مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

التكافؤ بين المتتاليات Noor, Ishikawa, Mann للتطبيقات ضعيفة التقليص

الدكتور عدنان متيلج *

(تاريخ الإيداع 12 / 1 / 2012. قُبِل للنشر في 7 / 5 /2012)

□ ملخّص □

سنبرهن في هذه المقالة على التكافؤ بين تقارب المتتاليات (Mann ، Ishikawa ، Noor) من أجل صنف من التطبيقات ضعيفة التقليص (Weak contractive) والمعرفة على مجموعات جزئية و مغلقة و محدبة لفضاء كيفي. كما نبرهن أن التكافؤ يمدد إلى التطبيقات اللاتمددية المعممة (Generalized non expansive) ضمن الشروط :

$0 \le a < 1 \;\;,\;\; b,c \in [0,1) \;\;,\;\; a+2b+2c<1$ على وسطاء التطبيق .

أخيراً نقترح صيغة جديدة للتطبيق اللاتمددي المعمم على نحو تكون فيه هذه المتتاليات متكافئة أيضاً .

الكلمات المفتاحية: متتالية اشيكاوا، متتالية مان، متتالية نور، التطبيقات اللاتمددية، نظرية النقطة الثابتة، التصنيف الرياضي للموضوع (2010) ، 47H10

* أستاذ مساعد – قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة تشرين –اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

The Equivalence Between Mann, Ishikawa and Noor Iterations for Weak Contractive Maps

Dr. Adnan Mtelej*

(Received 12 / 1 / 2012. Accepted 7 / 5 /2012)

☐ ABSTRACT ☐

In this paper, we prove that the sequences (Mann, Ishikawa , Noor) are equivalent for the class of weak contractive mappings defined on closed, convex subsets of arbitrar Banach spaces ,and we prove that the equivalence extends to the generalized non expansive mappings with the conditions :

$0 \le a < 1 \quad , \quad b, c \in [0,1) \quad , \quad a + 2b + 2c < 1$

Finally, we define new formula for generalized non expansive mappings such as that these sequences are equivalent.

Key words: Mann, Ishikawa, Noor iteration, Non expansive mappings, Fixed point theory, Subject classification (2010), 47H10 Mathematics

***Associate Professor, Department of basic science, Faculty of Mech & Elec Engineering, Tishreen University, Syria .**

مقدمة:

البحث عن النقط الثابتة للتطبيقات اللاتمددية عمل مألوف في العلوم الرياضية إذ تعاد كتابة المسألة المفروضة كمسألة نقطة ثابتة لهذه التطبيقات .

نفرض أن X فضاء باناخ ولتكن K مجموعة جزئية من X غير خالية ومحدبة ومغلقة .

نقول عن التطبيق الذاتي: $T:K\rightarrow K$ إنه مقلص تام إذا وجد $\delta\in(0,1)$ بحيث يكون :

$$\|Tx-Ty\|\le\delta\|x-y\| \qquad \forall\ x,y\in K \qquad (1)$$

أما إذا حقق T الشرط : $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\| \quad \forall\ x,y\in K$ فيسمى تطبيقاً لاتمدُدياً (non expansive) وإذا كان لـ T نقطة ثابتة p بحيث : $\|Tx-p\|\le\|x-p\|$

فيسمى شبيه اللاتمدُدي (Quasi non expansive)

سنرمز لمجموعة النقط الثابتة لـ T بـ F_T حيث : $F_T=\{\,x\in K:Tx=x\,\}$

في الفضاءات المترية التامة وفضاءات باناخ إذا كان T مقلصاً تاماً فإن متتالية بيكارد $x_n=Tx_{n-1}$ متقاربة نحو نقطة ثابتة لـ T مهما كانت $x_0\in K$

وهو ما يسمى بمبدأ التطبيق المقلُص لـ باناخ ويعد أول نظريات النقط الثابتة وله تطبيقات كثيرة في حل المعادلات غير الخطية إلا أنه يعاني من مشكلة لزوم شرط التقليص التام والذي يتطلب الاستمرار في كل نقطة من نقاط الفضاء X .لذلك جرت محاولات عدة لتعميم هذا المبدأ مثل:

إضعاف شرط التقليص لـ T بمعنى استبدال شرط التقليص التام بشرط مشابه لكن أضعف منه ،

أو تمد يد الفضاء، أو دمج الطريقتين معاً ،أو وضع شروط إضافية، ويعود ذلك لأسباب عدة منها طبيعة المسألة أو خصوصية التطبيق. لأنه عندما لا يحقق T شرط التقليص التام فليس من الضروري أن تكون له نقطة ثابتة، وحتى في حال وجودها ليس من المؤكد تقارب متتالية بيكارد نحوها وهذا ما دفع للبحث عن متتاليات وتطبيقات أخرى، وبالفعل نجح بعض الباحثين في إيجاد متتاليات جديدة تم تحسينها لاحقاً ولعبت دوراً بارزاً في إيجاد الحلول التقريبية للعديد من المسائل التطبيقية نذكر فيما يلي بعضاً من هذه المتتاليات التي سيتم استخدامها في هذه المقالة:

ليكن التطبيق $T:K\rightarrow K$ حيث Kمجموعة جزئية من X غير خالية، ومغلقة، ومحدبة

ولنفرض $x_0,u_0\in K$ عندئذٍ :

تعرف متتالية Mann بالعلاقة :

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nTu_n \qquad n=0,1,2,..... \qquad (2)$$

وتعرف متتالية Ishikawa بالعلاقة:

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n \\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n \end{aligned} \qquad (3)$$

وتعرف متتالية Noor بالعلاقة:

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n \\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTz_n \\ z_n&=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n\,Tx_n \end{aligned} \qquad (4)$$

حيث : $\{\gamma_n\}\subset[0,1)$, $\{\beta_n\}\subset[0,1)$, $\{\alpha_n\}\subset[0,1)$.

أما بخصوص التطبيقات فنذكر على سبيل المثال Kannan [1] حيث استبدل في عام 1968 شرط التقليص التام بالشرط يوجد $b \in (0, \frac{1}{2})$ بحيث :

$$d(Tx,Ty) \le b\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] \quad , \ \forall x \ , y \in X \qquad (5)$$

ووضع Chatterjea [2] في عام 1972 شرطاً آخر مشابهاً لشرط Kannan على النحو:

يوجد $c \in (0, \frac{1}{2})$ بحيث :

$$d(Tx,Ty) \le c\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right] \quad , \ \forall x \ , y \in X \qquad (6)$$

وفي عام 1972 جمع Zamfirescu [3] الشروط (1) ، (5) ، (6) بالنظرية الآتية :

نظرية (1) (Zamfirescu)

بفرض أن (X,d) فضاء متري تام وأن $T : X \to X$ تطبيق توجد لأجله أعداد حقيقية a , b , c تحقق الشرطين $b,c \in (0, \frac{1}{2})$, $0 \le a \prec 1$ من أجل $x, y \in X$ فإن واحداً على الأقل من الشروط التالية محقق :

1) $d(Tx,Ty) \le ad(x,y)$

2) $d(Tx,Ty) \le b[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$

3) $d(Tx,Ty) \le c[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$

عندئذٍ T له نقطة ثابتة وحيدة P ومتتالية Picard $x_{n+1} = Tx_n$ متقاربة نحو $P \in X$ من أجل أية نقطة $x_0 \in X$.

يسمي التطبيق الذي يحقق أياً من الشروط الثلاثة الواردة في النظرية (1) بتطبيق Zamfirescu والذي يرمز له اختصاراً بـ Z وقد طبق Rhoades [4 , 5] شروط Zamfirescu في فضاءات باناخ المنتظمة التحدب لإثبات تقارب متتاليتي Mann و Ishikawa نحو نقطة ثابتة. ثم مددت هذه النتائج من قبل Berinde [6] إلى فضاءات كيفية لـ باناخ ، كما عرّف صنفاً جديداً من التطبيقات الضعيفة التقليص أنظر [7] تحقق الشرط :

$$\|Tx - Ty\| \le \delta\|x - y\| + L\|x - Tx\| \qquad (7)$$

$$\forall x, y \in X \quad , \quad \delta \in (0,1) \quad , \quad L \ge 0$$

وبرهن في [7,6] النظريتين الأتيتين :

نظرية (2) : [6] ليكن X فضاء نظيماً و K مجموعة جزئية من X غير خالية ومحدبة ومغلقة والتطبيق $T : K \to K$ يحقق الشرط(7) ولتكن $\{x_n\}$ متتالية Mann والتي يكون من أجلها $x_0 \in K$, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ و $\sum \alpha_n = \infty$ عندئذٍ تكون $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T.

نظرية (3): [7] ليكن X فضاء باناخ ولتكن K مجموعة جزئية من X غير خالية و مغلقة ومحدبة وليكن $T : K \to K$ مؤثراً يحقق الشرط (7) ولتكن $\{x_n\}$متتالية Ishikawa و $x_0 \in K$ و $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ متتاليتين عدديتين من [0,1) مع $\sum \alpha_n = \infty$ عندئذٍ تكون $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T .

ولدينا العديد من الباحثين الذين حصلوا على نتائج جيدة لمتتاليات وتطبيقات جديدة . أنظر مثلا Bosede [8] ومراجعه .

ملاحظة (1) : ةإذا حقق T شروط التطبيق Z فيبرهن بسهولة أنه يحقق الشرط:

$$\|Tx - Ty\| \le \delta\|x - y\| + 2\delta\|x - Tx\| \qquad (8)$$

حيث : $\delta = \max\left\{a, \dfrac{b}{1-b}, \dfrac{c}{1-c}\right\}$ و a,b,c هي الثوابت المستخدمة في Z ، وبالتالي التطبيق المعرف بالشرط (7) أعم من التطبيق Z .

تعريف (1) : ليكن X فضاء باناخ ولتكن K مجموعة جزئية من X غير خالية و محدبة ومغلقة يسمى التطبيق $T : K \to K$ لاتمددي معمم [9] إذا حقق الشرط :

$$\|Tx - Ty\| \le a\|x - y\| + b\{\, \|x - Tx\| + \|y - Ty\|\} + c\{\, \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\} \qquad (9)$$

وذلك مهما يكن $x, y \in K$ و $a,b,c \ge 0$ مع $a + 2b + 2c \le 1$

دفع التشابه بين متتاليتي Mann و Ishikawa مؤخراً العديد من الباحثين لمعرفة العلاقة بين تقاربهما فكان من أوائل من درسوا التكافؤ بينهما Rhoades , Soltuz [10] وتتالت الأبحاث في هذا المجال منذ ذلك الوقت حتى الآن، إذ اتسعت دائرة التكافؤ لتشمل متتاليات أخرى مثل Picard ، Noor... مولدة بتطبيقات لها ميزات وخصائص مختلفة في التقليص انظر مثلاً ARIF RAFIQ [11] و

ST EFAN , M.SOLTUZ [12]

فيما يلي سنبرهن التكافؤ بين المتتاليات السابقة عندما يكون T مقلصاً ضعيفاً ثم نمدد ذلك إلى التطبيق اللاتمددي المعمم بعد وضع شروط محددة على وسطائه a , b , c . ونقترح صيغة جديدة للتطبيق اللاتمددي المعمم، ونستنتج أن التكافؤ بين هذه المتتاليات يتحقق عند هذه الصيغة أيضاً .

أهمية البحث وأهدافه:

تهدف هذه المقالة لإثبات التكافؤ بين المتتاليات (Mann و Ishikawa و Noor) المولدة بتطبيقات تحقق الشرط (7) واستنتاج أن التكافؤ يبقى محققاً عند استخدام التطبيق الّلاتمددي المعمم T بعد وضع شروط محددة على وسطائه .

طرائق البحث ومواده:

تم استخدام نظريات ونتائج معروفة في مجال النقط الثابتة واعتمدت الطريقة التحليلية لإثبات التكافؤ بين المتتاليات المفروضة

تمهيد:

لإثبات التكافؤ بين المتتاليات المذكورة أعلاه سنحتاج للتمهيدية الآتية :

تمهيدية (1): [13] لتكن ρ_n متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث :

$$\rho_{n+1} \le (1-\lambda_n)\rho_n + \sigma_n$$

$0 \le \lambda_n < 1$ ، $\sum \lambda_n = \infty$ ، $\sigma_n = 0(\lambda_n)$ عندئذٍ :

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$$

فيما يلي سنبرهن أن متتالية Noor تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة للتطبيق T وذلك وفقاً للشروط المبينة في النظرية الآتية

نظرية (4) : ليكن X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية من X غير خالية و مغلقة ، محدبة وليكن $T:K\to K$ تطبيقاً يحقق الشرط (7) ولتكن $\{x_n\}$ متتالية Noor بحيث :

$$\sum \alpha_n=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0 \quad \text{و} \quad 0\le \alpha_n<1$$

عندئذٍ $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو النقطة الثابتة لـ T .

البرهان : لتكن $p\in F_T$ سنبرهن أن $\{x_n\}$ متقاربة نحو p

لدينا :

$$\|x_{n+1}-p\|=\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n-(1-\alpha_n+\alpha_n)p\|\le(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n\|Ty_n-p\| \qquad (10)$$

نعوض في (7) y بـ y_n و x بـ p فنجد :

$$\|Ty_n-p\|\le\delta\|y_n-p\ )\| \ . \qquad (11)$$

لكن :

$$\|y_n-p\|=\|(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tz_n-(1-\beta_n+\beta_n)p\|\le$$
$$\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_n\|Tz_n-p\|\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_n\delta\|z_n-p\| \ . \qquad (12)$$

كذلك :

$$\|z_n-p\|=\|(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n Tx_n-(1-\gamma_n+\gamma_n)p\|\le$$
$$\le(1-\gamma_n)\|x_n-p\|+\gamma_n\|Tx_n-p\|\le(1-\gamma_n)\|x_n-p\|+\gamma_n\delta\|x_n-p\| \ . \qquad (13)$$

من (10) ،(11)، (12) ، (13) نجد :

$$\|x_{n+1}-p\|\le\left[1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta(1-\gamma_n(1-\delta)))))\right]\|x_n-p\| \ .$$

لكن :

$$1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta(1-\gamma_n(1-\delta)))))\le 1-\alpha_n(1-\delta)$$

إذاً :

$$\|x_{n+1}-p\|\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\ \|x_n-p\|\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\ [1-\alpha_{n-1}(1-\delta)]\ \|x_{n-1}-p\|\le$$
$$\le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \le\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k(1-\delta)]\ \|x_0-p\|\le e^{-(1-\delta)\sum_k \alpha_k}\|x_0-p\|\to 0$$

ومنه :

$$\|x_n-p\|\to 0 \ \Rightarrow x_n\to p$$

ولإثبات وحدانية النقطة الثابتة نفرض $p_1,p_2\in F_T$ بحيث $P_1\neq P_2$ عندئذٍ :

$$\|Tp_1-Tp_2\|\le\delta\|p_1-p_2\|+L\|P_1-TP_1\|=\delta\|P_1-p_2\|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\|p_1-p_2\|\le\delta\|p_1-p_2\|\Rightarrow(1-\delta)\|p_1-p_2\|\le 0$$

ومنه $\|p_1-p_2\|\le 0$ وهذا تناقض لأن $p_1\neq p_2$

النتائج والمناقشة:

نظرية (6): بفرض X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية من X غير خالية ومغلقة ومحدبة وليكن $T:K\to K$ تطبيقاً يحقق الشرط (7) عندئذٍ من أجل $x_0=u_0\in K$ يتكافأ كل مما يلي :

1- متتالية Mann تتقارب نحو p

2- متتالية Ishikawa تتقارب نحو p

3- متتالية Noor تتقارب نحو p

البرهان :

لتكن $\{u_n\}$ متتالية Mann ولنفرض أنها متقاربة نحو النقطة الثابتة p للتطبيق T أي $\|u_n - p\| \to 0$

سنبرهن أن متتالية Noor $\{x_n\}$ متقاربة نحو p أيضاً .

لدينا :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| = \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n - (1-\alpha_n)u_n - \alpha_n Ty_n\| \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tu_n\| \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|y_n - u_n\| + \alpha_n L\|u_n - Tu_n\| \qquad (14)$$

نحسب $\|y_n - u_n\|$ فنجد :

$$\|y_n - u_n\| \le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - u_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - Tu_n\| + \beta_n\|u_n - Tu_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\delta\|z_n - u_n\| + \beta_n L\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\|u_n - Tu_n\| =$$
$$= (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\delta\|z_n - u_n\| + \beta_n(1+L)\|u_n - Tu_n\| \ . \qquad (15)$$

وكذلك :

$$\|z_n - u_n\| \le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n\|Tx_n - u_n\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n\|Tx_n - Tu_n\| + \gamma_n\|Tu_n - u_n\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n\delta\|x_n - u_n\| + \gamma_n(1+L)\|u_n - Tu_n\| \ . \qquad (16)$$

باستخدام (14) ، (15)،(16) نجد أن :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le \left[1 - \alpha_n(1 - \delta(1 - \beta_n(1 - \delta(1 - \gamma_n(1-\delta)))))\right] \|x_n - u_n\| +$$
$$+ \alpha_n\left[L + \delta\beta_n(1+L)(1+\gamma_n\delta))\right] \|u_n - Tu_n\| \ .$$

بملاحظة أن :

$$\left[1 - \alpha_n(1 - \delta(1 - \beta_n(1 - \delta(1 - \gamma_n(1-\delta))))\right] \le 1 - \alpha_n(1-\delta)$$

وبفرض :

$$\lambda_n = \alpha_n(1-\delta) \quad \text{و} \quad \rho_n = \|x_n - u_n\|$$
$$\sigma_n = \alpha_n\left[L + \delta\beta_n(1+L)(1+\gamma_n\delta))\right] \|u_n - Tu_n\|$$

نحصل على :

$$\rho_{n+1} \le (1-\lambda_n)\rho_n + \sigma_n$$

لكن :

$$\|u_n - Tu_n\| \le \|u_n - p\| + \|p - Tu_n\| \le (1+\delta)\|u_n - p\| \to 0$$

وإضافة إلى ذلك : $\lambda_n \in (0\ ,\ 1)$ $\sum_n \lambda_n = \infty,$, $\sigma_n = 0(\lambda_n)$ ومنه : $\rho_n \to 0$

وبالتالي : $\|x_n - u_n\| \to 0$

ومن ذلك ينتج :

$$\| x_n - p\| \le \| x_n - u_n\| + \| u_n - p \| \to 0$$

بالعكس نفرض أن متتالية Noor متقاربة نحو النقطة الثابتة $p \in F_T$ أي إن :

$\|x_n - p\| \to 0$ ولنبرهن أن: $\| u_n - p\| \to 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n - (1-\alpha_n)u_n - \alpha_n Tu_n\| \le \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tu_n\| \le \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|y_n - u_n\| + \alpha_n L\|y_n - Ty_n\| \ .\end{aligned}$$

لكن :

$$\begin{aligned}\|y_n - u_n\| &= \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n - (1-\beta_n + \beta_n)u_n\| \le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - u_n\| \le \\ &\le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - z_n\| + \beta_n\|z_n - u_n\| \le \\ &\le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - z_n\| + \beta_n\|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n - (1-\gamma_n + \gamma_n)u_n\| \le \\ &\le (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - z_n\| + \beta_n(1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\gamma_n\|Tx_n - u_n\| \le \\ &\le (1-\beta_n\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - z_n\| + \beta_n\gamma_n\|Tx_n - x_n\| + \beta_n\gamma_n\|x_n - u_n\| = \\ &= \|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - z_n\| + \beta_n\gamma_n\|Tx_n - x_n\| \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le [1 - \alpha_n(1-\delta)]\ \|x_n - u_n\| + \alpha_n\beta_n\delta\ \|Tz_n - z_n\| + \\ &+ \alpha_n\beta_n\gamma_n\delta\ \|Tx_n - x_n\| + \alpha_n L\|y_n - Ty_n\| \ . \end{aligned} \tag{17}$$

أيضاً :

$$\| Tx_n - x_n\| \le \| Tx_n - p\| + \| x_n - p\| \le \delta\|x_n - p\| + \|x_n - p\| = (1+\delta)\|x_n - p\| \ .$$

كذلك :

$$\begin{aligned}\|Ty_n - y_n\| &\le \|Ty_n - p\| + \|y_n - p\| \le (1+\delta)\|y_n - p\| \le \\ &\le (1+\delta)\big[(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta\|x_n - p\|\big] = \\ &= (1+\delta)(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p\| \ .\end{aligned}$$

أيضاً :

$$\begin{aligned}\|Tz_n - z_n\| &\le \|Tz_n - p\| + \|z_n - p\| \le (1+\delta)\|z_n - p\| \le (1+\delta)\|z_n - p\| \le \\ &\le (1+\delta)\big[(1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|Tx_n - p\|\big] \le \\ &\le (1+\delta)(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n - p\| \ .\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le (1 - \alpha_n(1-\delta)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\beta_n\delta(1+\delta)(1-\gamma_n(1-\delta))\|\ x_n - p\| + \\ &+ \alpha_n\beta_n\gamma_n\delta(1+\delta)\|\ x_n - p\| + \alpha_n L(1+\delta)(1-\beta_n(1-\delta))\|\ x_n - p\| =\end{aligned}$$

$$= (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n - u_n\| + \alpha_n(1+\delta)\left[\beta_n\gamma_n\delta + \beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta)) + L(1-\beta_n(1-\delta))\right]\|x_n - p\|$$

بفرض :

$$\lambda_n = \alpha_n(1-\delta)$$

و $\sigma_n = \alpha_n(1+\delta)\left[\beta_n\gamma_n\delta + \beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta)) + L(1-\beta_n(1-\delta))\right]\|x_n - p\|$

يكون : $\lambda_n \in (0,1)$, $\sum_n \lambda_n = \infty$ و $\sigma_n = 0(\lambda_n)$

واستناداً إلى التمهيدية (1) ينتج أن: $\|x_n - u_n\| \to 0$

وبالتالي :

$$\| u_n - p\| \le \| u_n - x_n\| + \| x_n - p \| \to 0$$

ومنه : $\|u_n - p\| \to 0$

لإِ ثبات التكافؤ بين Ishikawa و Mann نستفيد مما سبق على النحو :

إذا وضعنا في متتالية Noor $\gamma_n = 0$, $z_n = x_n$ نحصل على متتالية Ishikawa

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n$$
$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n$$

فإذا كانت متتالية $\{u_n\}$ Mann متقاربة نحو p عندئذٍ نجد :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le \left[1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta)))\right] \|x_n - u_n\| +$$
$$+ \alpha_n\left[L + \beta_n\delta(1+L)\right] \|u_n - Tu_n\|$$

واستناداً للتمهيدية (1) نستنتج أن : $\|x_n - u_n\| \to 0$

ومنه :

$$\| x_n - p\| \le \| x_n - u_n\| + \| u_n - p \| \to 0$$

نفرض الآن أن متتالية Ishikawa $\{x_n\}$ متقاربة نحو p .

نستبدل في العلاقة (17) كل z_n بـ x_n ونضع $\gamma_n = 0$ فنجد أن :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le \left[1-\alpha_n(1-\delta)\right] \|x_n - u_n\| + \alpha_n\beta_n\delta\|Tx_n - x_n\| + \alpha_n L\|y_n - Ty_n\| .$$

لكن :

$$\| x_n - Tx_n \| \to 0 \quad , \quad \| y_n - Ty_n \| \to 0 \quad .$$

إ ذ ا وضعنا :

$$\lambda_n = \alpha_n(1-\delta)$$
$$\sigma_n = \alpha_n\beta_n\delta\|x_n - Tx_n\| + \alpha_n L\|y_n - Ty_n\|$$

عندئذٍ

$$\lambda_n \in (0,1) \quad , \quad \sum_n \lambda_n = \infty \quad , \quad \sigma_n = 0(\lambda_n)$$

وحسب التمهيدية (1) نستنتج : $\|x_n - u_n\| \to 0$

ومنه :

$$\| u_n - p\| \le \| u_n - x_n\| + \| x_n - p \| \to 0$$

وبالتالي المتتاليات كافة متكافئة في تقاربها نحو p .

ملاحظة (1) :

عند تعريف التطبيق اللاتمددي المعمم اشترطنا على وسطائه a,b,c أن تحقق مايلي $a+2b+2c \le 1$ فيما يلي سنستفيد مما سبق لإثبات التكافؤ بين المتتاليات السابقة إذا فرضنا $a+2b+2c \prec 1$ علماً أن ذلك سيفرض على الوسطاء أن تحقق الشروط :

$b,c \in [0,\frac{1}{2})$ و $\mathbf{0 \le a < 1}$ ومنه :

نتيجة (1) :

ليكن X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية غيرخالية من X ومحدبة ومغلقة وليكن $T: K \to K$ تطبيق لاتمددي معمم بحيث أن:

$$\|Tx - Ty\| \le b\{ \|x - Tx\| + \|y - Ty\|\} + c\{ \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\}$$

$b,c \in [0,\frac{1}{2})$ و $2b+2c<1$

عندئذٍ المتتاليات (Noor، Ishikawa ،Mann) متكافئة .

البرهان : ليتم المطلوب يكفي أن نبرهن أن التطبيق الجديد يحقق الشرط (7)

$$\|Tx - Ty\| \le b\{ \|x - Tx\| + \|y - Ty\|\} + c\{ \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\}$$

$$\Rightarrow \|Tx - Ty\| \le b\{ \|x - Tx\| + \|y - x\| + \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\| \} +$$

$$+ c\{ \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\| + \|y - x\| + \|x - Tx\| \}$$

$$(1-b-c)\|Tx - Ty\| \le (b+c)\|y - x\| + (2b+2c)\|x - Tx\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|Tx - Ty\| \le \frac{b+c}{1-b-c}\|y - x\| + \frac{2(b+c)}{1-b-c}\|x - Tx\|$$

نفرض: $L = \dfrac{2(b+c)}{1-b-c} \quad , \quad \delta = \dfrac{b+c}{1-b-c}$

لكن $b+c \le 1-b-c$ ومنه $0 \le \delta \prec 1$ $\quad L \ge 0$

$$\Rightarrow \|Tx - Ty\| \le \delta\|x - y\| + L\|x - Tx\|$$

واستناداً للنظرية (6) ينتج أن المتتاليات السابقة المولدة بهذا التطبيق متكافئة .

نتيجة (2) :

ليكن X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية غير خالية من X ومحدبة ومغلقة وليكن $S = S_n : K \to K$ تطبيق معرف كمايلي:

$$\|Sx - Sy\| \le nb\{ \|x - Sx\| + \|y - Sy\| \} + nc\{ \|x - Sy\| + \|y - Sx\| \}$$

مع الشروط : $b,c \in [0,\frac{1}{2n})$, $2nb+2nc \le 1$

عندئذٍ المتتاليات (Mann، Ishikawa، Noor) متكافئة .

البرهان : التطبيق S يحقق الشرط (7) لأن.

$$\|Sx-Sy\|\le nb\{\ \|x-Sx\|+\|y-x\|+\|x-Sx\|+\|Sx-Sy\|\ \}+$$
$$+nc\{\ \|x-Sx\|+\|Sx-Sy\|+\|y-x\|+\|x-Sx\|\ \}$$
$$(1-nb-nc)\|Sx-Sy\|\le(nb+nc)\|y-x\|+2n(b+c)\|x-Sx\|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\|Sx-Sy\|\le\frac{nb+nc}{1-nb-nc}\|y-x\|+\frac{2n(b+c)}{1-nb-nc}\|x-Sx\|$$

بفرض $\delta=\dfrac{nb+nc}{1-nb-nc}\quad,\ L=\dfrac{2n(b+c)}{1-nb-nc}$

من الواضح أن $nb+nc\le 1-nb-nc$ إذاً $L\ge 0$ $0\le\delta\prec 1$ ومنه

$$\|Sx-Sy\|\le\delta\|x-y\|+L\|x-Sx\|$$

وبالتالي (Mann، Ishikawa، Noor) المولدة بالتطبيق $S=S_n:K\to K$ هي متتاليات متكافئة، أضف إلى ذلك فإن التطبيق اللاتمددي المعمم T المقيد بالشروط الواردة بالنتيجة (1)هو حالة خاصة للتطبيق S لأنه من أجل $n=1$ يتطابق S مع T

نتيجة (3) :

ليكن X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية غيرخالية من X ومحدبة ومغلقة وليكن $T:K\to K$ تطبيقاً لاتمددياً معمماً تحقق وسطاؤه مايلي:

$$0\le a<1\quad,\ b,c\in[0,\frac{1}{2})\quad \text{و}\quad a+2b+2c<1$$

عندئذٍ المتتاليات (Mann، Ishikawa، Noor) متكافئة .

البرهان : باسلوب مماثل للنتيجة (1) نجد :

$$\|Tx-Ty\|\le a\|x-y\|+b\{\ \|x-Tx\|+\|y-x\|+\|x-Tx\|+\|Tx-Ty\|\ \}+$$
$$+c\{\ \|x-Tx\|+\|Tx-Ty\|+\|y-x\|+\|x-Tx\|\ \}$$
$$(1-b-c)\|Tx-Ty\|\le(a+b+c)\|y-x\|+(2b+2c)\|x-Tx\|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\|Tx-Ty\|\le\frac{a+b+c}{1-b-c}\|y-x\|+\frac{2(b+c)}{1-b-c}\|x-Tx\|$$

نفرض : $\delta=\dfrac{a+b+c}{1-b-c}\quad,\ L=\dfrac{2(b+c)}{1-b-c}$ ومنه $0\le\delta\prec 1$ و $L\ge 0$

إذاً : $\|Tx-Ty\|\le\delta\|x-y\|+L\|x-Tx\|$

وبالتالي المتتاليات المولدة بهذا التطبيق متكافئة أيضاً.

نتيجة (4):

ليكن X فضاء باناخ و K مجموعة جزئية غير خالية من X ومحدبة ومغلقة وليكن $S=S_{k,n,m}:K\to K$ تطبيقاً معرفاً كما يلي:

$$\|Sx-Sy\|\le ka\|x-y\|+nb\{\ \|x-Sx\|+\|y-Sy\|\ \}+mc\{\ \|x-Sy\|+\|y-Sx\|\ \}$$

مع الشروط :

$$ka+2nb+2mc \le 1 \quad , \quad 0 \le a \prec \frac{1}{k} \quad , \quad b \in [0, \frac{1}{2n}),\ \ c \in [0, \frac{1}{2m})$$

عندئذٍ المتتاليات (Noor، Ishikawa ،Mann) متكافئة .

البرهان : التطبيق الجديد S يحقق الشرط (7) لأن :

$$\|Sx-Sy\| \le ka\|x-y\| + nb\{ \|x-Sx\| + \|y-x\| + \|x-Sx\| + \|Sx-Sy\| \} +$$
$$+ mc\{ \|x-Sx\| + \|Sx-Sy\| + \|y-x\| + \|x-Sx\| \}$$

ومنه :

$$(1-nb-mc)\|Sx-Sy\| \le (ka+nb+mc)\|y-x\| + 2(nb+mc)\|x-Sx\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|Sx-Sy\| \le \frac{ka+nb+mc}{1-nb-mc}\|y-x\| + \frac{2(nb+mc)}{1-nb-mc}\|x-Sx\|$$

نفرض:

$$\delta = \frac{ka+nb+mc}{1-nb-mc} \quad , \ L = \frac{2(nb+mc)}{1-nb-mc}$$

من الواضح أن : $ka+nb+mc \le 1-nb-mc$ ومنه $L \ge 0$ $\quad 0 \le \delta \prec 1$

عندئذٍ : $\|Sx-Sy\| \le \delta\|x-y\| + L\|x-Sx\|$

وبالتالي المتتاليات (Noor، Ishikawa ،Mann) المولدة بالتطبيق $S: K \to K$ حيث $\phi \ne K \subset X$ مغلقة ، محدبة من فضاء باناخ هي متتاليات متكافئة ، أضف إلى ذلك فإن التطبيق

T أعلاه هو حالة خاصة للتطبيق S لأنه من أجل $n=1, m=1 , k=1$ يتطابق S مع T و يمكن بالتالي اعتبار S تطبيقاً محسناً لـ T.

من الجدير بالذكر أن التطبيق اللاتمددي المعمم وبالأشكال التي صيغ فيها كافة يحقق الشرط (8)

ففي النتيجة الرابعة على سبيل المثال نفرض أن $L = \dfrac{nb+mc}{1-nb-mc}$

ومنه $\|Sx-Sy\| \le \delta\|x-y\| + 2L\|x-Sx\|$

لكن $L \le \delta$ إذاً :

$$\|Sx-Sy\| \le \delta\|x-y\| + 2\delta\|x-Sx\|$$

الاستنتاجات والتوصيات:

تم إثبات أن المتتاليات المدروسة أعلاه هي متتاليات متكافئة من أجل صنف معّين من التطبيقات ذات التقليص الضعيف والمعرّفة على مجموعات محددة من فضاءات باناخ وتم استنتاج أن التكافؤ يتحقق أيضاً من أجل تطبيقات أخرى ضعيفة التقليص ومقيدة بشروط مناسبة، ويمكن لاحقاً البحث في إمكانية تكافؤ هذه المتتاليات مع متتاليات أخرى ضمن الشروط المستخدمة ذاتها أو بعد إجراء تعديل مناسب عليها أو على حدود هذه المتتاليات .

المراجع:

1 - KANNNAN, R . *Some results on fixed point* .Bull . Calcutta. Math.Soc.10(1968),71-76

2 - CHATTERJEA, S.K. *Fixed point theorems*.C.R,Acod.Bulgare.sci.25(1972), 727-730

3- ZAMFIRESCU,T. *Fixed point theorems in metric spaces* .Arch .Math. (Basel) _, 23(1972),292-298

4- RHOADES, B, E, *Fixed point iteration using infinit matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. 196(1974),161-176

5- RHOADES, B, E, *Comments on two fixed point iteration methods* Anal, J. Math. Appl. 56(2),1976,741-750

6 - BERINDE .V, *On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive perators* ,Acta.Math .Univ. Comenianae, vol. LXXIII (1) (2004), 119-126*o*

7- BERINDE,V. *A convergence theorem for some mean value fixed point iteration procedures* .Dem. Math.38(1),177-184 (2005)

8 - BOSEDE, A.O. *Some common fixed point theorems in normed linear s paces* , Acta , Univ. Palaki .Olomuc .Fac. rer. nat . Mathematica,49(1)(2010),19-26

9- PARK, J.Y.; JEONG, J.U; *Weak convergence to a fixed point of the sequence of Mann type iterates* , Journal of Math Anal and Appl 184,75-81 (1994).

10- RHOADES, B.E.; OLTUZ, S.M .S. *On the equivalence of Mannand Ishikawa iteration methods* , Ijmms 2003,(7),451-459

11- RAFIQ , A. *On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods with errors* , Math Comm.11 (2006),143-152

12 – TEFAN, S. M.S. *The equivalence between Krasnoselskij , Mann, Ishikawa, Noor and multistep iteration*s ,Math Comm12 (2007),53-61

13- WENG, X. *Fixed point iteration for local strictly pseudo contractive mapping*, proc.Amer.Math.soc.113 ,no.3,(1991),727-731