مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

دراسة حول التقارب الخطي لحلول فئة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية

الدكتور صفوان زيزون *
الدكتور محمد مناف الحمد **
عبد الكريم طه الغوطاني ***

(تاريخ الإيداع 18 / 9 / 2011. قُبِل للنشر في 23 / 4 /2012)

□ ملخّص □

في هذا البحث، سوف ندرس السلوك المقارب لحلول فئة جديدة من معادلات تفاضلية غير خطية من المرتبة الثانية. الهدف الرئيس من هذا البحث هو دراسة السلوك المقارب للحلول القابلة للاستمرار أو لجزء منها والتي تحقق شروطاً ابتدائية معينة وتسلك سلوك الدوال الخطية $at + b$ بجوار عدم النهاية، أي دراسة سلوك الحلول التي تتقارب من حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة $u'' = 0$.

لقد اعتمدت الدراسة بشكل رئيس على متراجحة "بيهاري" وبعض تعميماتها العائدة لدنان، وسنقدم بعض الأمثلة التوضيحية ذات صلة بالنظريات التي سيتم مناقشتها.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية غير خطية، السلوك المقارب .

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة دمشق– سورية.
** أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة دمشق– سورية.
*** طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة دمشق– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

A Study About Asymptotic Behavior for Some Classes of Second Order Nonlinear Differential Equations.

Dr. Safoan Zezoon*
Dr. Mohammad Alhamed**
Abd Alkareem Taha Algotani***

(Received 18 / 9 / 2011. Accepted 23 / 4 /2012)

□ ABSTRACT □

The main goal of this paper is to study the asymptotic behavior for new category of nonlinear , second order differential equations solutions . Particularly , we focus on studying of the asymptotic behavior of continuable solutions or part of these solutions. These solutions satisfy initial conditions and behave like linear functions at b in the neighborhood of infinity ; this is solutions that converge to differential equation u'' 0.

To do this , we make use of Bihari inequality and Dannan's extensison for this inequality. The study will be illustrated using approprite examples.

Key words : Nonlinear differential equations ; asymptotic behavior .

*Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University, Syria.
**Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University, Syria.
***Postgraduate Student, Associate Professor Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University, Syria.

مقدمة:

تشكل مواضيع التوازن واستقرار الحلول والسلوك المقارب ومحدودية الحلول مسائل هامة جداً في نظريات وتطبيقات المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية ، وتعتبر طريقتا لابانوف وبيلمان فعالة جداً من أجل دراسة هذه المسائل في المعادلات التفاضلية غير الخطية.

نتناول في هذا البحث دراسة تفصيلية للسلوك المقارب لفئة جديدة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية المتجانسة وغير المتجانسة الآتية:

$$u'' + f(t,u,u') = e(t) \qquad : t \geq t_0 \geq 1 \qquad (1)$$
$$u'' + f(t,u,u') + h(t,u).u' = 0 \qquad : t \geq 1 \qquad (2)$$
$$u'' + f(t,u) + h(t,u).u' = 0 \qquad : t \geq 1 \qquad (3)$$
$$u'' + f(t,u).u' = 0 \qquad : t \geq 1 \qquad (4)$$
$$u'' + f(t,u').u = e(t) \qquad : t \geq 1 \qquad (5)$$

مقرونة بالشروط الابتدائية الآتية: $u(t_0) = c_1 \; ; \; u'(t_0) = c_2$ وذلك ضمن شروط جديدة مفروضة على الدوال e, h, f. تم في هذا الدراسة البحث عن الشروط التي إذا ما توافرت يكون التقارب الخطي للحلول القابلة للاستمرار أو لجزء منها هو $at + b$ عندما $t \to +\infty$ حيث $a, b \in R \; ; \; a \neq 0$.

ولما كانت أحدث الطرائق التحليلية للبحث في إيجاد حل المعادلات التفاضلية غير الخطية من مراتب مختلفة ودراسة السلوك المقارب للحلول يعتمد على مبرهنات الوجود والوحدانية والمتراجحات التكاملية لبيلمان وبيهاري فلقد وجدنا أنه من المناسب معالجة التقارب الخطي لفئة جديدة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية، بعد ذلك تم دعم المبرهنات المطروحة بأمثلة تطبيقية مناسبة. في الأعمال [9,7,3,2] درس التقارب الخطي والسلوك المقارب لحلول معادلات تفاضلية غير خطية من المرتبة الثانية وذلك عن طريق استخدام التعميمات الشهيرة لمتراجحة بيهاري وفرضيات دنان، لذا سوف نستخدم في هذا العمل تقنية مشابهة لتلك المستخدمة في الأعمال السابقة.

الدافع أو الحافز للعمل الحالي جاء من خلال دراسة العديد من الكتب والمقالات العلمية للعديد من الرياضيين والتي تتحدث عن السلوك المقارب لحلول المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية .

لقد تم إجراء هذا البحث في جامعتي دمشق والعربية الدولية خلال العام الدراسي 2011 – 2010 .

تعريف 1 [3] : يقال عن الدالة $w: [0,\infty) \to [0,\infty)$ أنها تنتمي إلى الصف H إذا تحققت الشروط الآتية :

(H_1) $w(u)$ دالة غير متناقصة ومستمرة لكل $u \geq 0$ وموجبة لكل $u > 0$.

(H_2) يوجد دالة $\emptyset$ مستمرة على الفترة $[0,\infty)$ بحيث:

$w(\alpha.u) \leq \emptyset(\alpha).w(u)$ لكل $\alpha > 0$ و $u \geq 0$

تعريف 2 :

نقول عن الدالة $u(t)$ إنها تحقق الخاصية (L) إذا كان :

$$u(t) = at + b + o(t) \; ; t \to +\infty \quad ; \quad a, b \in R \quad ; \quad a \neq 0.$$

تعريف 3 :

تسمى الدالة $u(t)$ قابلة للاستمرار (continuable function) إذا كانت موجودة من أجل جميع قيم $t \geq t_0$.

تعريف4 [5] :

لتكن $f(t, x_1, x_2)$ دالة معرفة ومستمرة في منطقة D من الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد R^3.

نقول إن $f(t,x_1,x_2)$ تحقق شرط ليبشز بالنسبة لِ x_1 و x_2 في المنطقة D إذا وجد ثابتين L_1 و L_2 بحيث: $|f(t,x_1,x_2)-f(t,y_1,y_2)| \le L_1|x_1-y_1|+L_2|x_2-y_2|$ وذلك من أجل كل النقاط $(t,x_1,x_2),(t,y_1,y_2) \in D$.

تعريف 5 [8] :

لتكن $f(t),g(t)$ دالتين معرفتين ومستمرتين على R عندئذ نقول إن:

$f(t)=\mathrm{O}(g(t)) \quad , \quad t \to t_0$ إذا وجد ثابت $M>0$ بحيث يتحقق :

$$|f(t)| \le M|g(t)| \ ; \ t \ge t_0$$

وبشكل مكافئ: $f(t)=\mathrm{O}(g(t))\ ;\ t \to t_0$ إ ذا كانت النسبة $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|$ محدودة عندما $t \ge t_0$.

وكمثال على ذلك ،لنلاحظ أن :

$$\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n = O\left(\frac{1}{t^n}\right) \ ; n \to +\infty \ ; n \in Z^+ ; t>1$$

وذلك لأن: $t^2+n^2=(t-n)^2+2nt \ge 2nt \Longrightarrow t^2+n^2 \ge 2nt$

$$\frac{n}{t^2+n^2} \le \frac{n}{2nt}=\frac{1}{2t} \Longrightarrow \left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n \le \frac{1}{(2t)^n}=\frac{1}{2^n}.\frac{1}{t^n} \le \frac{1}{t^n}$$

$$\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n \le \frac{1}{t^n} \Longrightarrow \left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)^n = O\left(\frac{1}{t^n}\right) \ ; \ M=1$$

تعريف 6 [8]:

إذا تحقق: $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)}=0$ عندئذ يكون: $f(t)=\mathrm{o}(g(t))\ ;\ t \to t_0$.

وكمثال على ذلك : $t^2.\log t+t^3=o(t^4) \quad ; t \to +\infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^2.\log t+t^3}{t^4} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{t^2} + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}$$

لدينا : $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t}=0$

كذلك وباستخدام قاعدة أوبيتال الشهيرة يكون لدينا: $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\log t}{t^2} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{2t^2}=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{t^2.\log t+t^3}{t^4}=0 \Longrightarrow t^2.\log t+t^3=o(t^4) \quad ; t \to +\infty$

تعريف 7 (متراجحة التكامل لبيهاري [6]):

إذا كان :

$$u(t) \le m+\int_{t_0}^{t} \mu(s) g(u(s)) ds \quad ; \quad t \ge t_0$$

بحيث m ثابت موجب و μ , u دالتان ذات قيم حقيقية مستمرة غير سالبة على الفترة $[t_0,\infty)$ و g هي دالة حقيقية القيمة مستمرة على الفترة $[0,\infty)$ و موجبة وغير متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ وتحقق:

$$\int_1^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty$$

عندئذ يكون: $u(t) \le G^{-1}\left(G(m)+\int_{t_0}^{t} \mu(s) ds\right) < M \quad ; m < M \le +\infty$

حيث G: هي الدالة الأصلية لِ $1/g$ على الفترة $(0,\infty)$ و G^{-1} هي الدالة العكسية ل G و

$$G(x)=\int_k^x \frac{du}{g(u)} \quad ; \ x \ge k \ge 0$$

مبرهنة (Finizio and ladas)[5]:

بفرض أن $f_1(t,x_1,x_2)$ و $f_2(t,x_1,x_2)$ دالتان مستمرتان وتحققان شرط ليبشز بالنسبة لِ x_1 و x_2

في المنطقة: $E = \{(t, x_1, x_2): |t - t_0| \le A; |x_1 - c_1| \le B; |x_2 - c_2| \le C; A, B, C > 0\}$

عندئذٍ يوجد لمسألة القيم الابتدائية: $x_1{}' = f_1(t, x_1, x_2)$

$$x_2{}' = f_2(t, x_1, x_2)$$
$$x_1(t_0) = c_1 \quad ; \quad x_2(t_0) = c_2$$

حل وحيد معرف في مجال ما $a < t < b$ حول النقطة t_0.

<u>نتيجة:</u> بفرض أن $f(t, x_1, x_2)$ مستمرة وتحقق شرط ليبشز بالنسبة لِ x_1 و x_2 في المنطقة E المعرفة أعلاه.

عندئذٍ يوجد لمسألة القيم الابتدائية: $x'' = f(t, x_1, x_2)$

$$x_1(t_0) = c_1 \quad ; \quad x_2(t_0) = c_2$$

حل وحيد معرف في مجال ما $a < t < b$ حول النقطة t_0.

مبرهنة (D)[3]:

لنفرض أن $f(t), x(t)$ دالتان مستمرتان وموجبتان على الفترة $I = [0, \infty)$ و لتكن $h(t) > 0$ دالة مطردة وغير متناقصة ومستمرة على الفترة $[0, \infty)$،ولتكن $w(u) \in H$ بحيث تكون ϕ_1 دالة الجداء المضاعف الموافقة لها .

إذا كان: $x(t) \le h(t) + \int_0^t f(s).w\big(x(s)\big)ds \quad ; t \in I$

فإن :

$$x(t) \le h(t)W^{-1}[W(1) + \int_0^t f(s).\frac{\phi_1(h(s))}{h(s)}ds] \ ; 0 \le t \le b$$

حيث : . $W(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{w(s)} \ ; \ u > 0 \ ; \ u_0 > 0$

W^{-1}هي الدالة العكسية ل W و $[0, b)$ هي الفترة الجزئية والتي من أجلها يكون:

$$W(1) + \int_0^t f(s).\frac{\phi_1(h(s))}{h(s)}ds \ \in Dom(W^{-1})$$

مبرهنة(DD)[3]:

لنفرض أن $h(t), f(t), x_0(t), x(t)$ هي دوال مستمرة غير سالبة على الفترة $I = [0, \infty)$

ولتكن $\omega(u) \ge 0$ دالة مطردة وغير متناقصة وتحقق شرط ليبشز :

$$|\omega(u + v) - \omega(u)| \le k.v \ ; \ u, v \ge 0$$

و k هوثابت موجب.

وإذا كان: $x(t) \le x_0(t) + h(t)\int_0^t f(s).\omega\big(x(s)\big)ds \quad ; t \ge 0$

فإن: $x(t) \le x_0(t) + h(t)\int_0^t f(s).\omega\big(x_0(s)\big).\exp\left(\int_s^t kh(\tau)f(\tau)d\tau\right)ds \ ; t \ge 0$

أهمية البحث وأهدافه.

إن أهمية بحثنا تكمن في تسليط الضوء على السلوك المقارب عند نقطة عدم النهاية لحلول فئة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية وعرض مبرهنات جديدة تتعلق بالسلوك المقارب لتلك المعادلات وتقديم أمثلة توضيحية تتعلق بالمبرهنات المطروحة.

طرائق البحث ومواده:

الاستفادة من المكتبات المركزية والمخابر في جامعة دمشق والجامعة العربية الدولية ونشرات من الإنترنت بالإضافة إلى الاستفادة من خبرات الأساتذة المتخصصين في الجامعة .

النتائج والمناقشة:

<u>الشكل الأول:</u> لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$u'' + f(t,u,u') = e(t) \qquad : t \geq t_0 \geq 1 \qquad (1)$$

حيث f دالة غيرخطية ذات قيم حقيقية وتحقق الشرط: $f \in C([t_0,+\infty) \times R \times R, R)$

وأما: $e(t): [t_0,+\infty) \to R$ فهي دالة مستمرة غير سالبة.

مبرهنة *1*:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i)الدالة $f(t,u,u')$ مستمرة على الساحة: $D = \{(t,u,u'): t \in [t_0,\infty), u,u' \in R\}$

(ii) توجد دالتان مستمرتان غير سالبتين $h,g: R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u,u') - e(t)| \leq t.h(\mathrm{t}).g\left(\frac{|u|}{t}\right).|u'| + \mathrm{e(t)}$$

(iii) من أجل$s > 0$ فإن الدالة $g(s)$ غير متناقصة وتحقق المتراجحة التالية:

$$g(\alpha.u) \leq \varphi(\alpha).g(u) \ ; \ \alpha \geq 1, u \geq 0$$

حيث $\varphi(\alpha)$ هي دالة مستمرة من أجل $\alpha \geq 1$ ، والأكثر من ذلك لنفرض أن $u' \in H$ بحيث دالة الجداء المضاعف الموافقة لها هي α .

(iv) وبفرض أن: $k_1 = \int_{t_0}^{\infty} s.h(s)ds < +\infty \ \& \ k_2 = \int_{t_0}^{\infty} e(s)ds < +\infty$

(v) يوجد ثابت $m \geq 1$ بحيث: $\qquad (A) \qquad k_1.\varphi(m) \leq \int_{\mathrm{t}_0}^{\infty} \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{s}.g(s)}$

فعندئذ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1) مقروناً بالشروط الابتدائية التالية :

$u(t_0) = c_1 \ ; \ u'(t_0) = c_2 \ ; \ |c_1| + |c_2| + k_2 \leq m$ يحقق الخاصية (L).

<u>البرهان:</u> دون أن نمس من عمومية المسألة نفرض أن$t_0 = 1$ ، وباستخدام نتيجة مبرهنة [5]**(Finizio and ladas)** ينتج أن المعادلة (1) تملك حلا"$u(t) \in C[1,\infty)$

يوافق الشروط الابتدائية : $u(1) = c_1 \quad ; \quad u'(1) = c_2$

وبمكاملة المعادلة (1) مرتين من 1 إلى t نحصل من أجل $t \geq 1$ على :

$$u'(t) = c_2 - \int_1^t [f(s,u(s),u'(s)) - e(s)]ds \qquad (2)$$

$$u(t) = c_1 + c_2(t-1) - \int_1^t (t-s)\big[f(s,u(s),u'(s)) - e(s)\big]ds \quad (3)$$

من المعادلتين (2)و(3) ومن أجل $t \geq 1$ و $s > 0$ نحصل على :

$$|u'(t)| \leq |c_2| + \int_1^t \big|f(s,u(s),u'(s)) - e(s)\big|ds \qquad (4)$$

$$|u(t)| \leq (|c_1| + |c_2|)t + t\int_1^t \big|f(s,u(s),u'(s)) - e(s)\big|ds$$

$$\frac{|u(t)|}{t} \leq |c_1| + |c_2| + \int_1^t \big|f(s,u(s),u'(s)) - e(s)\big|ds \qquad (5)$$

وبالأخذ بعين الاعتبار الشرط (ii) عندئذ نجد من (4) و(5):

$$|u'(t)| \leq |c_2| + \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds + \int_1^t e(s)ds \qquad (6)$$

$$\frac{|u(t)|}{t} \leq |c_1| + |c_2| + \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds + \int_1^t e(s)ds$$

$$\leq |c_1| + |c_2| + k_2 + \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds$$

$$\leq m + \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds \qquad (7)$$

وبوضع:

$$A(t) = m + \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds \qquad (8)$$

عندئذ من (6)و(7) نجد أن:

$$|u'(t)| \leq A(t) \qquad (9)$$

$$\frac{|u(t)|}{t} \leq A(t) \qquad (10)$$

وبما أن الدالة $g(s)$ غير متناقصة من أجل $s > 0$ ،عندئذ نحصل من (9) و(10) من أجل$t \geq 1$ على:

$$g\left(\frac{|u(t)|}{t}\right) \leq g(A(t)) \qquad (11)$$

نستنتج من (8) وبملاحظة المتراجحات (9) ,(11) أنه من أجل $t \geq 1$ ينتج أن :

$$A(t) \leq m + \int_1^t s.h(s).g(A(s)).A(s)ds \qquad (12)$$

وحسب الشرطين (ii) و(iii) نجد أن الدالتين $g(u)$, u' تنتميان إلى الصف H .

علاوة على ذلك فانه وحسب[3] فإن:$u'.g(u) \in H$ وتكون$\alpha.\varphi(\alpha)$ هي دالة الجداء المضاعف الموافقة للجداء.وبتطبيق مبرهنة (D)[3] على (12)نجد أن :

$$A(t) \leq m.W^{-1}[\int_1^t s.h(s).\frac{m.\varphi(m)}{m}ds]$$

$$\leq m.W^{-1}[\varphi(m).\int_1^t s.h(s)ds] \qquad (13)$$

حيث: $w(u) = \int_1^u \frac{ds}{s.g(s)}$ & $w^{-1}(u)$ هي الدالة العكسية للدالة$w(u)$.

المتراجحة (13)محققة من أجل جميع قيم $t \geq 1$ لانه حسب (A) من أجل $t \geq 1$يكون:

$$\varphi(m).\int_1^t s.h(s)ds \in Dom(w^{-1})$$

لنضع الآن:

$$\varphi(m).k_1 = c < +\infty$$

وبما أن $w^{-1}(u)$ متزايدة عندئذ يكون من (13) :

$$A(t) \leq m.w^{-1}(c) < +\infty$$

عندئذ ينتج من (9) ,(10) :

$$|u'(t)| \leq m.w^{-1}(c)$$

$$\frac{|u(t)|}{t} \leq m.w^{-1}(c)$$

وبالعودة إلى الشرط (ii)من المبرهنة 1 فإننا نلاحظ ما يلي:

$$\int_1^t |f(s,u(s),u'(s)) - e(s)|ds \leq \int_1^t s.h(s).g\left(\frac{|u|}{s}\right).|u'|\,ds + $$

$$+ \int_1^t e(s)ds$$

$$\leq A(t) \leq m.w^{-1}(c) < +\infty$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t [f(s,u(s),u'(s)) - e(s)]ds$ متقارب مطلقا" وبالتالي فإن النهاية:

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t[f(s,u(s),u'(s))-e(s)]ds=\alpha(c_1,c_2)<+\infty$$

موجودة دوما" ومحدودة،هذا من جهة،ومن جهة ثانية من (2) نجد أن :

$$\lim_{t\to\infty}u'(t)=c_2-\alpha(c_1,c_2)=a\neq 0$$

أخيراً، وباستخدام قاعدة أوبيتال الشهيرة نجد أن: $\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}u'(t)=a\neq 0$

ومن أجل أي ثابت حقيقي b يكون :

$$\lim_{t\to\infty}\{\frac{u(t)-(at+b)}{t}\}=\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{t}-\lim_{t\to\infty}\frac{at+b}{t}=a-a=0$$

وهذا يعني أن الحل القابل للاستمرار $u(t)$ له السلوك المقارب $at+b$ عندما $t\to\infty$.

مثال تطبيقي:لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$u''+t^{-3}.\frac{u^2}{t+u}.\frac{u'}{2+\cos(u')}=\frac{1}{1+t^2}\quad;\quad t\geq 1\qquad(*)$$

نلاحظ أن :

$$f(t,u,u')=t^{-3}.\frac{u^2}{t+u}.\frac{u'}{2+\cos(u')}\qquad\&\qquad e(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

$$|f(t,u,u')-e(t)|\leq|f(t,u,u')|+|e(t)|$$

وبملاحظة أنه من أجل $t\geq 1$ يكون:

$$\cos(u')\geq -1\Rightarrow 2+\cos(u')\geq 1\Rightarrow\left|\frac{u'}{2+\cos(u')}\right|\leq|u'|$$

$$t\geq 1\Rightarrow t+u\geq 1+u\Rightarrow\left|\frac{u^2}{t+u}\right|\leq\left|\frac{u^2}{1+u}\right|$$

وبالتالي فان:

$$|f(t,u,u')-e(t)|\leq\frac{1}{t^2}.\left|\frac{u^2}{1+u}\right|.|u'|+\frac{1}{1+t^2}$$

$$t.h(t)=\frac{1}{t^2}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{t^3}\ \&\ g(u)=\frac{u^2}{1+u}\ \&\ \varphi(\alpha)=\alpha^2$$

$$k_1=\int_1^\infty s.h(s)ds=\int_1^\infty\frac{1}{s^2}ds=1<+\infty$$

$$k_2=\int_1^\infty e(s)ds=\int_1^\infty\frac{ds}{1+s^2}=\frac{\pi}{4}<+\infty$$

$$k_1.\varphi(m)\leq\int_1^\infty\frac{ds}{s.g(s)}\quad\Leftrightarrow m^2\leq\int_1^\infty\left(\frac{1+s}{s^3}\right)ds=3$$

$$\Rightarrow m^2\leq 3\ \Rightarrow m\leq\sqrt{3}$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 1 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول القابلة للاستمرار للمعادلة (*) لها السلوك المقارب $at+b$ عندما $t\to\infty$ حيث $a,b\in R\ ;a\neq 0$

وفضلاً عن ذلك فإن: $|c_1|+|c_2|+k_2\leq\sqrt{3}$.

مبرهنة 2:

لنفرض أن جميع فرضيات المبرهنة 1محققة ماعدا الفرضية الثالثة (iii) حيث تستبدل بالفرضية التالية:

$(iii)'$ من أجل $s>0$ فإن الدالة $g(s)$ غير متناقصة وبحيث $g(0)=0$ والأكثر من ذلك فهي تحقق شرط ليبشز الآتي : $|g(u+v)-g(u)|\leq\lambda.v\ \ ;\ u,v\geq 0$

حيث λ هوثابت حقيقي.

عندئذ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1) محقق للشروط الابتدائية:

$u(1)=c_1\ ;\ u'(1)=c_2\ ;|c_1|+|c_2|+k_2\leq m$ يحقق الخاصية (L).

البرهان:

بإجراء المناقشة نفسها كما في المبرهنة 1 وبتطبيق مبرهنة**(DD)[3]** على (12) ،آخذين بعين الاعتبار الشروط $(iii)'$, (iv) نحصل من أجل $t \geq 1$:

$$A(t) \leq m + \int_1^t s.h(s)[m.g(m)].\exp[\ \lambda.\int_1^t \tau.h(\tau)d\tau]ds$$
$$\leq m + \big(m.g(m)\big).(k_1).\exp(\lambda.k_1) < +\infty \qquad (14)$$
$$A(t) < +\infty$$

ويستكمل البرهان كما في المبرهنة 1.

مبرهنة 3:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i)الدالة $f(t,u,u')$ مستمرة على الساحة: $D = \{(t,u,u'): t \in [1,\infty), u,u' \in R\}$

(ii) توجد دالتان مستمرتان غير سالبتين $h,g: R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u,u') - e(t)| \leq \mathrm{t}.h(\mathrm{t})[g\left(\tfrac{|u|}{t}\right) + |u'|] + \mathrm{e(t)}$$

(iii)من أجل$s > 0$ فإن الدالة $g(s)$ غير متناقصة وتحقق المتراجحة التالية:

$$g\big(\alpha.u\big) \leq \varphi\big(\alpha\big).g(u)\ ;\ \ \alpha \geq 1, u \geq 0$$

حيث $\varphi\big(\alpha\big)$ هي دالة مستمرة من أجل $\alpha \geq 1$،والأكثر من ذلك لنفرض أن $u' \in H$ بحيث دالة الجداء المضاعف الموافقة لها هي α .

(iv)وبفرض أن: $k_1 = \int_1^\infty s.h(s)ds < +\infty\ \&\ k_2 = \int_1^\infty e(s)ds < +\infty$

(v) يوجد ثابت $m \geq 1$ بحيث:(B) $m^{-1}.(\varphi(m) + m).k_1 \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{s}+g(s)}$

فعندئذ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1) مقروناً بالشروط الابتدائية :

$u(1) = c_1\ ;\ u'(1) = c_2\ ;\ |c_1| + |c_2| + k_2 \leq m$ يحقق الخاصية (L).

البرهان: بإجراء المناقشة نفسها كما في المبرهنة 1 نجد انه من اجل $t \geq 1$ يكون :

$$|u'(t)| \leq |c_2| + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\left(\tfrac{|u|}{s}\right) + |u'|]\,ds + \int_1^t e(s)ds \qquad (15)$$
$$\frac{|u(t)|}{t} \leq |c_1| + |c_2| + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\left(\tfrac{|u|}{s}\right) + |u'|]\,ds + \int_1^t e(s)ds$$
$$\leq |c_1| + |c_2| + k_2 + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\left(\tfrac{|u|}{s}\right) + |u'|\,]ds$$
$$\leq m + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\left(\tfrac{|u|}{s}\right) + |u'|]\,ds \qquad (16)$$

ويوضع: $$A(t) = m + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\left(\tfrac{|u|}{s}\right) + |u'|]\,ds \qquad (17)$$

عندئذ من (15)و(16) نجد أن :

$$|u'(t)| \leq A(t) \qquad (18)$$
$$\frac{|u(t)|}{t} \leq A(t) \qquad (19)$$

وبما أن الدالة $g(s)$ غير متناقصة من أجل $s > 0$ ،عندئذ نحصل من (19) من أجل$t \geq 1$ على :

$$g\left(\frac{|u(t)|}{t}\right) \leq g\big(A(t)\big) \qquad (20)$$

نستنتج من (17) وبملاحظة المتراجحات (18), (20) أنه من أجل $t \geq 1$ ينتج أن :

$$A(t) \leq m + \int_1^t \mathrm{s}.h(\mathrm{s})[g\big(A(s)\big) + A(s)]\,ds \qquad (21)$$

وحسب الشرطين (ii) و (iii) نجد أن الدالتين $g(u)$, u' تنتميان الى الصف H .

علاوة على ذلك فإنه وحسب [3] فان: $u'.g(u) \in H$ وتكون $\alpha.\varphi(\alpha)$ هي دالة الجداء المضاعف الموافقة للجداء. وبتطبيق مبرهنة $(D)[3]$ على (21) نجد أن :

$$A(t) \le m.W^{-1}[\int_1^t s.h(s)(\frac{m+\varphi(m)}{m})ds]$$
$$\le m.W^{-1}[m^{-1}.(\varphi(m)+m).\int_1^t s.h(s)ds] \qquad (22)$$

حيث: $w(u)=\int_1^u \frac{d}{s+g(s)}$ & $w^{-1}(u)$ هي الدالة العكسية للدالة $w(u)$.

المتراجحة (22) محققة من أجل جميع قيم $t \ge 1$ لانه حسب (B) من أجل $t \ge 1$ يكون:

$$m^{-1}.(\varphi(m)+m).\int_1^t s.h(s)ds \in Dom(w^{-1})$$

لنضع الآن: $m^{-1}.(\varphi(m)+m).k_1 = c < +\infty$

وبما أن $w^{-1}(u)$ متزايدة عندئذ يكون من (22) : $A(t) \le m.w^{-1}(c) < +\infty$

عندئذ ينتج من $(18),(19)$: $|u'(t)| \le m.w^{-1}(c)$

$$\frac{|u(t)|}{t} \le m.w^{-1}(c)$$

وبالعودة إلى الشرط (ii) من المبرهنة 3 فإننا نلاحظ مايلي:

$$\int_1^t |f(s,u(s),u'(s)) - e(s)|ds \le \int_1^t s.h(s)[g\left(\frac{|u|}{s}\right) + |u'|\,]ds + \int_1^t e(s)ds$$
$$\le A(t) \le m.w^{-1}(c) < +\infty$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t [f(s,u(s),u'(s)) - e(s)]ds$ متقارب مطلقا" .

ويستكمل البرهان كما في المبرهنة 1.

مثال تطبيقي: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$u'' + \frac{1}{t^n}.\left[\frac{u.L(u)}{2+\cos(u)} + u'.M(u)\right] = \frac{1}{1+t^2} \quad ; t \ge 1 \qquad (**)$$

حيث $M(u)$ و $L(u)$ هي دوال مستمرة تحقق أن: $|L(u)| \le 1$ & $|M(u)| \le 1$; $u \ge 0$

و $n \ge 2$ أعداد صحيحة موجبة.

لدينا $f(t,u,u') = \frac{1}{t^n}.\left[\frac{u.L(u)}{2+\cos(u)} + u'.M(u)\right]$ & $e(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$|f(t,u,u') - e(t)| \le \frac{1}{t^n}.[|u| + |u'|\,]$$

$$h(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \quad \& \quad g(u) = u \quad \& \quad \varphi(\alpha) = \alpha$$

وبما أن $\int_1^{+\infty} \frac{ds}{s+g(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{2s} = +\infty$ فانه وحسب [3] نجد أن كل الحلول القابلة للاستمرار المعادلة $(**)$ تحقق الخاصية (L).

<u>الشكل الثاني:</u> لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$u'' + f(t,u,u') + h(t,u).u' = 0 \quad : t \ge 1 \qquad (1)$$

حيث $f \in C([1,+\infty) \times R \times R, R)$ و $h \in C([1,+\infty) \times R, R)$

مبرهنة 4:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i) الدالة $f(t,u,u')$ مستمرة على الساحة: $D = \{(t,u,u') : t \in [1,\infty), u, u' \in R\}$

(ii) الدالة $h(t,u)$ مستمرة على الساحة: $D' = \{(t,u) : t \in [1,\infty), u \in R\}$

(iii)توجد دوال مستمرة $h_1, g_1, g_2: R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u,u') + h(t,u).u'| \le h_1(\mathrm{t}).\, g_1(\tfrac{|u|}{t})[g_2(|u'|) + |u'|]$$

(iv) حيث إن الدوال $g_1(s), g_2(s)$ من أجل $s > 0$ موجبة وغيرمتناقصة،إذا رمزنا بِ:

$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{g_1(s)[g_2(s)+s]}$ فإن $G(+\infty) = +\infty$.

(v) $\int_1^\infty h_1(\mathrm{s})\mathrm{ds} = \mathrm{H} < +\infty$

عندئذٍ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1)يحقق الخاصية (L).

<u>**البرهان:**</u> بمكاملة المعادلة (1) مرتين متتاليتين وإجراء دراسة تفصيلية مشابهة لما في المبرهنة (1) نجد بعد تطبيق متراجحة بيهاري [6] أنه من أجل $t \ge 1$ يكون :

$$A(t) \le G^{-1}[G(1 + |c_1| + |c_2|) + \int_1^t h_1(\mathrm{s})ds]$$

حيث $G(w) = \int_1^w \frac{ds}{g_1(s)[g_2(s)+s]}$ و $G^{-1}(w)$ هي الدالة العكسية للدالة $G(w)$ والتي تكون معرفة من اجل $w \in (G(+0), +\infty)$.

والأكثر من ذلك فإن: $G(+0) < 0$ و $G^{-1}(w)$ متزايدة.

وإذا فرضنا أن : $K = G(1 + |c_1| + |c_2|) + H < +\infty$.

ومن كون $G^{-1}(w)$ نجد أن : $A(t) \le G^{-1}(k) < +\infty$

ويستكمل البرهان كما في المبرهنات السابقة.

مثال تطبيقي:لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$u'' + t^{-\frac{3}{2}}\left[\ln\left(1 + \frac{u}{t}\right).\frac{1}{1+(u')^2} + \ln\left(1 + \frac{u}{t}\right).u'\right] = 0 \ ; t \ge 1 \qquad (***)$$

$$f(t,u,u') = t^{-\frac{3}{2}}.\ln\left(1 + \frac{u}{t}\right).\frac{1}{1+(u')^2} \quad \& \quad h(t,u) = t^{-\frac{3}{2}}.\ln\left(1 + \frac{u}{t}\right)$$

من أجل $t \ge 1$ نحصل على: $t \ge 1 \Rightarrow \frac{u}{t} \le u \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{u}{t}\right) \le \ln(1+u)$

$$1 + (u')^2 \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{1+(u')^2} \le 1$$

$$|f(t,u,u') + h(t,u).u'| \le t^{-\frac{3}{2}}.|\ln(1+u)|.[1 + |u'|]$$

$$h_1(t) = t^{-\frac{3}{2}} \quad \& \quad g_1(u) = \ln(1+u) \quad \& \quad g_1(u) = 1$$

$$H = \int_1^\infty h_1(t)dt = \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}}dt = 2 < +\infty$$

$$G(+\infty) = \int_1^\infty \frac{ds}{g_1(s)[g_2(s)+s]} = \int_1^\infty \frac{ds}{\ln(s+1).[s+1]} = +\infty$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 4 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول القابلة للاستمرار للمعادلة $(***)$ تحقق الخاصية (L).

<u>**الشكل الثالث:**</u> لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$u'' + f(t,u) + h(t,u).u' = 0 \quad : t \ge 1 \qquad (1)$$

حيث : $f \ , \ h \in C([1, +\infty) \times R, R)$

مبرهنة 5:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i)الدالتان $f(t,u)$ و$h(t,u)$مستمرتان على الساحة: $D = \{(t,u): t \in [1,\infty), u \in R\}$

(ii)توجد دوال مستمرة $h_1, g: R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u)+h(t,u).u'| \le h_1(\mathrm{t}).g(\tfrac{|u|}{t})[1+|u'|]$$

(iii)حيث إن الدالة $g(s)$ من أجل $s>0$ موجبة وغيرمتناقصة،إذا رمزنا بِ:

$G(x)=\int_1^x \frac{ds}{[s+1].g(s)}$ فإن $G(+\infty)=+\infty$.

(iv) $\int_1^\infty h_1(\mathrm{s})\mathrm{ds}=\mathrm{H}<+\infty$

عندئذٍ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1)يحقق الخاصية (L).

البرهان: يتم بشكل مماثل للمبرهنات السابقة.

مثال تطبيقي:لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من **المرتبة** الثانية التالية:

$$u''+\frac{1}{t^2}.\ln\left(1+\frac{u}{t}\right)+\frac{u'}{t^2+t^2.u^2}.\ln\left(1+\frac{u}{t}\right)=0\ ;t\ge 1 \qquad (****)$$

$$f(t,u)=\frac{1}{t^2}.\ln\left(1+\frac{u}{t}\right)\quad \&\quad h(t,u)=\frac{1}{t^2+t^2.u^2}.\ln\left(1+\frac{u}{t}\right)$$

$$|f(t,u)+h(t,u).u'| \le \frac{1}{t^2}.|\ln(1+u)|.[1+|u'|]$$

$$h_1(t)=\frac{1}{t^2}\qquad \&\qquad g(u)=\ln(1+u)$$

$$H=\int_1^\infty h_1(t)dt=\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt=1<+\infty$$

$$G(+\infty)=\int_1^{+\infty}\frac{ds}{[s+1].g(s)}=\int_1^{+\infty}\frac{ds}{[s+1].\ln(1+s)}=+\infty$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 5 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول القابلة للاستمرار للمعادلة (****) تحقق الخاصية (L) .

الشكل الرابع: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$u''+f(t,u).u'=0 \qquad : t\ge 1\ ;\ f\in C([1,+\infty)\times R,R) \quad (1)$$

مبرهنة 6:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i)الدالة $f(t,u)$ مستمرة على الساحة $D=\{(t,u): t\in[1,\infty), u\in R\}$:

(ii) توجد دوال مستمرة $h_1,h_2,g: R^+\to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u).u'| \le h_1(\mathrm{t}).g\left(\frac{|u|}{t}\right).|u'|+h_2(\mathrm{t}).|u'|$$

(iii) حيث إن الدالة $g(s)$ من أجل $s>0$ موجبة وغيرمتناقصة،إذا رمزنا بِ:

$G(x)=\int_1^x \frac{ds}{s+s.g(s)}$ فإن $G(+\infty)=+\infty$.

(iv) $\int_1^\infty h_{\mathrm{i}}(\mathrm{s})\mathrm{ds}=H_i<+\infty\quad ;i=1,2$

عندئذ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1)يحقق الخاصية (L).

البرهان: يتم بشكل مماثل للمبرهنات السابقة.

مثال تطبيقي:لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$u''+\frac{u'}{(1+t^2)(1+u^2)}+\frac{u'}{t^2}=0\ ;t\ge 1 \qquad (*****)$$

$$f(t,u)=\frac{1}{(1+t^2)(1+u^2)}+\frac{1}{t^2}$$

$$|f(t,u).u'| \le \frac{1}{1+t^2}.|u'|+\frac{|u'|}{t^2}$$

$$h_1(t)=\frac{1}{1+t^2}\quad \&\ h_2(t)=\frac{1}{t^2}\quad \&\ g(u)=1$$

$$H_1 = \int_1^{+\infty} h_1(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} < +\infty$$
$$H_2 = \int_1^{+\infty} h_2(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 < +\infty$$
$$G(+\infty) = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s+s.g(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s+s} = +\infty$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 6 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول القابلة للاستمرار للمعادلة (*****)تحقق الخاصية (L).

<u>الشكل الخامس:</u> لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$u'' + f(t,u').u = e(t) \qquad : t \geq 1 \qquad (1)$$

حيث : $f \in C([1,+\infty) \times R, R)$

وأما: $e(t): [1,+\infty) \to R$ فهي دالة مستمرة غيرسالبة.

مبرهنة 7:

إذا تحققت الشروط الآتية :

(i) الدالة $f(t,u')$ مستمرة على الساحة: $D = \{(t,u'): t \in [1,\infty), u' \in R\}$

(ii) توجد دوال مستمرة $h_1, h_2, g: R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u').u - e(t)| \leq h_1(\mathrm{t}).\frac{|u|}{t}.g(|u'|) + h_2(\mathrm{t}).\frac{|u|}{t} + e(t)$$

(iii) حيث إن الدالة $g(s)$ من أجل $s > 0$ موجبة وغيرمتناقصة،إذا رمزنا بِ: $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{s+s.g(s)}$ فإن $G(+\infty) = +\infty$.

(iv) $\int_1^{\infty} h_{\mathrm{i}}(\mathrm{s})\mathrm{ds} = H_i < +\infty \ ; i = 1,2 \ \& \ \int_1^{\infty} \mathrm{e}(\mathrm{s})\mathrm{ds} = H_3 < +\infty$

عندئذ أي حل قابل للاستمرار $u(t)$ للمعادلة (1)يحقق الخاصية (L).

<u>البرهان:</u> يتم بشكل مماثل للمبرهنات السابقة.

مثال تطبيقي:لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$u'' + \frac{u}{t^3(1+(u')^2)} + \frac{u}{t^3} = \frac{1}{1+t^2} \quad ; \ t \geq 1 \qquad (******)$$
$$|f(t,u').u - e(t)| \leq \frac{1}{t^2}.\frac{|u|}{t} + \frac{1}{t^2}.\frac{|u|}{t} + \frac{1}{1+t^2}$$
$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{1}{t^2} \quad \& \quad g(u) = 1 \quad \& \quad e(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
$$H_i = \int_1^{+\infty} h_i(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 < +\infty \quad ; \ i = 1,2$$
$$H_3 = \int_1^{+\infty} e(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} < +\infty$$
$$G(+\infty) = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s+s.g(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s+s} = +\infty$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 7 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول القابلة للاستمرار للمعادلة (******)تحقق الخاصية (L).

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم التوصل إلى مبرهنات هامة في السلوك المقارب لفئة جديدة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية وسوف نواصل البحث في موضوع السلوك المقارب للمعادلات التفاضلية غير الخطية وفق شروط جديدة.

ونوصي زملاءنا من طلاب الدراسات العليا وأساتذة متخصصين من أعضاء الهيئة التدريسية البحث في هذا الموضوع حيث إنّ هذا الموضوع شامل وممكن البحث في السلوك المقارب للمعادلات التفاضلية غير الخطية الجزئية أيضاً.

المراجع:

[1] BELLMAN, R.- *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, London, 1953.

[2]Chen, Shaozhu. -Asymptotic linearity of solutions of nonlinear differential equations, Bull.Austral.Math.soc.vol.,1987, 257-265.

[3] Dannan, F. M.- Integral inequalities of Gronwall- Bellman- Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl., v. 108,1985, 151–164.

[4] Juan, Luo, Zhimin, Luo. and He, Qingyan.-on the asymptotic behavior of second order nonlinear differential equations,2010,IEEE,2010, 234-236.

[5] LADAS, G.and FINIZIO,N.-An introduction to differential equations with difference equations, Fourier series, and Partial differential equations ,printed in the United states of America, Wadsworth publlshing company ,1982.

[6] Mustafa,O.G. and Rogovchenko, Yu.V.-Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second order nonlinear differential equations, *Nonlinear Analysis. Apple.,v.* 51 ,2002, 339– 368.

[7] Naito, M.- Integral averages and the asymptotic behavior of solutions of second order ordinary differential equations, *J. Math. Analysis Applic., v.* 164 , ,1992, 370–380.

[8] SHIMA, H. and NAKAYAMA, T.-Higher Mathematics for physics and Engineering. Springer Heidelberg Dordrecht London New York , Library of congress control Number :2009940406. © Springer –verlage Berlin Heidelberg, 2010.

[9] Philos, Ch.G. and Purnaras, I.K.- Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations, *Nonlinear Analysis., v.* 24 ,1995, 81–90.