مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

عدد السيطرة في الجداء الديكارتي لحلقتين موجهتين $C_m \times C_n$ حيث n كيفي و m=9,10

الدكتور سهيل محفوض*
مازن مصطفى**

(تاريخ الإيداع 20 / 2 / 2012. قُبِل للنشر في 22 / 4 /2012)

□ ملخّص □

ليكن البيان $D(V, A)$ بيان موجه من المرتبة n مع مجموعة الرؤوس $V(D)$ ومجموعة الأقواس $A(D)$.

ولتكن S مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان $V(D)$ ، نسمي S مجموعة سيطرة للبيان الموجه D إذا كان من أجل كل رأس $v \in D - S$ يوجد رأس u من رؤوس المجموعة S بحيث أن $(u , v) \in A(D)$.

يرمز لعدد السيطرة بـ $\gamma(D)$ والذي هو عدد عناصر أصغر مجموعة سيطرة.

الحلقة الموجهة من المرتبة n هي بيان موجه له n رأس و n قوس حيث أن كل رأس يتصل مع الرأس الذي يليه و الرأس الأخير يتصل بالرأس الأول .

في هذا البحث سوف نحسب عدد السيطرة للجداء الديكارتي لحلقتين موجهتين $C_m \times C_n$ في حالة m=9 و m=10 و n عدد كيفي .

الكلمات المفتاحية: حلقة موجهه، الجداء الديكارتي، مجموعة السيطرة، عدد السيطرة.

* مدرس– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

Domination Number of Cartesian Products of Directed Cycle: m = 9, 10 and Arbitrary n. $C_{m \times} C_n$

Dr. Suhail Mahfud*
Mazen Mostafa**

(Received 20 / 2 / 2012. Accepted 22 / 4 /2012)

□ ABSTRACT □

Let D(V, A) be a digraph of order n. V(D) and A(D) refer to the vertex and arc sets, respectively.

A subset S of vertex set V(D) is a dominating set of D if for each vertex $v \in D - S$ there exists a vertex $u \in S$ such that (u, v) is an arc of D.

The domination number of D, $\gamma(D)$, is the order of a smallest dominating set of D.

Directed cycle of order n is a directed graph has n vertex $(u_0, u_1, \ldots\ldots, u_{n-1})$ and n arc:

$A(C_n) = \{ (i,i+1): 0 \leq i \leq n-2 \} \cup \{ (n-1,0) \}$.

In this paper we calculate the domination number of the Cartesian product of two directed cycles C_m and C_n for m = 9, 10 and arbitrary n.

Keywords: directed cycle, Cartesian product , dominating Set , domination number.

*Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

ليكن $D(V,A)$ بيان موجه له مجموعة الرؤوس $V(D)$ ومجموعة الأقواس $A(D)$.

ليكن الرأسين u , v من مجموعة الرؤوس $V(D)$ نقول عن الرأس u أنه يسيطر على الرأس v إذا $u=v$ أو إذا كان $uv \in A(D)$.

لتكن S مجموعة جزئية من مجموعة الرؤوس $V(D)$ نقول عن S أنها مجموعة سيطرة في البيان الموجه D .

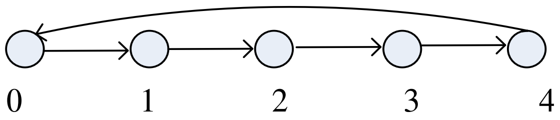
إذا كان من أجل كل رأس $v \in V(D)$ إما $v \in S$ أو أنه يوجد رأس $u \in S$ بحيث يكون $uv \in A(D)$.

يسمى عدد رؤوس أصغر مجموعة سيطرة في البيان D بعدد السيطرة ويرمز له $\gamma(D)$.

تعرف الحلقة الموجهة C_n من المرتبة n لها مجموعة الرؤوس $V(n) =\{0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$

ومجموعة الأقواس $A(C_n) = \{ (i ,i+1):0 \le i \le n-2 \} \cup \{ (n-1,0) \}$

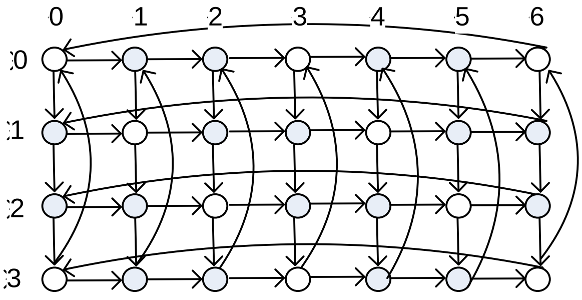
مثال: الحلقة C_5 الشكل (1).



الشكل (1) يبين الحلقة C_5

ليكن البيانين الموجهين $D_1(V_1,A_1),D_2(V_2 ,A_2)$ نعرف الجداء الديكارتي للبيانين الموجهين $D_1 \times D_2$ بأنه بيان موجه $D(V,A)$ مجموعة رؤوسه $V(D)=V(D_1)\times V(D_2)$ ومجموعة أقواسه $A(D)=A(D_1\times D_2)$ حيث $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in A(D)=A(D_1\times D_2)$ أي أنه يوجد قوس موجه من الرأس (u_1,u_2) إلى الرأس (v_1,v_2) إذا وفقط إذا كان $u_1=v_1$ و $(u_2,v_2) \in A(D_2)$ أو $u_2=v_2$ و $(u_1,v_1) \in A(D_1)$.

مثال:الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_4 \times C_7$. الشكل (2).



الشكل (2) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_4 \times C_7$

لتكن C_m, C_n حلقتين موجهتين وليكن $C_m \times C_n$ الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين C_m و C_n عندئذ أياً كانت $i\in\{ 0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$ نسمي المجموعة الجزئية C_m^i من رؤوس $C_m \times C_n$ والتي تتضمن مجموعة الرؤوس:

$\{ (j,i) ; 0 \le j \le m-1 \}$ بأنها مجموعة رؤوس العمود i في الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_m \times C_n$.

إذا كانت $W_i = S \cap C_m^i$ مجموعة رؤوس السيطرة الموجودة في العمود i من الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_m \times C_n$ وليكن $S_i = |W_i|$ عندئذ نسمي S_i عدد عناصر المجموعة W_i.

نسمي $(S_0,S_1,\ldots\ldots,S_{n-1})$ سلسلة السيطرة لمجموعة السيطرة S.

في [1] إذا كانت S أصغر مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_m \times C_n$. مع سلسلة السيطرة $(S_0,S_1,\ldots\ldots,S_{n-1})$ من أجل جميع قيم $i = 0, 1,2,3,\ldots\ldots,n-1$ فإن :

$$\left\lceil \frac{m-\lfloor \frac{2m}{3} \rfloor}{2} \right\rceil \le S_i \le \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor \qquad (1)$$

في [1] و[2] و [3] و [4] و [5] تم إيجاد عدد السيطرة في الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_m \times C_n$ في حالة n كيفي و $m= 3,4,5,6,8$. وفي هذا البحث سوف نحسب عدد السيطرة في الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_m \times C_n$ في حالة n كيفي و $m=9,10$.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بأنه يعالج مشكلة إيجاد العدد الأقل من الرؤوس اللازمة للسيطرة على بيان موجه وبشكل خاص الجداء الديكارتي لحلقتين موجهتين كون البيانات الموجهة هي الأكثر صعوبة والأكثر تطبيقاً في الحياة العملية مما يغني ساحة البيانات الموجهة التي لم تتجاوز الدراسة فيها 10% بالمقارنة مع الدراسات التي تمت في البيانات غير الموجهة حيث تم في [6] حساب عدد السيطرة للجداء الديكارتي لحلقتين غير موجهتين $C_8 \times C_n$ و $C_9 \times C_n$.

هذا من الناحية العلمية أما من الناحية التطبيقية فتقليص عدد المراكز اللازمة لخدمة قطاع خدمي معين يقلل التكلفة ويوفر الوقت والجهد . ويهدف البحث إلى إيجاد عدد السيطرة للجداء الديكارتي لحلقتين موجهتين $C_m \times C_n$ في حالة m=9 و m=10 و n عدد كيفي

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم مجموعة السيطرة ومفهوم عدد السيطرة لبيان موجه .

النتائج والمناقشة:

مبرهنة 1:

For $n \equiv 0 \pmod 3$, $\gamma(C_9 \times C_n) = 3n$

For $n \equiv 1,2 \pmod 3$, $\gamma(C_9 \times C_n) = 3n + 3$

البرهان:

لتكن S مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_9 \times C_n$

ولتكن $(S_0,S_1,\ldots\ldots,S_{n-1})$ سلسلة السيطرة لمجموعة السيطرة S حيث أن :

$S_i = |C_9^i \cap S|$ من أجل كل $i \in \{0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$ نلاحظ ان كل رأس في العمود C_9^i يستطيع أن يسيطر على رأس واحد فقط في العمود C_9^{i+1} وكل رأس في العمود C_9^{i+1} يستطيع أن يسيطر على رأسين على الأكثرفي العمود C_9^{i+1} وبما أن عدد رؤوس العمود C_9^{i+1} يساوي (9) فإن

$$S_i + 2S_{i+1} \geqslant 9 \qquad (2)$$

وحسب (1) $\lceil \frac{m-\lfloor \frac{2m}{3} \rfloor}{2} \rceil \leq S_i \leq \lfloor \frac{2m}{3} \rfloor$ فإنه في حالة $m=9$ $2 \leq S_i \leq 6$

حيث $0 \leq i \leq n-1$.

إذا كانت $S_{i+1} = 2$ فإنه حسب العلاقة (2) يكون $S_i + 4 \geq 9$ وبالتالي $S_i \geqslant 5$ وبالتالي $S_i + S_{i+1} \geqslant 7$ أي أننا نحتاج إلى سبعة رؤوس للسيطرة على العمودين $i+1$, i .

وفي هذه الحالة فإنه أيا كانت $i = 0, 1,2,\ldots n-1$ فإن:

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq 3n$$

إذا كانت $S_{i+1} = 3$ فإنه حسب العلاقة (2) يكون $S_i + 6 \geq 9$ وبالتالي $S_i \geqslant 3$ وبالتالي

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq 3n$$

وإذا كانت $S_{i+1} = 4$ فإنه حسب العلاقة (2) يكون $S_i + 8 \geq 9$ وبالتالي $S_i \geqslant 1$

فإذا كانت $S_i = 1$ فهذا مخالف للعلاقة (1) و إذا كانت $S_i \geq 2$ فإن $S_i + S_{i+1} \geq 6$.

وبالتالي $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq 3n$

ولا يوجد حالات أخرى للمناقشة حسب العلاقة (2) .

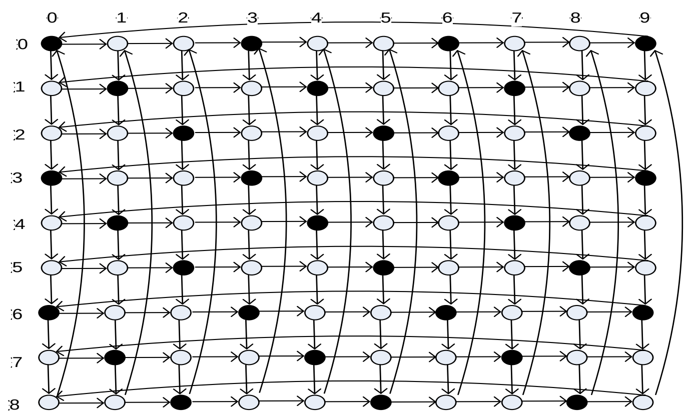
لنعرف المجموعة الجزئية A_i من رؤوس البيان الموجه ((الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $c_9 \times c_n$)) بالشكل : أياً كانت $i = 0, 1,2,\ldots n-1$ فإن:

$$A_i = \{ (i, j), (i+3, j), (i+6, j) ; 0 \leq j \leq n-1 , i = j \bmod 3 \}$$

ولتكن $A_n = \cup_{i \in [n]} A_i$ حيث $[n] = \{0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$ نلاحظ أن $|A_n| = 3n$

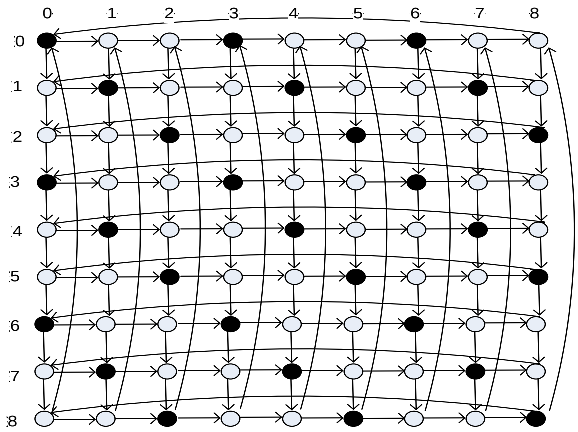
نلاحظ كما هو موضح في الشكل (3) حالة $n=10$ أن الرؤوس في A_n تتكرر كل ثلاثة أعمدة متتالية.

ونلاحظ أنه أياً كانت قيم n فإن كل رأس في $c_9 \times c_n$ يسيطر عليه بالمجموعة A_n عدا الرؤوس $(8, 0)$, $(5, 0)$, $(2, 0)$ لا يمكن السيطرة عليها إلا عندما $n \equiv 0 \pmod 3$



الشكل (3) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_9 \times C_{10}$

الحالة الأولى: إذا كانت $n \equiv 0 \pmod 3$ فإن A_n مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $c_9 \times c_n$ وبما أن $|A_n| = 3n$ و $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq 3n$ فإن A_n أصغر مجموعة سيطرة في البيان $c_9 \times c_n$ وبالتالي $\gamma(c_9 \times c_n) = 3n$. مثال: الشكل (4) حالة $n=9$.



الشكل (4) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_9 \times C_9$

الحالة الثانية: إذا كانت $n \equiv 1 \pmod 3$ فإن رؤوس السيطرة في العمود الأخير هي:

$C_9^{n-1} \cap A_n = \{ (0,n-1) , (3,n-1) , (6,n-1)\}$

وبالتالي تبقى الرؤوس (8,0) , (5,0) , (2,0) دون سيطرة.

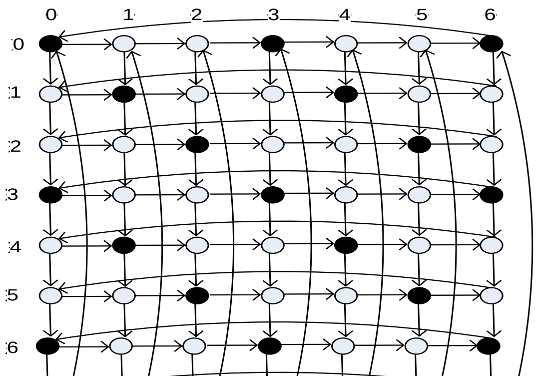
لتكن $S' = A_n \cup \{ (2,0) , (5,0) , (8,0) \}$

إن S' مجموعة سيطرة للبيان الموجه $C_9 \times C_n$ في هذه الحالة وأن $| S' | = 3n + 3$

وإذا اخترنا الرؤوس (8,n−1) , (5,n−1) , (2,n−1) في العمود الأخير للسيطرة على الرؤوس (8,0) , (5,0) ,(2,0) في هذه الحالة تبقى الرؤوس (7,n−1) , (4,n−1) , (1,n−1) دون سيطرة ولا يمكن السيطرة عليها إلا بثلاثة رؤوس سواء من العمود n−1 أو n−2 أي أن S' أصغر مجموعة سيطرة وبالتالي :

For $n \equiv 1 \pmod 3$, $\gamma (C_9 \times C_n) = 3n + 3$

مثال: الشكل (5) حالة n = 7



الشكل (5) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_9 \times C_7$

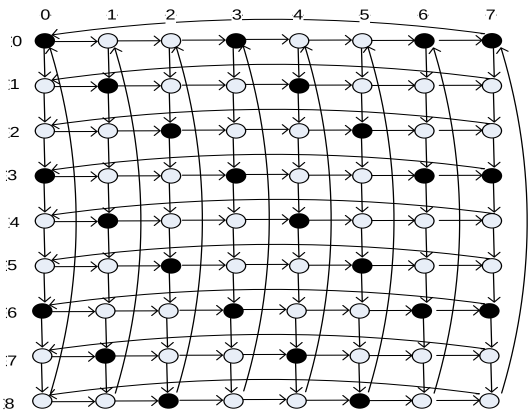
الحالة الثالثة: إذا كانت $n \equiv 2 \pmod 3$ فإن رؤوس السيطرة في العمود الأخير هي:

$C_9^{n-1} \cap A_n = \{ (1,n-1) , (4,n-1) , (7,n-1) \}$

وتبقى الرؤوس (8,0) , (5,0) , (2,0) دون سيطرة.وبنفس المناقشة نجد أن S' أصغر مجموعة سيطرة للبيان الموجه $C_9 \times C_n$ في هذه الحالة وأن $|S'| = 3n+3$ أي أن

$$\text{For} \quad n \equiv 2 \pmod 3, \qquad \gamma(C_9 \times C_n) = 3n+3$$

مثال: الشكل(6) حالة $n=8$



الشكل (6) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_9 \times C_8$

مبرهنة 2:

$$\text{For } n \equiv 0,3,17 \pmod{20}, \ \gamma(C_{10} \times C_n) = \left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil$$

$$\text{For } n \equiv 6,9,11,14 \pmod{20}, \ \gamma(C_{10} \times C_n) = \left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil + 1$$

$$\text{For } n \equiv 5,8,12,15 \pmod{20}, \ \gamma(C_{10} \times C_n) = \left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil + 2$$

$$\text{For } n \equiv 1,2,4,7,10,13,16,18,19 \pmod{20}, \ \gamma(C_{10} \times C_n) = \left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil + 3$$

البرهان:

لتكن S مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_n$ حيث n كيفي.

ولتكن $(S_0, S_1, \ldots\ldots, S_{n-1})$ سلسلة السيطرة لمجموعة السيطرة S حيث إن $S_i = |C_{10}^i \cap S|$ من أجل كل $i \in \{0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$ فإن

$$S_i + 2S_{i+1} \geqslant 10 \qquad (3)$$

وحسب (1)
$$\left\lceil \frac{m - \lfloor \frac{2m}{3} \rfloor}{2} \right\rceil \le S_i \le \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$$

في حالة $m=10$ فإن $2 \le S_i \le 6$ حيث $0 \le i \le n-1$

عندئذ نميز الحالات التالية :

الحالة الأولى: إذا كانت $S_{i+1} = 2$ فإنه حسب العلاقة (3) يكون $S_i + 4 \ge 10$ وبالتالي $S_i \ge 6$ وبالتالي $S_i + S_{i+1} \ge 8$

أي أننا نحتاج إلى ثمانية رؤوس للسيطرة على رؤوس عمودين متتاليين $i, i+1$.

وفي هذه الحالة فإنه أيا كانت $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$ فإن

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i \ge \left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil$$

الحالة الثانية: إذا كانت $S_{i+1}=3$ فإنه حسب (3) يكون $S_i + 6 \geq 10$ وبالتالي $S_i \geqslant 4$

اي $S_i + S_{i+1} \geq 7$ اي أن $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$

الحالة الثالثة: إذا كانت $S_{i+1}=4$ فإنه حسب العلاقة (3) يكون $S_i + 8 \geq 10$ وبالتالي $S_i \geq 2$

فإذا كانت $S_i = 2$ فإنه حسب الحالة الأولى يكون $S_{i-1} \geq 6$, وبالتالي $S_{i-1} + S_i + S_{i+1} \geqslant 12$ أي أننا نحتاج إلى 12 رأساً للسيطرة على ثلاثة أعمدة متتالية وبالتالي

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$$

وإذا كان $S_i \geq 3$ فإن $S_i + S_{i+1} \geq 7$ وبالتالي $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$

الحالة الرابعة: إذا كانت $S_i = 5$ فإنه حسب العلاقة (3) يكون $S_i + 10 \geq 10$ وبالتالي $S_i \geq 0$

عندئذ نميز الحالات التالية:

إذا كانت $S_i = 0$ أو $S_i = 1$ فهذا مرفوض لأنه مخالف للشرط $2 \leq S_i \leq 6$.

وإذا كانت $S_i \geq 2$ فإن $S_i + S_{i+1} \geq 7$ وبالتالي $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$

ولا يوجد حالات أخرى للمناقشة حسب العلاقة (3) من تلك الحالات الأربعة السابقة نجد أن

إذا كانت S مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_n$ حيث n كيفي.فإن

$\gamma(C_{10} \times C_n) \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$.

لنعرف المجموعة الجزئية A من رؤوس البيان الموجه (الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_n$)

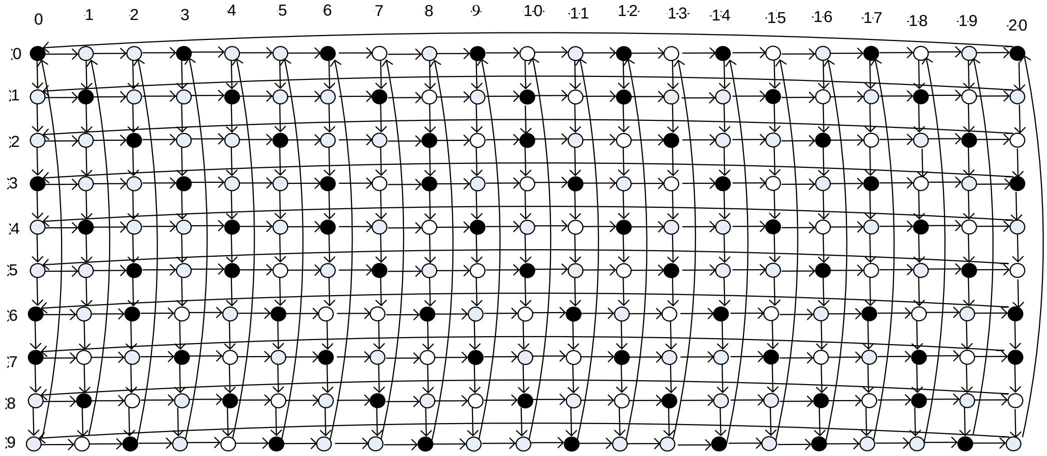
$A=\{(9i+3,2i), (9i+6,2i), (9i+7,2i), (9i+10,2i)\} ; 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \} \cup$

$\{(9i+1,2i+1), (9i+4,2i+1), (9i+8,2i+1)\} ; 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \}$

و $|A| = \lceil \frac{7n}{2} \rceil$ حيث أن كل رأس من المجموعة A يعرف كما يلي:

$(k,h) \in A , k \equiv k \bmod 10$

الشكل (7) حالة n=21



الشكل (7) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_{21}$

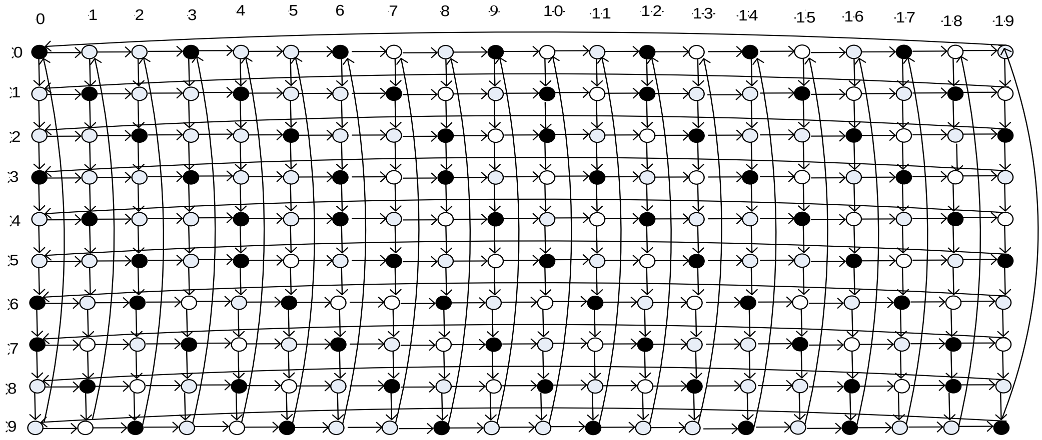
ونلاحظ من الشكل أن رؤوس السيطرة تتكرر كل 20 عمود والسلسلة (4,3) تتكرر كل عمودين متتاليين ورؤوس السيطرة تزاح بمقدار 1 إلى الأعلى بشكل دوري بعد كل تكرار في السلسلة (4,3) فتعود بعد 20 عمود إلى حيث بدأت .كما أن المجموعة A تسيطر على جميع رؤوس البيان الموجه C_{10} x C_n حيث n كيفي .

عدا الرؤوس (9,0) , (5,0) , (2,0) تبقى دون سيطرة إلا في حالة $n\equiv 0,3,17 \pmod{20}$

فالرؤوس السابقة (9,0) ,(5,0) , (2,0) يسيطر عليها بالرؤوس (9,n−1) , (5,n−1) , (2,n−1) .

في حالة $n\equiv 0,3,17 \pmod{20}$

الشكل (8) حالة n=20 .



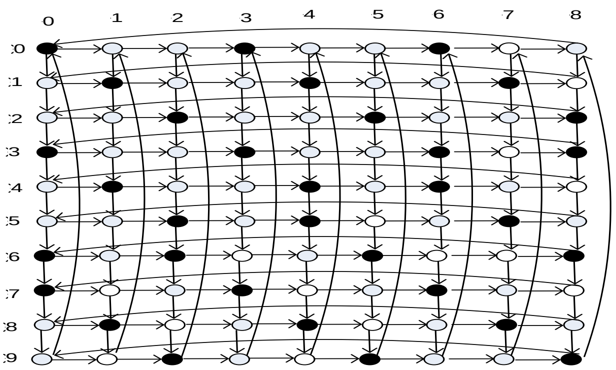
الشكل (8) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين C_{10} XC_{20}

نلاحظ أن: A مجموعة سيطرة للبيان(C_{10} x C_n) في حالة $n\equiv 0,3,17 \pmod{20}$

وبما أن $|A| = \lceil\frac{7n}{2}\rceil$ و $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \geq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$ فإن A أصغر مجموعة سيطرة

في حالة $n\equiv 0,3,17 \pmod{20}$ وبالتالي $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil$

في حالة $n\equiv 6,9 \pmod{20}$ الشكل (9) حالة n=9 .



الشكل (9) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين C_{10} XC_9

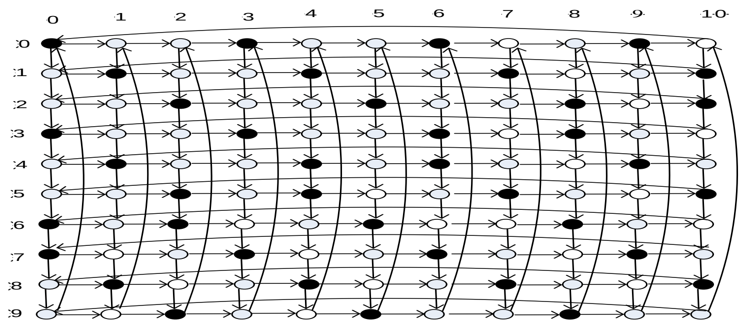
نلاحظ أن $A \cap C_{10}^{n-1}$ يحوي الرأسين (9,n−1) , (2,n−1) و بالتالي يمكننا السيطرة على الرأسين (9,0), (2,0) ويبقى الرأس (5,0) دون سيطرة .

لتكن $A_1 = A \cup \{(5,0)\}$ عندئذ تكون A_1 أصغر مجموعة سيطرة لـ C_{10} x C_n . ولكن $|A_1| = \lceil\frac{7n}{2}\rceil + 1$

أي في حالة $n \equiv 6,9 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil \frac{7n}{2} \rceil + 1$.

في حالة $n \equiv 11,14 \pmod{20}$

الشكل (10) حالة $n = 11$



الشكل (10) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} X C_{11}$

نلاحظ أن $A \cap C_{10}^{n-1}$ يحوي الرأسين (5,n−1) , (2,n−1) وبالتالي يمكننا السيطرة على الرأسين (5,0), (2,0) ويبقى الرأس (9,0) دون سيطرة .

لتكن $A_2 = A \cup \{(9,0)\}$

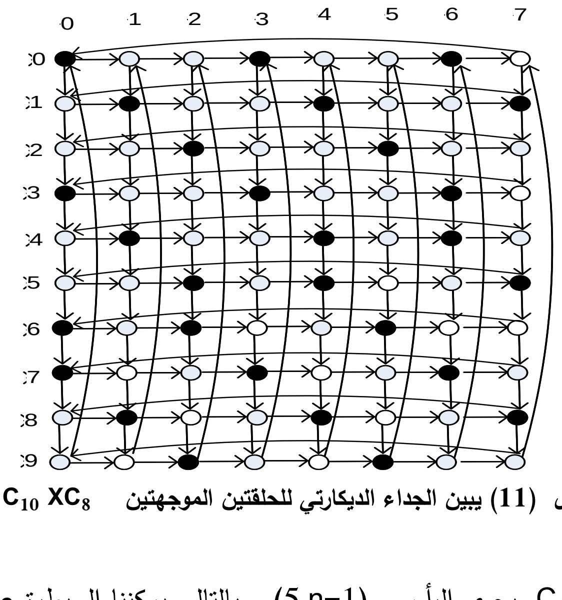
عندئذ تكون A_2 أصغر مجموعة سيطرة لـ $C_{10} \times C_n$ إن $|A_2| = \lceil \frac{7n}{2} \rceil + 1$

أي أنه في حالة $n \equiv 11,14 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil \frac{7n}{2} \rceil + 1$.

وبالتالي نستنتج أنه إذا كانت $n \equiv 6,9,11,14 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil \frac{7n}{2} \rceil + 1$

في حالة $n \equiv 5,8 \pmod{20}$

الشكل (11) حالة $n = 8$.



الشكل (11) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} X C_8$

نلاحظ أن $A \cap C_{10}^{n-1}$ يحوي الرأس (5,n−1) و بالتالي يمكننا السيطرة على الرأس (5,0) ويبقى الرأسين (2,0) , (9,0) دون سيطرة .

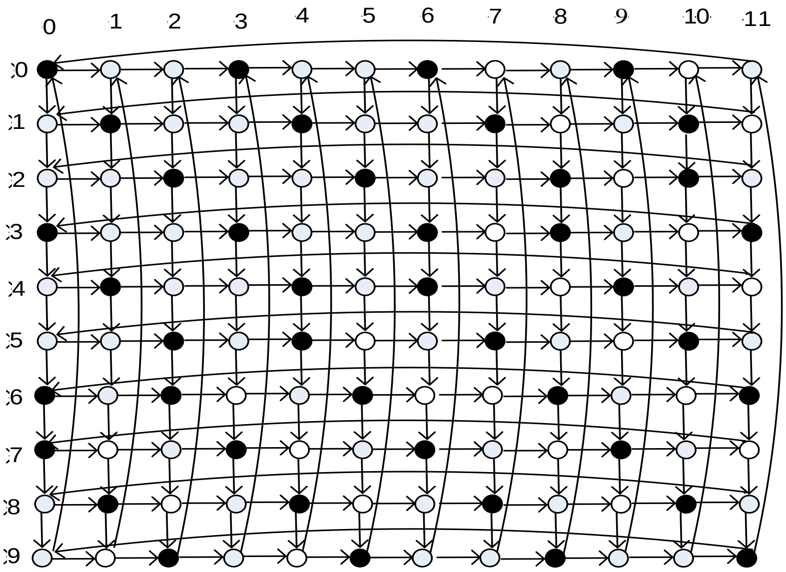
لتكن $A_3 = A \cup \{(2,0),(9,0)\}$ عندئذ تكون A_3 أصغر مجموعة سيطرة لـ $C_{10} \times C_n$.

في حالة $n\equiv 5,8 \pmod{20}$ و إن $|A_3| = \lceil\frac{7n}{2}\rceil +2$

أي أنه في حالة $n\equiv 5,8 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil +2$.

في حالة $n\equiv 12,15 \pmod{20}$

الشكل (12) حالة $n = 12$



الشكل (12) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_{12}$

نلاحظ أن $A \cap C_{10}^{n-1}$ تحوي الرأس $(9,n-1)$ و بالتالي يمكننا السيطرة على الرأس $(9,0)$ ويبقى الرأسين $(2,0),(5,0)$ دون سيطرة .

لتكن $A_4 = A \cup \{(2,0),(5,0)\}$ عندئذ تكون A_4 أصغر مجموعة سيطرة لـ $C_{10} \times C_n$.

في حالة $n \equiv 12,15 \pmod{20}$ و إن

$|A_4| = \lceil\frac{7n}{2}\rceil +2$

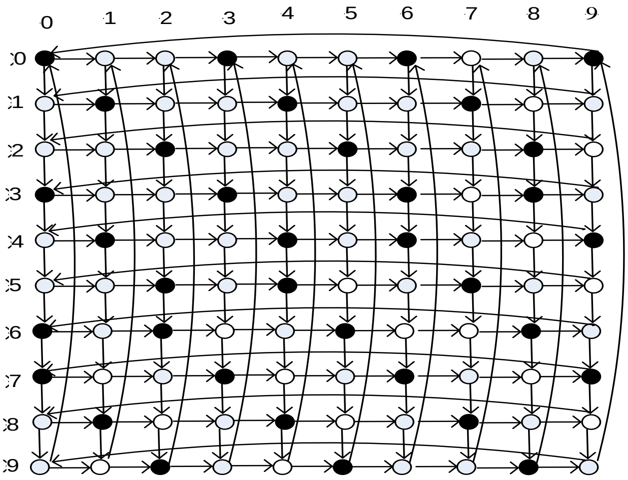
أي أنه في حالة $n\equiv 12,15 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil +2$.

وبالتالي إذا كانت $n\equiv 5,8,12,15 \pmod{20}$ فإن $\gamma(C_{10} \times C_n) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil +2$.

في حالة $n\equiv 1,2,4,7,10,13,16,18,19 \pmod{20}$

في هذه الحالة تبقى الرؤوس $(9,0)$, $(5,0)$, $(2,0)$ دون سيطرة

الشكل (13) حالة $n = 10$



الشكل (13) يبين الجداء الديكارتي للحلقتين الموجهتين $C_{10} \times C_{10}$

لتكن $A_5 = A \cup \{(2,0),(5,0),(9,0)\}$ عندئذ تكون A_5 أصغر مجموعة سيطرة لـ $C_{10} \times C_n$.
في حالة $n \equiv 1,2,4,7,10,13,16,18,19 \pmod{20}$ و $|A_5| = \lceil \frac{7n}{2} \rceil + 3$

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلنا إلى إيجاد عدد السيطرة في الجداء الديكارتي لحلقتين موجهتين $C_m \times C_n$ حيث n كيفي في حالة m=9,10 وهدفنا المستقبلي هو كتابة بعض الخوارزميات التي تعالج مشكلة السيطرة على بعض البيانات الخاصة

المراجع:

[1] SHAHEEN, R. *Domination number of toroidal grid digraphs*. Util. Math. 78(2009) 175-184 .

[2] LIU, J; ZHANG, X; CHEN, X.; MENG , J. *On Domination number of Cartesian products of directed cycles*. Inf. Process. Lett., 110 (2010) 171-173.

[3] ZHANG, X; Liu ,J ; MENG, J. *Domination number of Cartesian products of directed cycles*. Inf. Process. Lett., 111 (2010) 36-39.

[4] CHENG, YU, L; SHYONG YANG, J; HANG CHEN, A; MING CHANG, J. *Domination number of Cartesian products of directed cycles* $C_7 \times C_n$. the 4th Annual Meeting of Asian Association for Algorithms and Computation (AAAC 2011), HsinChu, Taiwan 2011.

[5] CHENG, YU, L; SHYONG YANG, J; HANG CHEN ,A; MING CHANGY,J. *Domination number of directed tori* $C_8 \times C_n$. The 28th workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, National Penghu University of science and Technology , Penghu , Taiwan,2011.

[6] EL-ZAHAR, M; SHAHEEN, R. *The domination number of* $C_8 X C_n$ *and* $C_9 X C_n$. J. Egyptian Mathematical Society **7**(1999) 151-166.