصغر يتان تحدثان عند ( $z = +z_R$ ) توافقها القيمة  $R_{\min} = +2z_R$ ، وعند ( $z = -z_R$ ) توافقها القيمة  $R_{\min} = -2z_R$ . وعندها تملك جبهة الموجة نصف قطر انحناء أعظمي، وفي الثالثة ( $z \gg z_R$ )، يزداد  $R(z)$  خطياً مع البعد  $z$ ، ويصبح نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z) \approx z$ . أما الحزمة الغاوصية فتقترب من الموجة الكروية المتمركزة عند خصر الحزمة.

يوضح الشكل (4) تغيرات نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  بتابعية الأبعاد المختلفة لقيم  $z$  والتي تنتشر بشكل متناظر بين طرفي خصر الحزمة الغاوصية وفق المحور  $z$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي لليزر Nd - YAG ذي الطول الموجي  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  باعتبار خصر الحزمة الغاوصية  $W_0 = 200 \mu\text{m}$ . ويشير الخط المنقط لنصف قطر انحناء جبهة الموجة الكروية الناتجة عن منبع نقطي متموضع عند نقطة يكون فيها توزع الشدة أعظماً عند خصر الحزمة الغاوصية  $z = 0$ .

إن العلاقتين (8) و (11) تعبران عن مجموعة الأنماط المتولدة عند كل نقطة من نقاط انتشار الحزمة الغاوصية في الفراغ الحر وفق منحى الانتشار  $z$ .



الشكل (4): تغيرات نصف قطر انحناء جبهة الموجة بتابعية الأبعاد المختلفة لـ  $z$ .

بتقسيم المعادلة (8) على المعادلة (11) والإصلاح نحصل على العلاقة:

$$\frac{\lambda z}{\pi W_0^2} = \frac{\pi W^2(z)}{\lambda R(z)} \quad (12)$$

وبالاستفادة من العلاقة (12) وإجراء المعالجة الرياضية يمكننا تحديد موضع  $z$  ونصف عرض خصر

الحزمة الغاوصية  $W_0$  للنمط الأساسي  $TEM_{00}$  على الشكل التالي [12]:

$$z = \frac{R(z)}{1 + \left( \frac{\lambda R(z)}{\pi W^2(z)} \right)^2} \quad (13)$$

$$W_0 = \frac{W(z)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi W^2(z)}{\lambda R(z)} \right)^2}} \quad (14)$$

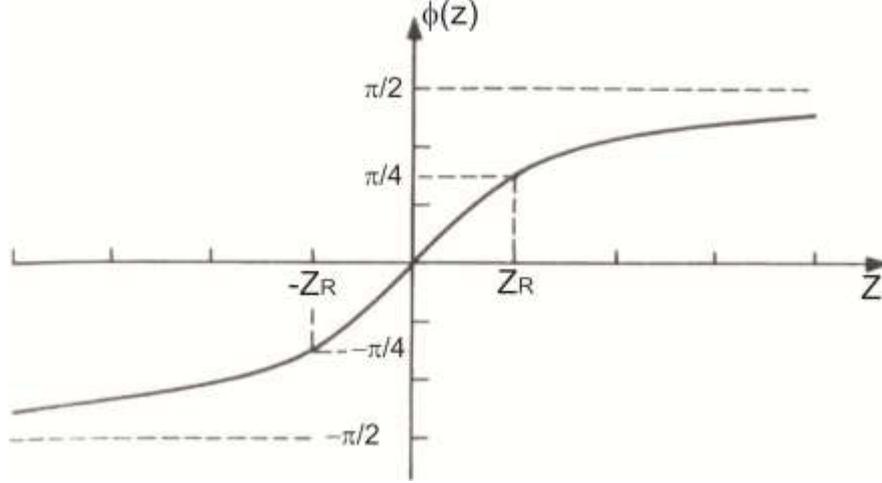
تحتوي معادلة انتشار الحزمة الغاوصية الأساسية للحقل الكهربائي  $TEM_{00}$  المعطاة بالمعادلة (3)، حداً يمثل تغيرات كل من عرض الحزمة  $2W(z)$ ، ويدعى أيضاً بحجم البقعة Spot size وانزياح الطور التراكمي بتابعية البعد  $z$  والذي يعطى على المحور البصري  $x = y = 0$  بالشكل التالي:

$$E(z) \propto \frac{q_0 \exp[-ikz]}{q(z)} = \frac{\exp[-ikz]}{1 - i z/z_R} = \frac{\exp[-ikz + i\phi(z)]}{W(z)} \quad (15)$$

بالإضافة إلى وجود انزياح طور الموجة المستوية في أثناء انتشارها في الفراغ الحر المتمثل بالحد  $\exp(-ikz)$  فإنه كذلك يوجد حد يمثل تغيرات انزياح الطور الطولاني  $\phi(z)$  المسمى أيضاً بانزياح طور "عوي" ويعطى بالعلاقة الآتية:

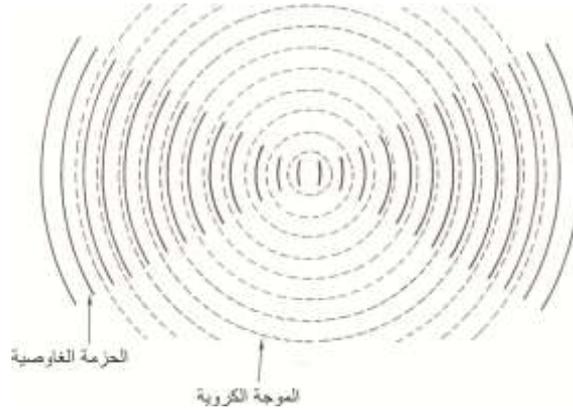
$$\phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right) \quad (16)$$

يوضح الشكل (5) تأثير انزياح طور غوي فقط على النمط الغاوصي الأساسي TEM<sub>00</sub> بتابعية البعد  $z$  [13].

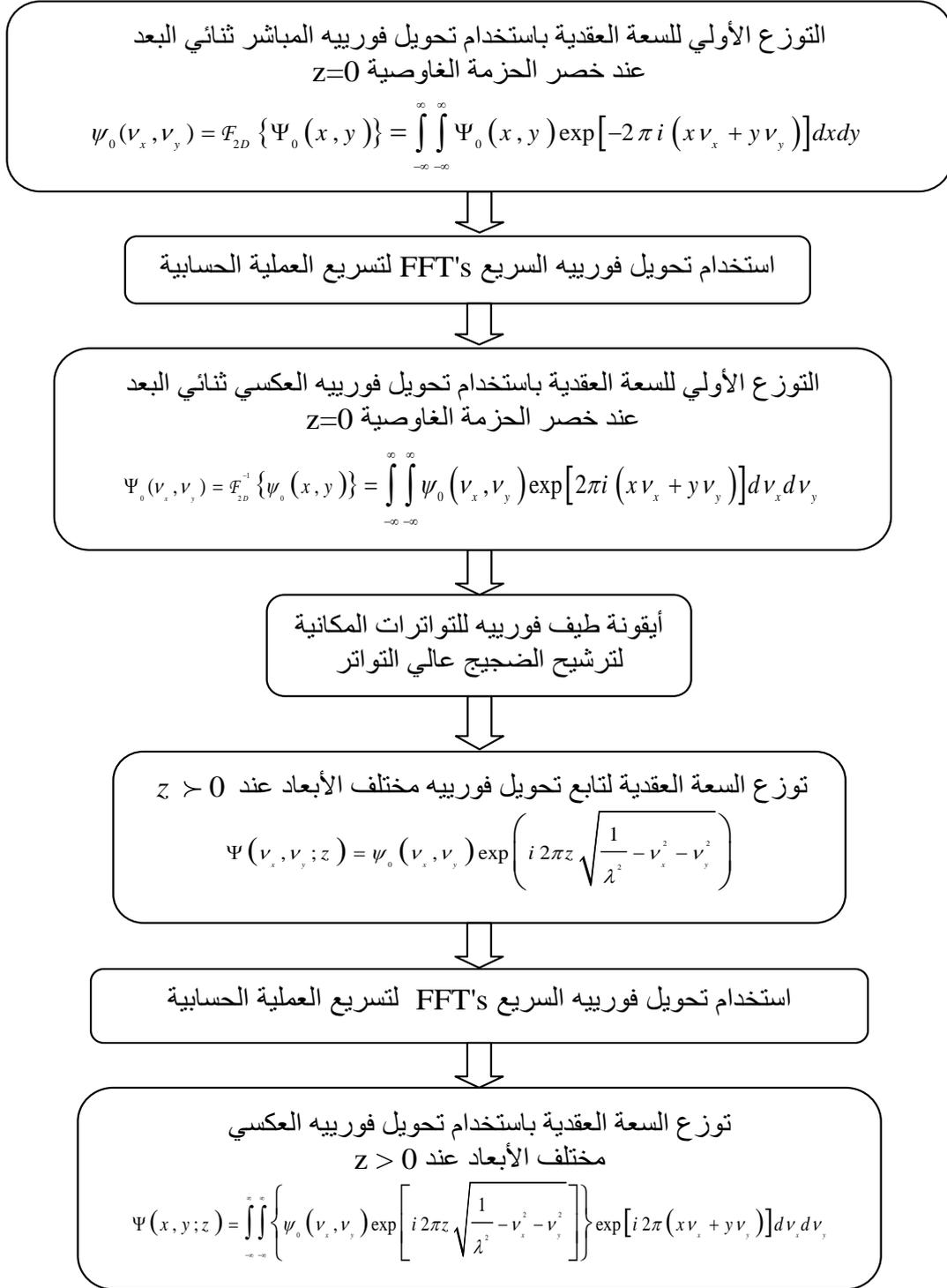


الشكل(5): تغيرات انزياح طور غوي بتابعية الأبعاد المختلفة لـ  $z$ .

نلاحظ من هذا الشكل (5) أن انزياح طور غوي يتغير ببطء مع البعد  $z$  من  $-\pi/2$  إلى  $+\pi/2$  عندما تتغير  $z$  من  $z \leq Z_R$  إلى  $z \geq Z_R$  على جانبي خصر الحزمة مروراً بالقيمتين  $\pm\pi/4$  على الترتيب. ويفسر هذا الانزياح الطوري الإضافي (طور غوي) فيزيائياً بأحد الشكلين التاليين: إما أن يتناقص ثابت الانتشار المحوري عند منطقة خصر الحزمة بالنسبة لموجة مستوية مثالية  $k$  بمقدار صغير  $\Delta k$  ليصبح  $k - \Delta k$  وكأنه يوجد لمثل هذه الحزمة ثابت انتشار فعال هو  $k_{eff}(z) = k - \Delta k$ . أو تزداد السرعة الطورية، وبالتالي المسافات بين الجبهات الطورية بمقدار صغير  $\Delta v$  بالمقارنة مع سرعة انتشار موجة مستوية مثالية  $c$ ، لتصبح  $v_{\psi}(z) = c + \Delta v$ . وبالتالي فإن الجبهات الطورية في حزمة غاوصية تمر عبر منطقة خصر الحزمة الذي سينزاح للأمام بمقدار كلي يساوي نصف طول موجة بالمقارنة مع موجة مستوية مثالية، كما هو موضح في الشكل (6). [10]



الشكل(6): توضيح لانزياح طور غوي لدى اجتياز خصر الحزمة الغاوصية بالمقارنة مع موجة كروية مثالية.



الشكل (7): المخطط الصندوقي لخوارزمية الطيف الزاوي

## طرائق البحث ومواده:

تم استخدام تقنية الطيف الزاوي لوصف متغيرات الحزم الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر استناداً إلى مخطط خوارزمية البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة BorlandC++builder6 الموضح في الشكل (7) والذي تم تصميمه خصيصاً لهذا البحث وطريقة انتشار الطيف الزاوي للأمواج

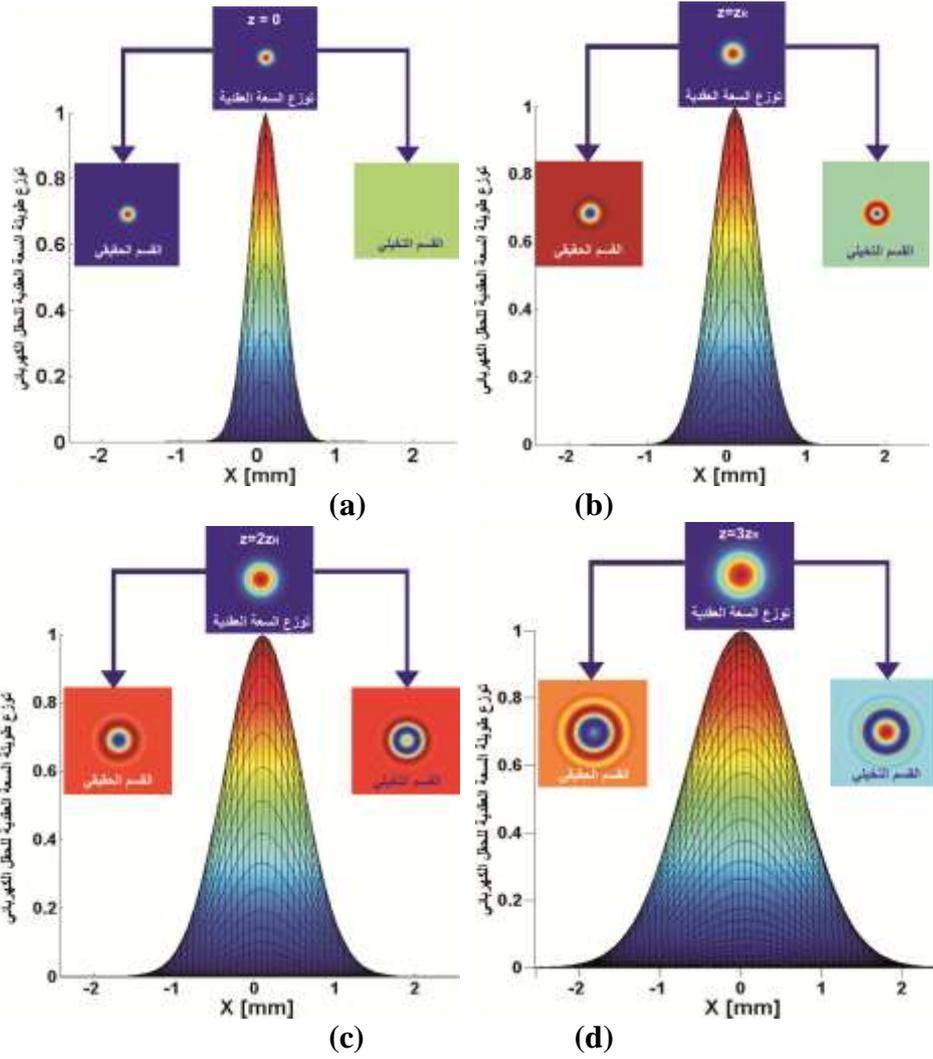
المستوية [14,15,16] بالاستفادة من كل تحويلات فورييه المباشرة والعكسية. ومن أجل زيادة سرعة الحسابات العددية لتكاملي انعراج فورييه نستخدم تحويل فورييه السريع FFT الذي يسمح لنا بتحديد السعة العقدية للحقل الكهربائي بدقة وبسرعة، وذلك عن طريق تجزئته إلى مجموعة من الموجات المستوية كل على حدة باستخدام القيم الذاتية. ومن ثم محاكاتها عددياً باستخدام برمجيات كل من MATLAB و BorlandC++builder6 للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد لتوزع شدة الإضاءة للحزمة الغاوصية وانزياح طورها، وكذلك إيجاد توزع السعة العقدية للحقل الكهربائي للحزمة الغاوصية وتمثيلها فراغياً بقسميه الحقيقي والتخيلي.

### النتائج والمناقشة:

تظهر الأمثلة التالية الموضحة في الشكل (8) المحاكاة العددية لانتشار الحزم الغاوصية من النمط الأساسي TEM<sub>00</sub> ليزر الأرجون المؤين ذي الطول الموجي  $\lambda = 514.4\text{nm}$  وخصر الحزمة  $W_0=300\mu\text{m}$  والتي من أجلها يكون مجال رايلي مساوياً  $z_R=549.656\text{mm}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر بين مستويين مختلفين الأول الممثل بموضع خصر الحزمة عند  $z = 0$  والثاني الموازي له والممثل بأبعاد مختلفة لقيم  $z = z_R$  و  $z = 2z_R$  و  $z = 3z_R$  التي تنتشر وفق المحور  $z$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي ومحاكاتها عددياً باستخدام برمجيات BorlandC++builder6 و MATLAB للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية الأبعاد لتوزع طويلة السعة العقدية للحقل الكهربائي، وكذلك المقطع العرضي لتوزع السعة العقدية وتمثيله بقسميه الحقيقي والتخيلي.

نلاحظ من الشكل (8) أن توزع طويلة السعة العقدية للحقل الكهربائي المنظم الذي يحافظ على شكله بحيث يملك توزعاً غاوصياً ثنائي البعد في المستوي العرضي وفق منحى الانتشار  $z$ ، إلا أن عرض الحزمة الغاوصية سوف يتغير بشكل سريع كلما ابتعدنا عن موضع خصر الحزمة. كما نلاحظ من هذا الشكل أن عرض الحزمة الغاوصية  $2W(z)$  عبارة عن تابع يتزايد باضطراد بزيادة الأبعاد  $z$ ، ويصل إلى قيمة  $\sqrt{2}$  مرة من خصر الحزمة  $W_0$  عندما  $z = z_R$  أي  $W(z = z_R) = \sqrt{2}W_0$  عندها ستكون مساحة مقطع الحزمة الغاوصية تساوي ضعف مساحة مقطع الحزمة الليزرية في مركز خصر الحزمة أي:  $\pi W^2(z = z_R) = 2\pi W_0^2(z)$ . أما من أجل المسافات البعيدة من مجال رايلي  $z = 3z_R$  فإن الحزمة ستبدأ بالانفراج لتمثل حزمة كروية صادرة من منبع نقطي متموضع في مركز الحزمة. وعندها سوف يزداد نصف العرض  $W(z)$  بشكل خطي مع المسافة  $z$  وفقاً للمعادلة (9) ومنه نحصل على نصف زاوية الحقل البعيد للحزمة الغاوصية المعطاة بالعلاقة (10) التي تساوي  $\theta = 0.545\text{mRad}$ . كما نلاحظ من الشكل (8) بوضوح بأن المقطع العرضي لتوزع السعة العقدية وتمثيله بقسميه الحقيقي والتخيلي الذي يحافظ على شكله الدائري بحيث يملك توزعاً غاوصياً، إلا أن عرض الحزمة سوف يتسع كلما ابتعدنا عن موضع خصر الحزمة كما هو موضح في الشكل (8) عند أطراف المنحني. ونلاحظ أيضاً من الشكل (8) أن توزع السعة العقدية عند خصر الحزمة الغاوصية  $z = 0$  يمثل بقسمه الحقيقي فقط بينما يكون قسمه التخيلي معدوماً، لأنه عند خصر الحزمة يشكل توزع السعة العقدية للحقل الكهربائي المعطى بالعلاقة (1) تابعاً حقيقياً صرفاً.

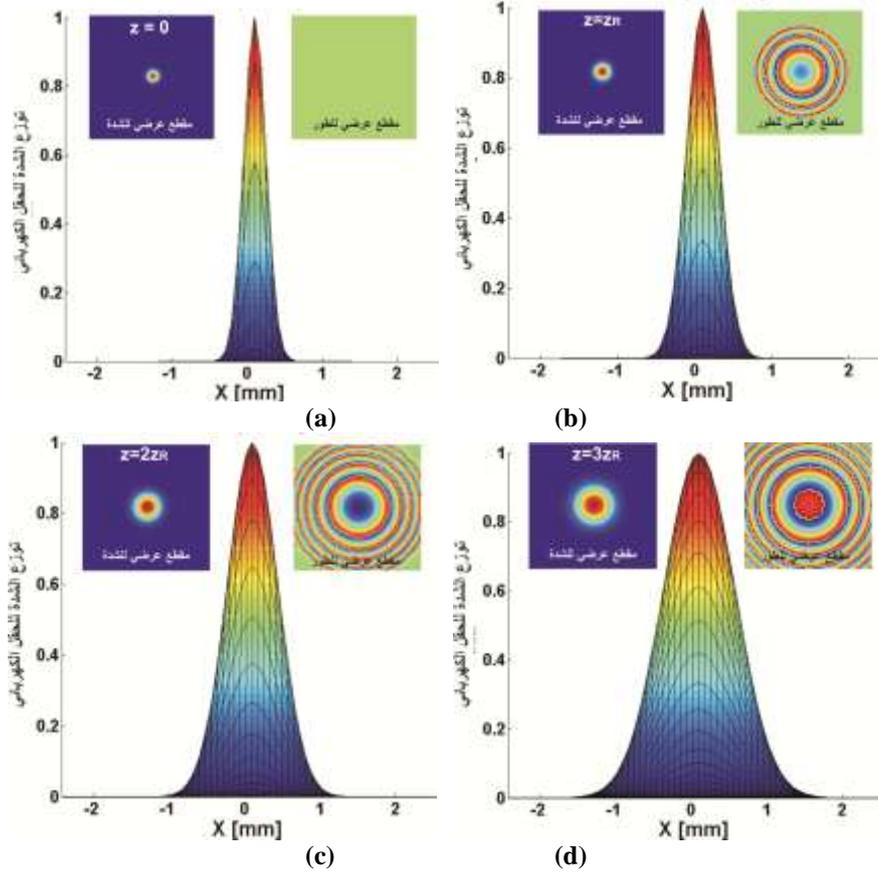
بإجراء المحاكاة العددية باستخدام برنامج MATLAB نحصل على الشكل الهندسي ثنائي الأبعاد لتوزع الشدة وكذلك على المقطع العرضي لتوزع الشدة والطور باستخدام تقنية الطيف الزاوي من أجل الأبعاد  $z = 0$  و  $z = z_R$  و  $z = 2z_R$  و  $z = 3z_R$  باستخدام ليزر الأرجون المؤين ذي الطول الموجي  $\lambda=514.4\text{nm}$  وخصر الحزمة  $W_0=300\mu\text{m}$ .



الشكل (8): يمثل توزيع طويلة السعة العقدية للحقل الكهربائي للحزمة الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  بدلالة المستوي  $x$  العمودي على منحنى الانتشار  $z$  وفق الأبعاد  $z=0, z=z_R, z=2z_R, z=3z_R$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي للحقل الليزري وفق المعاملات التالية:  $W_0=300\mu m, \lambda=514.4nm$ ، وتمثل الصورة العلوية في أعلى الشكل مقطعاً عرضياً للسعة العقدية، أما الصورة في الأسفل فتتمثل القسم الحقيقي، والأيمن القسم التخيلي للسعة العقدية.

نلاحظ من الشكل (9-a) أن توزيع شدة الإضاءة في المركز يكون أعظماً  $I_{max}=I_0=1$  عند  $x=0$  و  $z=0$  وانزياح طور غوي  $\phi(z)=0$  عند  $z \rightarrow 0$  والممثل بالبقعة الخضراء التي تشير إلى قيمة معدومة للطور، ومن ثم تتناقص هذه الشدة تدريجياً كلما ابتعدنا عن مركز خصر الحزمة وتبلغ نصف قيمتها العظمى عند  $z=z_R$ ، أي  $W(z=z_R)=\sqrt{2}W_0$ ، بينما يتغير انزياح طور غوي المعطى بالعلاقة (16) عند محور الحزمة بمقدار  $\pi/4$  مقارنة مع طور الموجة المستوية  $kz$  كما في الشكل (9-b)، ومن أجل مسافات أكبر من مجال رايلي  $|z| \gg z_R$  يتناقص توزيع شدة الإضاءة كلما ابتعدنا عن خصر الحزمة الغاوصية كما في الشكل (9-c,d) وفقاً لمعامل الطور التربيعي. ويوضح الشكل (9) أيضاً أن توزيع شدة الإضاءة الذي يتغير كتابع للمسافة  $x$  بالنسبة لمركز الحزمة الغاوصية، التي مسقطها في هذه الحالة تكون على شكل تابع غاوصي. و بانتشار الحزمة الغاوصية عند الأبعاد المختلفة لـ  $z$  فإن نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  سيزداد كما هو موضح في الصور الموضوعة في الطرف

العلوي الأيمن من الشكل (9) والنقاط التي تمثل  $e^{-2}$  مرة من قيمة الشدة ستصبح أبعد عن المحور، كما في الشكل (9-b,c,d). إن مقارنة دقيقة بين الأشكال المعبرة عن انزياح طور غوي يتبين لنا أنه يوجد تطابق تام بين تلك التي تملك قيم  $z$  المساوية لـ  $z_R$  و  $2z_R$  ولكنها تختلف عن الشكل الذي من أجلها تكون  $z=3z_R$ . ويعود السبب في ذلك إلى أن فرق الطور بين المجالين المتتاليين لـ  $z_R$  يساوي دائماً  $\pi$ . أما الحلقات الملونة فتدل على قيم مختلفة للانزياح الطوري الذي يتغير من  $-\pi/2$  إلى  $\pi/2$ .



الشكل (9): يمثل توزيع شدة الإضاءة للحزمة الغاوسية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  بدلالة المستوي  $x$  العمودي على منحى الانتشار  $z$  وفق الأبعاد  $z=0$ ،  $z=z_R$ ،  $z=2z_R$ ،  $z=3z_R$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي للحقل الليزري وفق المعاملات التالية:  $W_0=300\mu m$ ،  $\lambda=514.4nm$ ، حيث تمثل الصورة أعلى الشكل مقطعاً عرضياً لتوزيع الشدة، أما الصورة اليمنى فتمثل مقطعاً عرضياً لانزياح طور غوي. تظهر الأمثلة التالية الموضحة في الشكل (10) المحاكاة العددية للتغيرات التي تحصل في الحزمة الغاوسية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في ليزر الأرغون المؤين ذي الطول الموجي  $\lambda=514.4nm$  وخصر الحزمة عند البعد  $z=4z_R$  باستخدام كل من البرنامجين BorlandC++builder6 و MATLAB للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية الأبعاد الممثلة بالمقاطع العرضية وثلثية الأبعاد لكل من توزيع طويلة السعة العقدية للحقل الكهربائي بشكله المنظم كما هو موضح في الشكل (10-a) ومن ثم تمثله بقسميه الحقيقي كما في الشكل (10-c) والتخيلي كما في الشكل (10-d)، وكذلك توزيع كل من الشدة بشكله المنظم كما في الشكل (10-b) والطور كما في الشكل (10-e).

نلاحظ من الشكلين (10-a) و (10-b) أن توزع كل من طولية السعة العقدية وشدة الحقل الكهربائي بشكليهما المنظم في المركز يكون أعظماً الممثلة باللون الأحمر، ثم يتناقص كلما ابتعدنا عن مركز الحلقات أي تتدرج سعتها أو شدتها الضوئية من المركز إلى الأطراف، وبمقارنة الشكلين (10-a) و (10-b) نجد أن توزع كل من طولية السعة العقدية للحقل الكهربائي والشدة يحافظان على شكليهما بحيث يملكان توزعاً غاوصياً ثنائي الأبعاد الممثل في الصور عند أطراف الشكل، وثلاثي الأبعاد الممثل في مركز الصورة، إلا أن عرض الحزمة الغاوصية التابعة لكل منهما يتناقص بمقدار  $e^{-1}$  و  $e^{-2}$  من قيمته العظمى على الترتيب عند محور الانتشار  $z$  لأن طولية السعة والشدة تتناسبان طردياً مع  $\exp\left[-(x^2 + y^2)/W^2(z)\right]$  و  $\exp\left[-2(x^2 + y^2)/W^2(z)\right]$  على الترتيب وهذا يعني أن كل من توزع السعة العقدية والشدة للحقل الكهربائي يتخامدان عرضانياً وفق نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  لأنهما يحققان المعادلات التالية:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)}\right] = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(z)}\right]$$

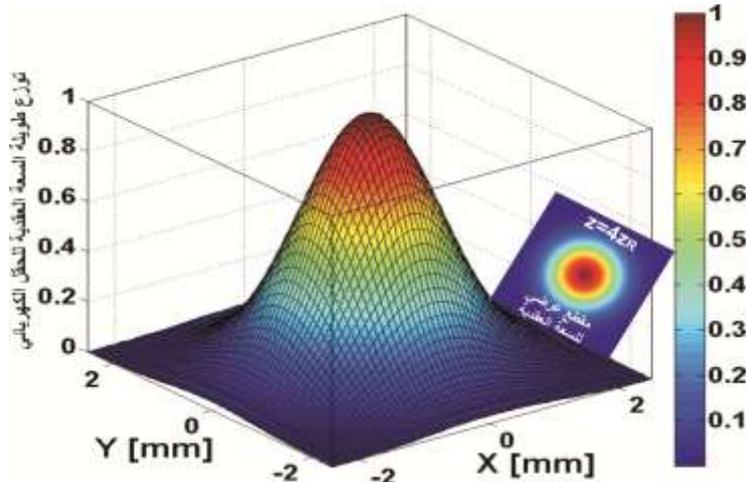
$$I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2 = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left[-2\frac{r^2}{W^2(z)}\right]$$

ويدل الشريط الجانبي الملون للشكلين (10-a) و (10-b) على توزع قيم طولية السعة العقدية وشدة الإضاءة لكل حلقة بحسب لونها ابتداءً من اللون الأزرق التي تكون قيم توزع طولية السعة العقدية وشدة الإضاءة فيها ضعيفة عند الأطراف إلى اللون الأحمر ومن ثم تكون أعظمية في المركز.

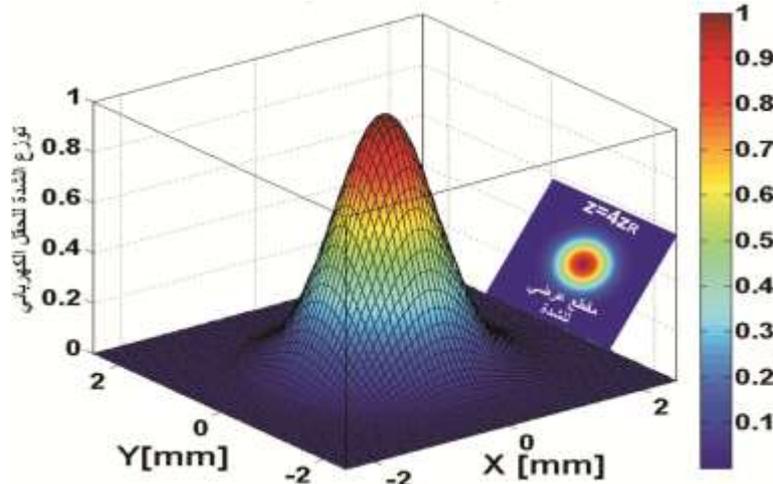
بينما يوضح الشكلين (10-c) و (10-d) بأن هيئة كل من الجزء الحقيقي والتخيلي لتوزع السعة العقدية للحزمة الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  هو عبارة عن حزم حلقة بحيث تمثل كل حلقة توزع مختلف عن توزع الحلقة التي تليها بسبب الاختلاف في فرق الطور بين الحلقات المتجاورة. أما الشكل (10-e) فيمثل انزياح طور غوي والمعطى بالعلاقة (16) والذي سبق أن شرحناه بالتفصيل مسبقاً. ويدل الشريط الجانبي الملون للأشكال (10-c,d,e) على تغير القيم الموضحة بجانب كل شكل بدءاً من القيم الدنيا إلى القيم العظمى بحسب لونها.

ويوضح الشكل (11) تغيرات نصف عرض الحزمة  $W(z)$  الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  بتابعية الأبعاد المختلفة لقيم  $z$  باستخدام تقنية الطيف الزاوي ولأنواع مختلفة من الليزرات الغازية والأجسام الصلبة باعتبار خسر الحزمة الغاوصية  $W_0=200\mu\text{m}$ .

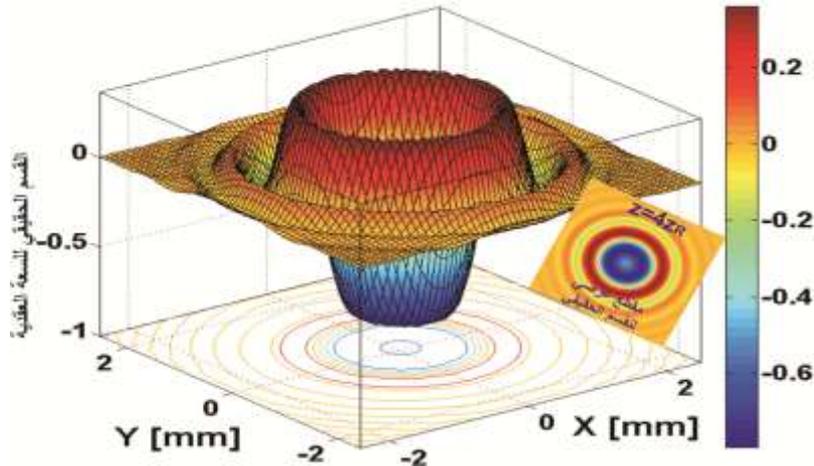
والجدير بالذكر أنه باستخدام طريقة الطيف الزاوي  $z \ll z_R$  فإننا نحصل على قيمة  $W(z) \approx W_0 \square 199.84\mu\text{m}$  أي أنها تختلف قليلاً عن القيمة النظرية  $W_0=200\mu\text{m}$  أي أنه يوجد توافق كبير بين الطريقتين النظرية والانعراجية (الطيف الزاوي) المعتمدة في هذا البحث. عند مجال رايلي  $z = z_R$  فإن  $W(z = z_R) = W_0 \sqrt{2} \square 288.83\mu\text{m}$ ، أي أن نصف عرض الحزمة سيزداد بمقدار  $\sqrt{2}$  مرة من قيمة  $W_0$ . أما من أجل مسافات بعيدة  $z \gg z_R$  فإن نصف العرض  $W(z)$  سوف يزداد بشكل خطي مع المسافة  $z$ ، وفقاً للعلاقة (9)، وبالتالي سيتغير نصف انفرج الحزمة الغاوصية لكل من الليزرات المستخدمة. ويوضح الجدول (1) ذلك.



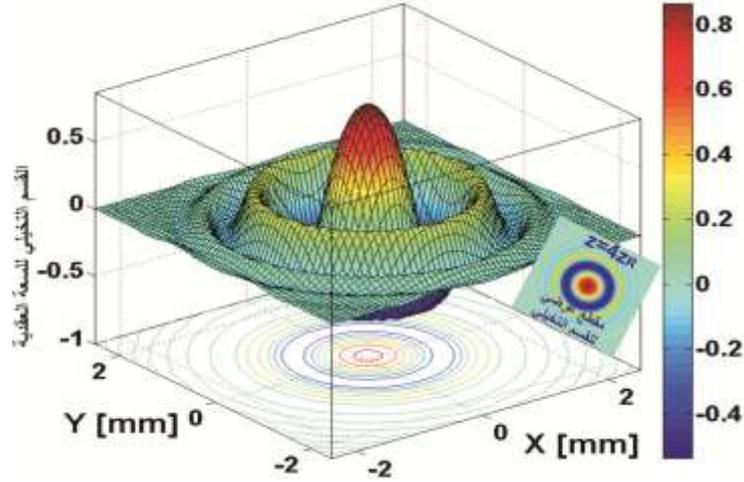
الشكل (10-a): يمثل توزيع طولية السعة العنقودية للحقل الكهربائي بشكله المنظم بينما الصورة في الطرف الأيمن تمثل مقطعاً عرضياً للسعة العنقودية والشريط الجانبي الملون يمثل قيم طولية السعة العنقودية لكل حلقة حسب لونها.



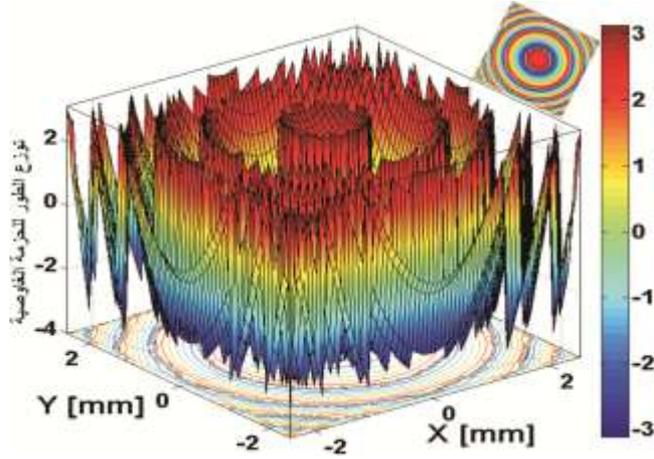
الشكل (10-b): يمثل توزيع شدة الإضاءة للحزمة الغاوصية بشكله المنظم بينما الصورة في الطرف الأيمن تمثل مقطعاً عرضياً للشدة والشريط الجانبي الملون يمثل قيم الشدة لكل حلقة حسب لونها.



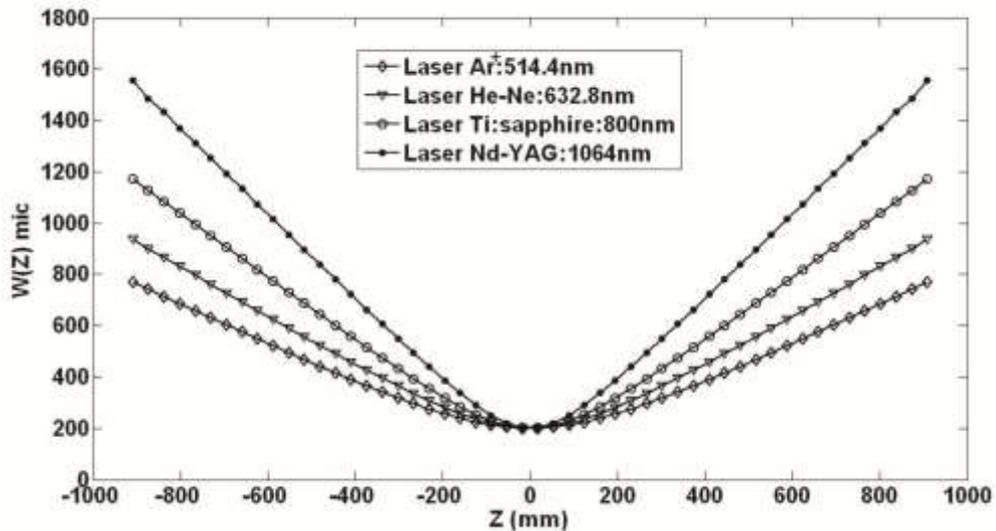
الشكل (10-c) يمثل القسم الحقيقي لتوزيع السعة العنقودية بينما الصورة في الطرف الأيمن تمثل مقطعاً عرضياً للقسم الحقيقي والشريط الجانبي الملون يمثل قيم القسم الحقيقي لكل حلقة حسب لونها.



الشكل (10-d): يمثل القسم التخيلي لتوزيع السعة العقدية بينما الصورة في الطرف الأيمن تمثل مقطعاً عرضياً للقسم التخيلي والشريط الجانبي الملون يمثل قيم القسم التخيلي لكل حلقة حسب لونها.



الشكل (10-e): يمثل توزيع انزياح طور غوي للحزمة الغاوصية بينما الصورة في الطرف الأيمن العلوي تمثل مقطعاً عرضياً للطور والشريط الجانبي الملون يمثل قيم الطور لكل حلقة حسب لونها.



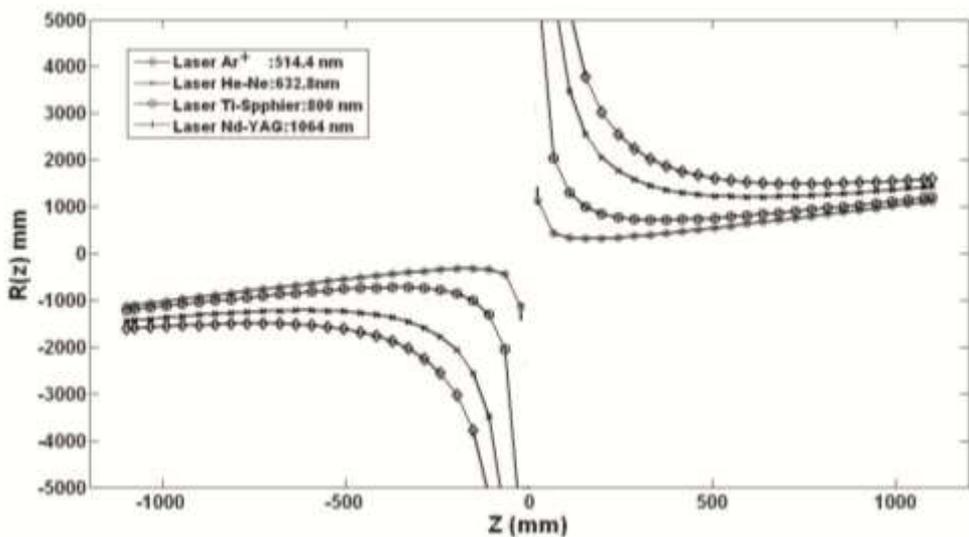
الشكل (11): تغيرات نصف عرض الحزمة الليزرية بتابعة الأبعاد المختلفة لـ  $z$  لأنواع مختلفة من الليزرات

الجدول (1): يوضح قيم نصف انقراج الحزمة الغاوصية من النمط الأساسي لأنواع مختلفة من الليزر.

أنواع الليزر	Ar <sup>+</sup> λ=514.4nm	He:Ne λ=632.8nm	Ti: Sapphire λ=800nm	Nd-YAG λ=1064nm
θ(mRad)	0.818	1.007	1.273	1.693

من المهم ملاحظة أنه من أجل قيمة معينة لـ  $\lambda$  فإن تغير أبعاد الحزمة وانقراجها يتغير بتغير  $z$  الذي بدوره هو تابع لمتغير وحيد  $W_0$  هو نصف عرض خسر الحزمة، والنقطة الأكثر أهمية والتي يجب ذكرها أنه كلما ازداد طول الموجة  $\lambda$  ازدادت زاوية انقراج الحزمة الغاوصية.

ويبين الشكل (12) تغيرات نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  بتابعية الأبعاد المختلفة لقيم  $z$  والتي تنتشر بشكل متناظر بين طرفي خسر الحزمة الغاوصية وفق المحور  $z$  ولأنواع مختلفة من الليزر الغازية والأجسام الصلبة باستخدام تقنية الطيف الزاوي باعتبار خسر حزمة غاوصية  $W_0=200\mu\text{m}$ .



الشكل (12): تغيرات نصف قطر انحناء جبهة الموجة بتابعية الأبعاد المختلفة لـ  $z$  لأنواع مختلفة من الليزر.

نلاحظ من الشكل (12) أن نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  يتناقص مع ازدياد البعد  $z$  عن القيمة العظمى إلى قيمة صغرى، ثم يتزايد ثانية مع ازدياد البعد  $z$ . ويفسر ذلك وفقاً للعلاقة (11) كما يلي: في البداية يكون نصف قطر انحناء جبهة الموجة في اللانهاية  $R(z=0) = \infty$  وتكون جبهة الموجة مستوية عند خسر الحزمة. ومن ثم يبلغ نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  للحزمة الغاوصية أصغر قيمة له بالقيمة المطلقة عندما تنحصر منطقة خسر الحزمة الغاوصية ضمن المجال  $-z_R < z < z_R$  والتي تسمى بالعمق المحرق  $b = 2z_R$  وضمن هذا المجال يمكن اعتبار سطوح جبهات الموجة للحزمة الغاوصية مستوية تقريباً. بالإضافة لذلك فإنه عندما يكون  $z = \pm z_R$  فإن نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  يمر بنهائيتين أصغريتين توافقان القيمة  $R_{\min}(z) = \pm 2z_R$  لذلك فإن مركز الانحناء الملاحظ عند  $z = z_R$  يكون متواجداً عند النقطة  $z = -z_R$  والعكس بالعكس. ويوضح الجدول (2) ذلك.

الجدول (2): بوضوح قيم نصف قطر انحناء جبهة الموجة عند العمق المحرقى لأنواع مختلفة من الليزر.

أنواع الليزر	Ar <sup>+</sup> λ=514.4nm	He:Ne λ=632.8nm	Ti:Sapphire λ=800nm	Nd-YAG λ=1064nm
$R_{\min} = 2z_R [mm]$	488.582	397.166	314.158	236.208

وبعد ذلك تبدأ جبهة الموجة بالانحناء تدريجياً، ويسعى نصف قطر انحناء  $R(z)$  بشكل كبير إلى اللانهاية على جانبي مجال رايلي  $z_R$  وتتزايد قيمة نصف قطر انحناء جبهة الموجة لتصل إلى قيمة مساوية لـ  $z$  عند  $R(z) \approx z$  ، وإن الحزمة الغاوصية تكون مشابهة للموجة الكروية الصادرة عن منبع نقطي متموضع في مركز خصر الحزمة. ويعني ذلك فيزيائياً أن مركز انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  تبدأ من  $-\infty$  عند  $z \rightarrow -\infty$  من الطرف الأيمن من خصر الحزمة، ومن ثم تتجه باتجاه خصر الحزمة وبعدها تسعى باتجاه الطرف الثاني من خصر الحزمة إلى  $z \rightarrow \infty$ . وهذه النتيجة تدل على مفهوم فيزيائي مهم وهو أن الحزمة الليزرية تنتشر بشكل أمواج شبه مستوية تقريباً وهذا ما يميزه عن الضوء الطبيعي، ولهذا السبب نجد في الأدبيات والمراجع العلمية أن هيئة الحزم الليزرية، تسمى بالحزم الأسطوانية الشكل وجبهة موجتها شبه مستوية وزاوية انفرجها صغيرة جداً.

### الاستنتاجات والتوصيات:

إن دراسة انتشار الحزم الغاوصية في الفراغ الحر من الناحية الانعراجية لأنواع مختلفة من الليزر الغازية والأجسام الصلبة ومحاكاتها عددياً باستخدام كل من البرنامجين BorlandC++builder6 و MATLAB للحصول على الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد لتوزيع شدة الإضاءة للحزمة الغاوصية وانزياح طورها، وكذلك إيجاد توزيع السعة العقدية للحقل الكهربائي للحزمة الغاوصية وتمثيلها فراغياً بقسميها الحقيقي والتخيلي، وكذلك دراسة كل من تغيرات نصف عرض الحزمة الغاوصية  $W(z)$  ونصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  عند أبعاد مختلفة وفق منحى انتشار  $z$  للحزمة الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  لأنواع مختلفة من الليزر الغازية والصلبة بطريقة تقنية الطيف الزاوي سمحت لنا بتحليل أشكال الحزم الغاوصية. ولقد وجدنا أن عرض الحزمة الغاوصية يتغير من ليزر إلى آخر، مما يدل على أن طول موجة الضوء المستخدم يعتبر من إحدى أهم المتغيرات الرئيسة التي تؤثر في الحزم الغاوصية من النمط الأساسي  $TEM_{00}$  في أثناء انتشارها في الفراغ الحر. بالإضافة إلى تأثير كل من نصف قطر انحناء جبهة الموجة  $R(z)$  ونصف عرض الحزمة  $W(z)$ ، فضلاً عن انزياح طور غوي  $\phi(z)$  الذي له أهمية خاصة لدى دراسة انتشار الحزم الغاوصية في الفراغ الحر. وتقيد هذه النتائج في التحكم بالأبعاد الهندسية للمجاوبات البصرية المستقرة ومعرفة حدود صلاحيتها لاستخدامها في المنظومات الليزرية وكذلك في مساعدة الباحثين لتحديد نوعية المجاوبة البصرية المستخدمة بهدف الحصول على أفضل النتائج للتطبيقات الليزرية، إذ يمكن استخدام نتائج هذا البحث بإضافة مرايا عند طرفي الحزمة الغاوصية بحيث يتشكل لدينا مجاوبات بصرية مستقرة مثل مجاوبة بصرية متحدة المحرق أو متحدة المركز.....إلخ.

وكذلك يمكن الاستفادة من هذه النتائج لإجراء دراسات لاحقة في المجاوبات البصرية المستقرة لتحسين الحزمة الليزرية نتيجة تغير أبعاد المجاوبة البصرية وفق البعد بين مراياها ونصف قطر انحناء سطح المرايا وبعيد النقطة المدروسة. وتستخدم مثل هذه المجاوبات بشكل واسع في الليزر العملية، وبشكل خاص أنماط المجاوبات الغاوصية المستقرة التي تشكل جزءاً أساسياً في علم فيزياء الليزر.

## المراجع:

- [1]- HODGSON, N.; WEBER, H. *Laser Resonators and beam propagation, fundamentals, advanced concepts and applications*. 2<sup>nd</sup>.ed., Springer, 2005, 703.
- [2]- JOSEPH T.; VERDEYEN. *Laser Electronics*, 3<sup>rd</sup>. ed., University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 1996, 779.
- [3]- *Laser and Laser-Related Equipment—Test Methods for Laser Beam Parameters—Beam Widths, Divergence Angle and Beam Propagation Factor*; International Organization for Standardization. 1999, IS-11146.
- [4]- ALSULTANY, YA. *Laser Beam Analysis Using Image Processing*. J. Computer Sci. 2006, Vol2, 109-113.
- [5]- SELF, S.A. *Focusing of spherical Gaussian Beams*. Appl. Opt. 1983, 22, 658–661.
- [6]- GOODMAN, J.W. *Introduction to Fourier Optics*. The McGraw-Hall Companies, 3<sup>rd</sup>. ed., 2005, 491.
- [7]- MAGNES, J.; ODERA, D.; HARTKE, J.; FOUNTAAIN, M.; FLORENCE, L.; DAVIS, V. *Quantitative and Qualitative study of Gaussian Beam Visualization Techniques*. physics. Optics -2008.
- [8]- ZHANG, L. *Intensity Spatial Profile Analysis of a Gaussian Laser Beam at Its Waist Using an Optical Fiber System*. 2010, Vol 27, No.5, 054207.
- [9]- SVELTO, O. *Principles of Lasers*, 4<sup>nd</sup>. ed., Plenum Press: New York, 1998, 595.
- [10] SIEGMAN, A.E. *Lasers*; Oxford University Press: Mill Valley, CA, 1986 ,1283.
- [11]- TRÄGER, F. *Springer handbook of lasers and optics*, Springer. 1<sup>st</sup>. ed., 2007, 1313.
- [12]- KOGELNIK, H. *Propagation of Laser Beams*. In Applied Optics and Optical Engineering; Shannon, R., Wyant, J.C., Eds.; Academic Press: San Diego, 1979, Vol. VII, 155–190.
- [13]- SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*, Wiley Series in pure and Applied Optics. 2<sup>nd</sup>. ed., John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2007, 1177.
- [14]- LALOR, E. *Conditions for the validity of the angular spectrum of plane waves*. J. Opt. Soc. Am. Vol. 58, 1968, 1235–1237.
- [15]- HILD, R. *Angular spectrum description of light propagation in planar diffractive optical elements*. Proc. SPIE 5456, 364 ; doi:10.1117/12.544471. 2004.
- [16]- DMINGUEZ, A.C.; ARROYO, J.B. GOMEZ, J.E.; NICONOFF, G.M. *Numerical calculation of near field scalar diffraction using angular spectrum of plane waves theory and FFT* . Rev. Mex. Fis. E56(2), 2010,159-164.