مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

دراسة استقرارية ε–النقاط السرجية لمسائل القيم القصوى لدوال محدبة/ مقعرة

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور وديع علي **
نسرين الخمير***

(تاريخ الإيداع 20 / 7 / 2011. قُبِل للنشر في 18 / 3 /2012)

ملخّص

الهدف من البحث هو دراسة استقرار ε– النقاط السرجية لمسائل القيم القصوى لدوال محدبة / مقعرة حيث نقوم في هذا البحث بتعميم بعض النتائج المتعلقة بالدوال المحدبة (المقعرة) ذات المتحول الواحد والتي درست من قبل أتوش و ويتس إلى دوال محدبة / مقعرة بمتحولين ودراسة العمليات الجبرية فوق/ تحت– البيانية وذلك بتحويل المسألة إلى مسألتين (مسألة قيم صغرى ومسألة قيم عظمى) وهذا يتم باستخدام الدوال الحدية الدنيا والعليا لدالة محدبة / مقعرة .

الكلمات المفتاحية: فوق البيان، تحت البيان، المجموع فوق/ تحت – البياني، الجداء فوق/ تحت – البياني، نقطة سرجية، ε– نقطة سرجية، دالة حدية دنيا، دالة حدية عليا.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** مدرس – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
*** طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

On $\varepsilon-$saddle points stability of min/max problems

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Wadih Ali **
Nisreen Alkhamir ***

(Received 20 / 7 / 2011. Accepted 18 / 3 /2012)

□ ABSTRACT □

The purpose of the research is to study the stability of the $\varepsilon-$saddle points of min\max problems of convex \ concave functions . In this research we will generalize some results related to convex (concave) functions which have been studied by Attouch and Wits to convex \ concave functions , besides to studying the epi\hypo graphical algebraic operations , for that we will divide the problem into two problems (min problem and max problem) and that will be done with using the upper marginal function and lower marginal function of convex \ concave function .

Key words : epi-graph, epi/hypo – graph, epi/hypo – sum, Epi/hypo multiplication , saddle point, upper marginal function, lower marginal function, $\varepsilon-$saddle point .

***Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة :

يدرس التحليل فوق البياني مسائل نظرية القيم الصغرى باستخدام مفهوم فوق البيان :

$$epif =\{(x,r) \in X \times R \mid f(x) \le r\}$$

كما يدرس التحليل تحت البياني بشكل مناظر مسائل نظرية القيم العظمى باستخدام مفهوم تحت البيان :

$$hypo f =\{(x,r) \in X \times R \mid f(x) \ge r\}$$

حيث X فضاء متجهي .

بينما التحليل فوق/ تحت – البياني الذي يتضمن النظريتين السابقتين يدرس مسائل النقاط السرجية أو ما يسمى مسائل نظرية القيم القصوى ، مما أدى إلى خلق مفاهيم جديدة مثل التقارب فوق/تحت – البياني ، التكامل فوق/تحت – البياني ، المشتق فوق/تحت – البياني ، الجمع فوق/تحت – البياني ، الضرب فوق/تحت – البياني ..... الخ ، وقد تبنى هذه المفاهيم العديد من الرياضيين في دراسة مسائل القيم السرجية $[2,3,5,12]$.

ونشير هنا إلى أن هذه النظرية واجهت صعوبات عدة لعدم وجود وصفٍ هندسيٍّ لها كما هو الحال في الحالتين السابقتين .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة استقرار النقاط السرجية و $\varepsilon-$ النقاط السرجية لمسائل القيم القصوى والعمليات الجبرية عليها، وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في نظرية الأمثليات ونظرية التحكم في بعض مسائل القيم القصوى وخاصةً منها المحدبة / المقعرة، وكذلك يساهم في إيجاد حلول المسائل الخطية التي تتعلق بأكثر من متحول .

طرائق البحث ومواده :

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل فوق البياني وبالتحليل فوق/تحت – البياني والتي تساعدنا في عرض الموضوع، حيث نستخدم الدوال الحدية العليا والدنيا في تحويل المسألة بمتحولين إلى مسألتين بمتحول واحد وذلك لبرهان النتائج التي حصلنا عليها .

1–تعاريف ومفاهيم أساسية :

ليكن X ,Y فضائين تبولوجيين و X^{*},Y^{*} فضائيهما الثنويين على الترتيب .

نذكّر ببعض عناصر التحليل المحدب (convex analysis) ومن أجل تفاصيل أكثر ينصح بالعودة إلى المراجع التالية [11,7,5,1] :

لتكن الدالة $f : X \to \bar{R}$ ، عندئذٍ :

- نقول عن المجموعة $C \subseteq X$ إنَّها مجموعة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x,y \in C \quad , \quad \forall \alpha \in [0,1] \; ; \quad \alpha x +(1-\alpha)y \in C$$

- نقول عن f إنَّها دالة محدبة على المجموعة C إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x,y \in C \quad , \quad \forall \alpha \in [0,1] \; ; \quad f\left(\alpha x +(1-\alpha)y\right) \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

بحيث يكون الطرف الأيمن معرَّفاً .

• يبرهن أنَّ الدالة f محدبة إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة محدبة في $X\times R$ ، وأنَّ f دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة مغلقة ، وأنَّ f دالة خاصة (فعلية) (proper) إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $dom f=\{x\in X \mid f(x)<+\infty\}\neq\varnothing$.

• نقول إنَّ f دالة مقعرة إذا وفقط إذا كانت $(-f)$ محدبة .

• نرمز لمجموعة الدوال المحدبة والنصف مستمرة من الأدنى والخاصة (الفعلية) على X بالرمز $\Gamma(X)$.

• تعرَّف الدالة المرافقة $f^*:X^*\to\bar{R}$ للدالة f بالعلاقة :

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in X}\{\langle x,x^*\rangle-f(x)\} \qquad (1)$$

وهي دالة محدبة سواء كانت f محدبة أم ليست محدبة .

• تعرَّف الدالة الدليلية للمجموعة $A\subseteq X$ والتي يرمز لها بالرمز δ_A كما يلي :

$$\delta_A=\begin{cases}0 & ;\ x\in A\\ +\infty & ;\ x\notin A\end{cases}$$

وتكون الدالة δ_A محدبة إذا وفقط إذا كانت A مجموعة محدبة .

• نرمز لمجموعة النقاط الأصغرية للدالة f بالرمز $\arg\min f$ وتعرف بالشكل التالي :

$$\arg\min f=\left\{\bar{x}\in X \mid f(\bar{x})=\inf_{x\in X} f(x)\right\}$$

• من أجل كل $\varepsilon>0$ نرمز لمجموعة ε–النقاط الأصغرية للدالة f بالرمز $\varepsilon-\arg\min f$ وتعرف بالشكل:

$$\varepsilon-\arg\min f=\left\{\bar{x}\in X \mid f(\bar{x})\le\sup\left\{\inf f+\varepsilon;-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\} \qquad (2)$$

نلاحظ أنَّ المجموعة $\varepsilon-\arg\min f$ دوماً غير خالية ، وقد عرفت بالشكل السابق نظراً لكون المقدار $\inf f$ يمكن أن يساوي $-\infty$.

<u>تعريف العمليات الجبرية فوق البيانية وخواصها</u> [4] :

• نعرّف المجموع فوق البياني $f\underset{e}{+}g$ (epi–sum) للدالتين $f,g:X\to\bar{R}$ بالعلاقة التالية :

$$\left(f\underset{e}{+}g\right)(x)=\inf_{u\in X}\{f(u)+g(x-u)\} \qquad (3)$$
$$=\inf_{\substack{u,v\in X\\ u+v=x}}\{f(u)+g(v)\}$$

• يعرّف الجداء فوق البياني $\lambda * f$ (epi–multiplication) للدالة $f:X\to\bar{R}$ بعدد $\lambda>0$ بالعلاقة التالية :

$$\left(\lambda\underset{e}{*}f\right)(x)=(\lambda f)(\lambda^{-1}x) \qquad (4)$$

وقد برهن أتوش– ويتس [4] أن :

1) $epi_s\left(f\underset{e}{+}g\right)=epi_s(f)+epi_s(g)$ ، 2) $epi\left(\lambda\underset{e}{*}f\right)=\lambda epi(f)$

حيث $epi_s f=\{(x,r)\in X\times R \mid f(x)<r\}$ فوق البيان التام للدالة f .

ونشير هنا إلى أنَّ جمع مجموعتين محدبتين هو مجموعة محدبة وعليه إذا كانت كل من f و g دالة محدبة فإن $epi_s\left(f \underset{e}{+} g\right)$ مجموعة محدبة وعليه تكون الدالة $f \underset{e}{+} g$ دالة محدبة .

نعطي الآن بعض المبرهنات التي تتعلق ببعض خواص العمليات الجبرية واستقرار النقاط الأصغرية لبعض المسائل القيم القصوى لدوال محدبة :

مبرهنة 1.1 : [4]

من أجل الدالتين $f, g: X \to \overline{R}$ لدينا الخاصتان التاليتان :

$$\left(f \underset{e}{+} g\right)^* = f^* + g^* \qquad (1$$

$$\inf\left(f \underset{e}{+} g\right) = \inf f + \inf g \qquad (2$$

مبرهنة 1.2 : [4]

لتكن $f, g: X \to \overline{R}$ دالتين محدبتين ، وبفرض $\lambda > 0$ عندئذٍ :

$$\arg\min f + \arg\min g \subset \arg\min\left(f \underset{e}{+} g\right) \qquad (1$$

$$\lambda\left(\arg\min f\right) = \arg\min\left(\lambda \underset{e}{*} f\right) \qquad (2$$

مبرهنة 1.3 : [4]

ليكن $f, g: X \to \overline{R}$ دالتين محدبتين ، وبفرض $\varepsilon_1 > 0 \;,\; \varepsilon_2 > 0 \;,\; \lambda > 0$ عندئذٍ :

$$\varepsilon_1 - \arg\min f + \varepsilon_2 - \arg\min g \subset \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) - \arg\min\left(f \underset{e}{+} g\right) \qquad (1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \arg\min\left(f \underset{e}{+} g\right) \subset \varepsilon - \arg\min f + \varepsilon - \arg\min g \qquad (2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \lambda\left(\varepsilon - \arg\min f\right) = \left(\lambda\varepsilon\right) - \arg\min\left(\lambda \underset{e}{*} f\right) \qquad (3$$

- وبشكل مناظر وباستخدام العمليات تحت البيانية يتم الحصول على نتائج مشابهة تتعلق بمسائل القيم العظمى حيث يعرَّف المجموع تحت البياني للدالتين f, g ويرمز له بالرمز $f \overset{h}{+} g$ بالعلاقة :

$$f \overset{h}{+} g = \sup_{u \in X}\left\{f(u) + g(x-u)\right\} \qquad (5)$$

$$= \sup_{\substack{u,v \in X \\ u+v=x}}\left\{f(u) + g(v)\right\} = -\left((-f) \underset{e}{+} (-g)\right)$$

ويعرّف الجداء تحت البياني $\mu \overset{h}{*} g$ للدالة g بعدد $\mu > 0$ بالعلاقة التالية :

$$\left(\mu \overset{h}{*} g\right)(x) = (\mu g)\left(\mu^{-1} x\right) \qquad (6)$$

ننتقل الآن لإعطاء بعض تعاريف ومفاهيم التحليل فوق/ تحت البياني [2,6] :

لتكن $L: X \times Y \to \overline{R}$ دالة معرفة على $X \times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

• نقول عن الدالة L إنَّها محدبة / مقعرة إذا كانت محدبة بالنسبة إلى المتحول الأول ومقعرة بالنسبة إلى المتحول الثاني أي من أجل كل x من X تكون $L(.,y)$ دالة محدبة ومن أجل كل y من Y تكون $L(x,.)$ دالة مقعرة .

• تعرف الدالة الحدية العليا f_L (upper marginal function) للدالة L بالعلاقة التالية :

$$f_L = \sup_{y\in Y} L(x,y) \qquad ; \qquad f_L : X \to \overline{R} \qquad (7)$$

• تعرف الدالة الحدية الدنيا g_L (lower marginal function) للدالة L بالعلاقة التالية :

$$g_L = \inf_{x\in X} L(x,y) \qquad ; \qquad g_L : Y \to \overline{R} \qquad (8)$$

• يبرهن أنَّه إذا كانت الدالة L محدبة / مقعرة عندئذٍ تكون الدالة الحدية العليا f_L دالة محدبة وتكون الدالة الحدية الدنيا g_L دالة مقعرة .

• نقول عن النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ إنَّها نقطة سرجية (saddle point) للدالة L إذا حققت الشرط التالي :

$$L(\bar{x},y) \le L(\bar{x},\bar{y}) \le L(x,\bar{y}) \qquad \forall (x,y)\in X\times Y \qquad (9)$$

وهو مكافئ للشرط : $$f_L(\bar{x}) \le g_L(\bar{y}) \qquad (10)$$

• نرمز لمجموعة النقاط السرجية للدالة L بالرمز $\arg\min\max L$ وتعطى بالشكل :

$$\arg\min\max L = \{(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y \mid L(\bar{x},y) \le L(\bar{x},\bar{y}) \le L(x,\bar{y}) \qquad \forall (x,y)\in X\times Y\}$$

• من أجل كل $\varepsilon>0$ عرف ماكليندن (Mclinden) [9] النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ أنَّها $\varepsilon-$ نقطة سرجية للدالة L إذا حققت الشرط التالي :

$$L(\bar{x},y)-\varepsilon \le L(\bar{x},\bar{y}) \le L(x,\bar{y})+\varepsilon \qquad \forall (x,y)\in X\times Y \qquad (11)$$

نرمز لمجموعة $\varepsilon-$النقاط السرجية للدالة L بالرمز $\varepsilon-\arg\min\max L$.

• بينما عرف سويقات (Soueycatt) [12] أنَّه من أجل كل $\varepsilon>0$ تكون النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ $\varepsilon-$ نقطة سرجية للدالة L تحت الشرط $\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} L(x,y) = \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y)$ إذا حققت الشرط التالي :

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \varepsilon-\arg\min\max L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}\in \varepsilon-\arg\min f_L \\ \bar{y}\in \varepsilon-\arg\max g_L \end{cases} \qquad (12)$$

حيث إنَّ :

$$\varepsilon-\arg\min f_L = \left\{\bar{x}\in X \mid f_L(\bar{x}) \le \sup\left\{\inf f + \varepsilon ; -\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}$$

$$\varepsilon-\arg\max g_L = \left\{\bar{y}\in Y \mid g_L(\bar{y}) \ge \inf\left\{\sup g - \varepsilon ; +\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}$$

• يبرهن أنَّ : $$\arg\min\max L = \bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon-\arg\min\max L$$

• تعرف الدالة القرينة المحدبة (parent convex) F_L للدالة L حيث $F_L : X\times Y^* \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$F_L(x,y^*) = \sup_{y\in Y}\{L(x,y) + \langle y,y^*\rangle\} \qquad (13)$$

• تعرف الدالة القرينة المقعرة (parent concave) G_L للدالة L حيث $G_L : X^*\times Y \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$G_L\left(x^*,y\right)=\inf_{x\in X}\left\{L\left(x,y\right)-\left\langle x,x^*\right\rangle\right\} \qquad (14)$$

• نقول عن الدالة L إنَّها مغلقة إذا كان $F_L=-G_L^*$ و $F_L^*=-G_L$ حيث G^*,F^* هما الدالتان المرافقتان للدالتين G,F على الترتيب .

<u>مبرهنة 1.4</u> :[10]

لتكن $L:X\times Y\to\overline{R}$ دالة محدبة – مقعرة تحقق الشروط التالية :

i. من أجل كل $y\in Y$ يكون $L\left(.,y\right)\in\Gamma\left(X\right)$.

ii. يوجد $y_0\in Y$ بحيث $L\left(.,y_0\right)$ دالة خاصة .

iii. يوجد $y_1\in Y$ بحيث $L\left(.,y_1\right)$ دالة قسرية .

عندئذٍ :
$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y}L\left(x,y\right)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}L\left(x,y\right)$$

النتائج والمناقشة:

نبدأ بتعريف العمليات الجبرية فوق / تحت – البيانية بشكل متناظر مع العمليات الجبرية فوق البيانية التي تم ذكرها سابقاً.

<u>تعريف2.1</u>: لتكن الدالتين $L,K:X\times Y\to\overline{R}$ ، عندئذٍ :

• يعرف المجموع فوق/تحت – البياني $L\underset{e|h}{+}K$ $\left(epi/hypo-sum\right)$ للدالتين L,K بالعلاقة التالية :

$$\left(L\underset{e|h}{+}K\right)\left(x,y\right)=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L\left(u,v\right)+K\left(x-u,y-v\right)\right\}$$
$$=\inf_{\substack{u_1,u_2\in X\\u_1+u_2=x}}\ \sup_{\substack{v_1,v_2\in Y\\v_1+v_2=y}}\left\{L\left(u_1,v_1\right)+K\left(u_2,v_2\right)\right\}$$

• يعرف الجداء فوق/تحت – البياني $\lambda\underset{e|h}{*}L$ $\left(epi/hypo-multiplication\right)$ للدالة L بالعدد $\lambda>0$ بالعلاقة :

$$\left(\lambda\underset{e|h}{*}L\right)\left(x,y\right)=\lambda L\left(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y\right)$$

لنرمز بـ $\overline{R}^{X\times Y}$ لمجموعة الدوال المحدبة / المقعرة المعرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

<u>مبرهنة 2.2</u> :

تشكل مجموعة الدوال $\overline{R}^{X\times Y}$ المحققة لشروط المبرهنة 1.4 مع عملية الجمع $\underset{e|h}{+}$ شبه زمرة تبديلية .

<u>البرهان</u> : بفرض $L,K,H\in\overline{R}^{X\times Y}$ دوال كيفية محدبة / مقعرة وتحقق شروط المبرهنة 1.4 ، عندئذٍ :

1) الخاصة التبديلية :

حسب تعريف المجموع فوق/تحت – البياني :

$$\left(L\underset{e|h}{+}K\right)\left(x,y\right)=\inf_{u_1+u_2=u}\ \sup_{v_1+v_2=v}\left\{L\left(u_1,v_1\right)+K\left(u_2,v_2\right)\right\}$$
$$=\inf_{u_1+u_2=u}\ \sup_{v_1+v_2=v}\left\{K\left(u_2,v_2\right)+L\left(u_1,v_1\right)\right\}=\left(K\underset{e|h}{+}L\right)\left(x,y\right)$$

2) الخاصة التجميعية :

$$\left[\left(L \underset{e|h}{+} K\right) \underset{e|h}{+} H\right](x,y) = \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{\left(L \underset{e|h}{+} K\right)(u,v) + H(x-u,y-v)\right\}$$

$$= \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{\inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)\right\} + H(x-u,y-v)\right\}$$

$$= \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$$

لنفرض الآن $\psi(u,y) = \sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$ عندئذٍ نجد أنَّ الدالة $\psi(.,y)$ تشكل غلاف محدب لدوال من $\Gamma(X)$ وعليه فإنه من أجل كل $y\in Y$ تكون $\psi(.,y)$ دالة من $\Gamma(X)$.

من جهة أخرى لدينا $\psi(u,y) \geq \left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$

وبما أنَّ الدوال L,K,H تحقق شروط المبرهنة 1.4 فهي دوال قسرية بالنسبة إلى المتحول x وعليه تكون الدالة $\psi(.,y)$ قسرية وبالتالي تحقق شروط المبرهنة 1.4 ومنه :

$$\left[\left(L \underset{e|h}{+} K\right) \underset{e|h}{+} H\right](x,y) = \inf_{u\in X}\inf_{u_1\in X}\sup_{v\in Y}\sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$$

$$= \inf_{u_1\in X}\inf_{u\in X}\sup_{v_1\in Y}\sup_{v\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$$

وبنفس الطريقة نجد أنَّ الدالة $\eta(u,y) = \sup_{v\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$ تحقق شروط المبرهنة 1.4 وعليه :

$$\left[\left(L \underset{e|h}{+} K\right) \underset{e|h}{+} H\right](x,y) = \inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}$$

$$= \inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{K(u-u_1,v-v_1)+H(x-u,y-v)\right\}\right\}$$

$$= \inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{L(u_1,v_1)+\left(K \underset{e|h}{+} H\right)(x-u_1,y-v_1)\right\}$$

$$= \left[L \underset{e|h}{+}\left(K \underset{e|h}{+} H\right)\right](x,y)$$

3) العنصر الحيادي (الدالة الدليلية للمجموعة $\{(0,0)\}$):

$$\left(L \underset{e|h}{+} \delta_{\{(0,0)\}}\right)(x,y) = \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+\delta_{\{(0,0)\}}(x-u,y-v)\right\}$$

$$= \inf_{\substack{u\in X\\ u=x}}\sup_{\substack{v\in Y\\ v=y}}\left\{L(u,v)+0\right\} = L(x,y)$$

وهو المطلوب ■

مبرهنة 2.3 :

لتكن $\lambda,\mu>0$ ، وبفرض $L,K : X\times Y \to \overline{R}$ دالتين محدبتين / مقعرتين ، عندئذٍ :

$$\lambda \underset{e|h}{*}\left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right) \underset{e|h}{+}\left(\lambda \underset{e|h}{*} K\right) \qquad (1$$

$$\lambda \underset{e|h}{*}\left(\mu \underset{e|h}{*} L\right)=(\lambda\mu)\underset{e|h}{*} L \qquad (2$$

$$1 \underset{e|h}{*} L = L \qquad (3$$

البرهان :

يبرهن 1) اعتماداً على تعريفي المجموع فوق/تحت – البياني و الجداء فوق/تحت – البياني كما يلي :

$$\left[\lambda \underset{e|h}{*}\left(L \underset{e|h}{+} K\right)\right](x,y)=\lambda\left(L \underset{e|h}{+} K\right)\left(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y\right)$$

$$=\lambda\left[\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+K\left(\lambda^{-1}x-u,\lambda^{-1}y-v\right)\right\}\right]$$

$$=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{\lambda L(u,v)+\lambda K\left(\lambda^{-1}x-u,\lambda^{-1}y-v\right)\right\}$$

لنفرض أنَّ $v=\lambda^{-1}v_1$, $u=\lambda^{-1}u_1$ عندئذٍ :

$$\left[\lambda \underset{e|h}{*}\left(L \underset{e|h}{+} K\right)\right](x,y)=\inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{\lambda L\left(\lambda^{-1}u_1,\lambda^{-1}v_1\right)+\lambda K\left(\lambda^{-1}x-\lambda^{-1}u_1,\lambda^{-1}y-\lambda^{-1}v_1\right)\right\}$$

$$=\inf_{u_1\in X}\sup_{v_1\in Y}\left\{\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(u_1,v_1)+\left(\lambda \underset{e|h}{*} K\right)(x-u_1,y-v_1)\right\}$$

$$=\left[\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\underset{e|h}{+}\left(\lambda \underset{e|h}{*} K\right)\right](x,y)$$

ويبرهن 2) و 3) بطريقة مشابهة لبرهان 1) . وهو المطلوب ■

مبرهنة 2.4 :

لتكن $L:X\times Y\to\overline{R}$ دالة محدبة / مقعرة بحيث يكون $\inf\sup L=\sup\inf L$ ، عندئذٍ :

$$(\bar{x},\bar{y})\in\arg\min\max L \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\bar{x}\in\arg\min f_L\\ \bar{y}\in\arg\max g_L\end{cases}$$

البرهان :

لتكن $(\bar{x},\bar{y})$ نقطة كيفية من $\arg\min\max L$ عندئذٍ ينتج من العلاقة (10) أنَّ :

$$f_L(\bar{x})\le g_L(\bar{y})\le\sup_{y\in Y} g_L(y)=\inf_{x\in X} f_L(x)$$

ومنه :

$$f_L(\bar{x})\le\inf_{x\in X} f_L(x)\ \Rightarrow\ f_L(\bar{x})=\inf_{x\in X} f_L(x)$$

أي أن $\bar{x}\in\arg\min f_L$.

وكذلك ينتج :

$$f_L(\bar{x})\le g_L(\bar{y}) \quad\Rightarrow\quad \inf_{x\in X} f_L(x)\le g_L(\bar{y})$$

ومنه : $\inf_{x\in X} f_L(x)=\sup_{y\in Y} g_L(y)\le g_L(\bar{y}) \quad\Rightarrow\quad g_L(\bar{y})=\sup_{y\in Y} g_L(y)$

أي أن $\bar{y}\in\arg\max g_L$.

من جهةٍ أخرى إذا كان $\bar{x}\in\arg\min f_L$ و $\bar{y}\in\arg\max g_L$ عندئذٍ :

$$f_L\left(\bar{x}\right)=\inf_{x\in X} f_L\left(x\right)=\sup_{y\in Y} g_L\left(y\right)=g_L\left(\bar{y}\right)$$

أي حسب العلاقة (10) تكون $\left(\bar{x},\bar{y}\right)\in \arg\min\max L$. وهو المطلوب ■

<u>مبرهنة 2.5</u> :

لتكن الدالتين $L,K : X\times Y \to \overline{R}$ ، عندئذٍ إذا كانت كل من الدالتين L,K دالة محدبة / مقعرة :

1) الدالة $L \underset{e|h}{+} K$ دالة محدبة / مقعرة .

2) من أجل كل $\lambda>0$ تكون الدالة $\lambda \underset{e|h}{*} L$ دالة محدبة / مقعرة .

<u>البرهان</u> :

1) حسب تعريف المجموع فوق/تحت – البياني :

$$\left(L \underset{e|h}{+} K\right)\left(x,y\right)=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L\left(u,v\right)+K\left(x-u,y-v\right)\right\}$$

بفرض : $M\left(x,y,u,v\right)=L\left(u,v\right)+K\left(x-u,y-v\right)$ عندئذٍ :

من أجل y ثابتة ومن أجل كل $v\in Y$ فإنَّ الدالة $\left(x,u\right)\to M\left(x,y,u,v\right)$ دالة محدبة وعليه تكون الدالة $\sup\limits_{v\in Y} M\left(x,y,u,v\right)$ دالة محدبة بالنسبة إلى $\left(x,u\right)$، وبما أنَّ المجموع فوق البياني لدالتين محدبتين هو دالة محدبة فإنَّ $\inf\limits_{u\in X}\sup\limits_{v\in Y} M\left(x,y,u,v\right)$ دالة محدبة بالنسبة إلى المتحول x .

أي أنَّ الدالة $L \underset{e|h}{+} K$ دالة محدبة بالنسبة إلى المتحول x . وبنفس الطريقة نبرهن من أجل x ثابتة ومن أجل كل $u\in X$ أنَّها دالة مقعرة بالنسبة إلى المتحول y ، وهذا يعني أنَّ $L \underset{e|h}{+} K$ دالة محدبة / مقعرة .

2) حسب تعريف الجداء فوق/تحت – البياني :

$$\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\left(x,y\right)=\lambda L\left(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y\right)$$

أولاً (من أجل y ثابتة) : ليكن $x_1,x_2\in X$ عنصرين كيفيين ، ولتكن $\alpha\in[0,1]$ ، عندئذٍ :

$$\begin{aligned}\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\left[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,y\right]&=\lambda L\left[\lambda^{-1}\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right),\lambda^{-1}y\right]\\&=\lambda L\left[\alpha\left(\lambda^{-1}x_1\right)+(1-\alpha)\left(\lambda^{-1}x_2\right),\lambda^{-1}y\right]\end{aligned}$$

ولما كانت L دالة محدبة – مقعرة فهي محدبة بالنسبة إلى المتحول x فيصبح لدينا :

$$\begin{aligned}\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,y\right)&\le\lambda\left[\alpha L\left(\lambda^{-1}x_1,\lambda^{-1}y\right)+(1-\alpha)L\left(\lambda^{-1}x_2,\lambda^{-1}y\right)\right]\\&\le\alpha\left[\lambda L\left(\lambda^{-1}x_1,\lambda^{-1}y\right)\right]+(1-\alpha)\left[\lambda L\left(\lambda^{-1}x_2,\lambda^{-1}y\right)\right]\\&\le\alpha\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\left(x_1,y\right)+(1-\alpha)\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)\left(x_2,y\right)\end{aligned}$$

وعليه حسب تعريف الدالة المحدبة تكون الدالة $\lambda \underset{e|h}{*} L$ دالة محدبة بالنسبة إلى المتحول x . وبنفس الطريقة نبرهن أنَّها مقعرة بالنسبة إلى المتحول y . وهو المطلوب ■

مبرهنة 2.6 :

لتكن كل من الدالتين $L,K : X \times Y \to \overline{R}$ دالتين محدبتين / مقعرتين وتحققان شروط المبرهنة 1.4 عندئذٍ:

$$F_{L \underset{e|h}{+} K}\left(x,y^*\right)=\left[F_L\left(.,y^*\right)\underset{e}{+}F_K\left(.,y^*\right)\right](x) \qquad (15)$$

$$G_{L \underset{e|h}{+} K}\left(x^*,y\right)=\left[G_L\left(x^*,.\right)\overset{h}{+}G_K\left(x^*,.\right)\right](y) \qquad (16)$$

حيث : $F_{L \underset{e|h}{+} K}, F_L, F_K$ الدوال القرينة المحدبة للدوال $L \underset{e|h}{+} K, L, K$ على الترتيب .

$G_{L \underset{e|h}{+} K}, G_L, G_K$ الدوال القرينة المقعرة للدوال $L \underset{e|h}{+} K, L, K$ على الترتيب .

البرهان :

أولاً حسب تعريف الدالة القرينة المقعرة في العلاقة (13) :

$$F_{L \underset{e|h}{+} K}\left(x,y^*\right)=\sup_{y\in Y}\left\{\left(L \underset{e|h}{+} K\right)(x,y)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\left\{\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+K(x-u,y-v)\right\}+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+K(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

لنضع $\varphi(u,y)=\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+K(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$ عندئذٍ تشكل الدالة $\varphi(.,y)$ غلاف محدباً لدوال من $\Gamma(X)$ وعليه فإنه من أجل كل $y\in Y$ تكون $\varphi(.,y)$ دالة من $\Gamma(X)$.

من جهة أخرى : $\varphi(u,y)\ge L(u,v)+K(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle$

لنضع $v=y_1$ ولنأخذ $y=y_1+y_2$ فيكون :

$$\varphi(u,y_1+y_2)\ge L(u,y_1)+K(x-u,y_2)+\left\langle y^*,y_1+y_2\right\rangle$$

واعتماداً على (i) و (ii) من المبرهنة 1.4 نستنتج أن الدالة $x\to\varphi(x,y_1+y_2)$ قسرية وعليه تكون الدالة φ محققة لشروط المبرهنة 1.4 ونستطيع أن نكتب $\inf\sup\varphi=\sup\inf\varphi$ ومنه :

$$F_{L \underset{e|h}{+} K}\left(x,y^*\right)=\inf_{u\in X}\sup_{y\in Y}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+K(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\sup_{y\in Y}\left\{L(u,v)+K(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+\left\langle v,y^*\right\rangle+\sup_{y\in Y}\left\{K(x-u,y-v)+\left\langle y-v,y^*\right\rangle\right\}\right\}$$

$$=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+\left\langle v,y^*\right\rangle+F_K\left(x-u,y^*\right)\right\}$$

$$=\inf_{u\in X}\left\{\sup_{v\in Y}\left\{L(u,v)+\left\langle v,y^*\right\rangle\right\}+F_K\left(x-u,y^*\right)\right\}$$

$$=\inf_{u\in X}\left\{F_L\left(u,y^*\right)+F_K\left(x-u,y^*\right)\right\}=\left(F_L\underset{e}{+}F_K\right)(x)$$

بطريقة مشابهة نبرهن صحة العلاقة : $G_{L \underset{e|h}{+} K}\left(x^*, y\right) = \left[G_L\left(x^*, .\right) \overset{h}{+} G_K\left(x^*, .\right)\right](y)$

وهو المطلوب ■

<u>نتيجة 2.7</u> : تحت شروط المبرهنة 2.6 لدينا :

$$f_{L \underset{e|h}{+} K}(x) = \left(f_L \underset{e}{+} f_K\right)(x)$$

$$g_{L \underset{e|h}{+} K}(y) = \left(g_L \overset{h}{+} g_K\right)(y)$$

حيث : $f_{L \underset{e|h}{+} K}, f_L, f_K$ الدوال الحدية العليا للدوال $L \underset{e|h}{+} K, L, K$ على الترتيب .

$g_{L \underset{e|h}{+} K}, g_L, g_K$ الدوال الحدية الدنيا للدوال $L \underset{e|h}{+} K, L, K$ على الترتيب .

<u>البرهان</u> :

ينتج البرهان بوضع $y^* = 0$ قي العلاقة (15) و وضع $x^* = 0$ في العلاقة (16) واستخدام تعريف الدوال الحدية الدنيا والعليا من العلاقتين (7) و (8) على الترتيب . وهو المطلوب ■

<u>نتيجة 2.8</u> :

تحت شروط النظرية 2.6 لدينا :

$$\inf_X \sup_Y \left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \inf_X \sup_Y L + \inf_X \sup_Y K$$

$$\sup_Y \inf_X \left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \sup_Y \inf_X L + \sup_Y \inf_X K$$

<u>البرهان</u> :

حسب النتيجة السابقة لدينا : $f_{L \underset{e|h}{+} K}(x) = \left(f_L \underset{e}{+} f_K\right)(x)$

أي أن : $\sup_Y \left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \sup_Y L + \sup_Y K$

بأخذ الـ inf لطرفي المساواة السابقة نجد : $\inf_X \sup_Y \left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \inf_X \left(\sup_Y L \underset{e}{+} \sup_Y K\right)$

وبتطبيق (2) من خواص المبرهنة 1.1 نحصل على :

$$\inf_X \sup_Y \left(L \underset{e|h}{+} K\right) = \inf_X \sup_Y L + \inf_X \sup_Y K$$

نبرهن العلاقة الأخرى بطريقة مشابهة وباعتبار أنَّ G مقعرة إذا وفقط إذا كانت $(-G)$ محدبة .

<u>مبرهنة 2.9</u> :

لتكن $L, K : X \times Y \to \overline{R}$ دالتين محدبتين / مقعرتين محققتين للشرط

$$\inf f_K = \sup g_K \text{ و } \inf f_L = \sup g_L \qquad (17)$$

عندئذٍ :

(1 $\arg\min\max L + \arg\min\max K \subset \arg\min\max\left(L \underset{e|h}{+} K\right)$

(2 $\lambda\left(\arg\min\max L\right) = \arg\min\max\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)$ لكل $\lambda > 0$.

البرهان :

1) ليكن $(\bar{x},\bar{y})$ عنصراً كيفياً من $\arg\min\max L + \arg\min\max K$ عندئذٍ ينتج حسب التعريف الكلاسيكي لجمع مجموعتين وجود $(\bar{x}_1,\bar{y}_1) \in \arg\min\max L$ و $(\bar{x}_2,\bar{y}_2) \in \arg\min\max K$ بحيث يكون $(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x}_1,\bar{y}_1) + (\bar{x}_2,\bar{y}_2)$ وعليه بالاعتماد على المبرهنة 2.4 يكون :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \in \arg\min f_L \quad , \quad \bar{y}_1 \in \arg\max g_L = \arg\min(-g_L) \\ \bar{x}_2 \in \arg\min f_K \quad , \quad \bar{y}_2 \in \arg\max g_K = \arg\min(-g_K) \end{cases}$$

وبالتالي بتطبيق (1) من المبرهنة 1.2 من أجل الدالتين f_L , f_K و أيضاً من أجل الدالتين $(-g_L), (-g_K)$ يكون لدينا :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in \arg\min f_L + \arg\min f_K \subset \arg\min\left(f_L \underset{e}{+} f_K\right) \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \in \arg\min(-g_L) + \arg\min(-g_K) \subset \arg\min\left[(-g_L) \underset{e}{+} (-g_K)\right] = \arg\max\left(g_L \overset{h}{+} g_K\right) \end{cases}$$

من جهة أخرى بالاعتماد على النتيجة 2.7 لدينا $\inf f_{L \underset{e|h}{+} K} = \inf\left(f_L \underset{e}{+} f_K\right)$ وحسب (2) من المبرهنة 1.1 يكون $\inf f_{L \underset{e|h}{+} K} = \inf f_L + \inf f_K$ وباستخدام الشرط (17) نحصل على :

$$\inf f_{L \underset{e|h}{+} K} = \sup g_L + \sup g_K = \sup\left(g_L \overset{h}{+} g_K\right) = \sup g_{L \underset{e|h}{+} K}$$

ومنه بتطبيق المبرهنة 2.4 ثانيةً نحصل على :

$$\begin{cases} \bar{x} \in \arg\min f_{L \underset{e|h}{+} K} \\ \bar{y} \in \arg\max g_{L \underset{e|h}{+} K} \end{cases} \Rightarrow \qquad (\bar{x},\bar{y}) \in \arg\min\max\left(L \underset{e|h}{+} K\right)$$

2) بفرض $(\bar{x},\bar{y})$ نقطة كيفية من $\lambda(\arg\min\max L)$ ، عندئذٍ :

$$\exists(\bar{x}_1,\bar{y}_1) \in X \times Y \quad ; \quad \bar{x}_1 = \lambda^{-1}\bar{x} \ , \ \bar{y}_1 = \lambda^{-1}\bar{y} \quad , \quad (\bar{x},\bar{y}) \in \arg\min\max L$$

ومنه حسب تعريف النقطة السرجية ، نجد :

$$L(\bar{x}_1,y) \le L(\bar{x}_1,\bar{y}_1) \le L(x,\bar{y}_1) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda L(\bar{x}_1,y) \le \lambda L(\bar{x}_1,\bar{y}_1) \le \lambda L(x,\bar{y}_1) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y \quad , \quad \forall \lambda > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda L(\lambda^{-1}\bar{x},y) \le \lambda L(\lambda^{-1}\bar{x},\lambda^{-1}\bar{y}) \le \lambda L(x,\lambda^{-1}\bar{y}) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y \quad , \quad \forall \lambda > 0$$

ولما كانت العلاقة السابقة محققة من أجل كل $(x,y) \in X \times Y$ إذاً يوجد (x_1,y_1) من $X \times Y$ بحيث $x_1 = \lambda^{-1}x \ , \ y_1 = \lambda^{-1}y$ ، عندئذٍ من أجل كل $\lambda > 0$ نجد :

$$\lambda L(\lambda^{-1}\bar{x},\lambda^{-1}y_1) \le \lambda L(\lambda^{-1}\bar{x},\lambda^{-1}\bar{y}) \le \lambda L(\lambda^{-1}x_1,\lambda^{-1}\bar{y}) \quad ; \quad \forall (x_1,y_1) \in X \times Y$$

أي أنَّ : $\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(\bar{x},y) \le \left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(\bar{x},\bar{y}) \le \left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(x,\bar{y}) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y$

ومنه : $(\bar{x},\bar{y}) \in \arg\min\max\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)$

وهو المطلوب ■

مبرهنة 2.10 :

لتكن $\lambda>0$, $\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_1>0$ وبفرض $L,K:X\times Y\to\overline{R}$ دالتين محدبتين – مقعرتين بحيث يكون $\inf f_L=\sup g_L$ و $\inf f_K=\sup g_K$ ، عندئذٍ :

$$\varepsilon_1-\arg\min\max L+\varepsilon_2-\arg\min\max K\subset(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\min\max\left(L\underset{e|h}{+}K\right) \qquad (1$$

$$\forall\varepsilon>0\qquad \arg\min\max\left(L\underset{e|h}{+}K\right)\subset\varepsilon-\arg\min\max L+\varepsilon-\arg\min\max K \qquad (2$$

$$\forall\varepsilon>0\qquad \lambda(\varepsilon-\arg\min\max L)=(\lambda\varepsilon)-\arg\min\max\left(\lambda\underset{e|h}{*}L\right) \qquad (3$$

البرهان :

1) ليكن $(\overline{x},\overline{y})$ عنصراً كيفياً من $\varepsilon_1-\arg\min\max L+\varepsilon_2-\arg\min\max K$ عندئذٍ ينتج حسب التعريف الكلاسيكي لجمع مجموعتين أنَّه توجد $(\overline{x}_{\varepsilon_1},\overline{y}_{\varepsilon_1})$ من $\varepsilon_1-\arg\min\max L$ وتوجد $(\overline{x}_{\varepsilon_2},\overline{y}_{\varepsilon_2})$ من $\varepsilon_2-\arg\min\max K$ بحيث يكون $\overline{y}=\overline{y}_{\varepsilon_1}+\overline{y}_{\varepsilon_2}$, $\overline{x}=\overline{x}_{\varepsilon_1}+\overline{x}_{\varepsilon_2}$ عندئذٍ حسب العلاقة (12) يكون :

$$\begin{cases}\overline{x}_{\varepsilon_1}\in\varepsilon_1-\arg\min f_L\\ \overline{y}_{\varepsilon_1}\in\varepsilon_1-\arg\max g_L\end{cases},\qquad \begin{cases}\overline{x}_{\varepsilon_2}\in\varepsilon_2-\arg\min f_K\\ \overline{y}_{\varepsilon_2}\in\varepsilon_2-\arg\max g_K\end{cases}$$

ومنه حسب المبرهنة 1.3 نحصل على :

$$\begin{cases}\overline{x}=\overline{x}_{\varepsilon_1}+\overline{x}_{\varepsilon_2}\in(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\min\left(f_L\underset{e}{+}f_K\right)\\ \overline{y}=\overline{y}_{\varepsilon_1}+\overline{y}_{\varepsilon_2}\in(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\min\left[(-g_L)\underset{e}{+}(-g_K)\right]=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\max\left(g_L\overset{h}{+}g_K\right)\end{cases}$$

وعليه بالاعتماد على النتيجة 2.7 وتطبيق العلاقة (12) نجد :

$$\begin{cases}\overline{x}\in(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\min f_{L\underset{e|h}{+}K}\\ \overline{y}\in(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\max g_{L\underset{e|h}{+}K}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (\overline{x},\overline{y})\in(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\arg\min\max\left(L\underset{e|h}{+}K\right)$$

2) يتم البرهان بطريقة مشابهة لبرهان 1) .

3) يتم البرهان بطريقة مشابهة لبرهان العلاقة 2) من المبرهنة 2.9 .

وهو المطلوب ■

الاستنتاجات والتوصيات:

تمت في هذه الدراسة مناقشة بعض مسائل القيم القصوى من أجل دوال محدبة / مقعرة وضمن شروط محددة وقد حصلنا على نتائج تتعلق بالعمليات الجبرية فوق/ تحت البيانية و باستقرارية ε–النقاط السرجية . ولأهمية هذا النوع من المسائل ننصح بأن تناقش هذه الدراسة في الحالة العامة في حالة دوال ليست بالضرورة محدبة / مقعرة دون شروط مفروضة على المسائل المطروحة .

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. *Variational convergence for functions and operators* .Pitman, London, 1984 , 120-264 .

[2] ATTOUCH, H ; WETS,R. *Convergence Theory of saddle functions* . Trans. Amaer. Math.Soc. 280, n (1), 1983 , 1-41.

[3] ATTOUCH, H ; AZE, D. ; WETS,R. *On continuity properties of the partial Legendre- Fenchel Trasform : Convergence of sequences augmented Lagrangian functions , Moreau- Yoshida approximates and subdiffferential operators* . FERMAT Days 85: Mathematics for Optimization, 1986.

[4] ATTOUCH, H; WETS,R. *Epigraphic analysis, analyse non linéaire* . Gauthiers-villars, paris, 1989، 74-99.

[5] BAGH, A. *Epi/hypo – convergence , the slice topology and saddle points approximation*. Journal of applied analysis . vol.2 , N 1, 1996 . 13-39.

[6] BAGH, A. On *the convergence of min/sup problems in some optimal control problems* . Journal of abstract and applied analysis , vol.6 , N1,2001 , 53-71 .

[7] EKLEND,I. ; TEMMAM, R. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, 1974 , 12-52 .

[8] JOFER, A. ; WETS, R. *Variational convergence of bivariate function* : Lopsided convergenc. Math. Program. 116 (2009), no. 1-2, Ser. B, 275-295 .

[9] MCLINDEN, L. *Dual operations on saddle functions.* Trans . Amer . Math. Soc . 179 , 363-381 .

[10] MOREAU, J.J. *Theoreme "inf-sup"* C.R.A.S.T. 285, 1964 , 2720-2722 .

[11] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. *Variational analysis* . 2en, Springer, New York, 2004 , 10-212 .

[12] SOUEYCATT, M. *Epi-convergence et convergence des sections*. Application à la stabilité des ε–points-selles. A. V. A. M. C. vol. II, 1987.