مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

دراسة استقرار كمي للنقاط السرجية المشروطة

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور محمد علي**
موضي لفته مطر الجشعم***

(تاريخ الإيداع 4 / 3 / 2012. قُبِل للنشر في 17 / 5 /2012)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة مترية للنقاط السرجية المشروطة لدوال محدبة –مقعرة ودوال ليست بالضرورة محدبة– مقعرة دون استخدام شروط الأمثلية، وتعميم بعض النتائج المتعلقة بالنقاط الأصغرية المحلية لدوال محدبة وغير محدبة مستخدمين مفهوم مسافة هاوسدورف فوق البيانية .

الكلمات المفتاحية: فوق البيان، مسائل أمثلية، شرطية، محدبة–مقعرة، نقاط سرجية. مسافة هاوسدورف، الدوال القرينة، الدوال الحدية.

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** أستاذ مساعد– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

On quantitative Stability of conditioning saddle points

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Mohamed Ali**
Modhi Lafta Mutar Aljashaam***

(Received 4 / 3 / 2012. Accepted 17 / 5 /2012)

□ ABSTRACT □

The objective of this research is a metric study of conditional saddle points of convex - concave functions, not necessarily convex - concave without the use of optimization conditions. Dissemination of some of the results related to the minimizer local points for the functions are not necessarily convex using to the concept of epigraphical distance of Hausdorff .

Key words: epigraph, optimization, Conditioning, convex-concave, Saddle points, Hausdorff distance ,Parent functions, marginales functions.

*Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

يشغل التحليل فوق البياني أهمية كبيرة في دراسة مسائل القيم الدنيا $(\min imization\ problems)$ لدوال بمتحول واحد وكما يشغل التحليل تحت البياني أهمية في دراسة مسائل القيم العليا $(\max imization\ problems)$.

ومن ثم ظهر التحليل فوق / تحت – البياني ليشمل كلا التحليلين السابقين ويعالج مسائل القيم الدنيا /العليا $(\min imization\ -\max imization\ problems)$ أو ما يسمى مسائل النقاط السرجية $(saddle\ po\operatorname{int} s)$ لدوال بمتحولين، وهنا تظهر صعوبات أساسية في دراسة مسائل النقاط السرجية وذلك لفقدان التقريب الهندسي المتاح في مسائل القيم الدنيا ومسائل القيم العليا ومن أجل التغلب على هذه الصعوبات كان لابد من العمل على الدوال القرينة المحدبة والدوال القرينة المقعرة وتحويل المسألة إلى مسألتين إحداهما تدخل ضمن التحليل فوق البياني والأخرى تدخل ضمن التحليل تحت البياني . وكما نعلم أنه لا يوجد دوما حلول لمسائل الأمثليات فكان لابد من الاهتمام بمفهوم الحلول المشروطة الذي استخدم ودرس من قبل رياضيين كثر نذكر على سبيل المثال [13, 2] .

في هذا البحث سندرس مسائل النقاط السرجية من وجهة نظر مترية لأن معظم الدراسات المتعلقة بحلول المسائل المثلى كانت تعتمد على مفاهيم تبولوجية وخاصة فيما يتعلق بإيجاد وتقارب الحلول ، فقد عرف أتوش وويتس مسافة تعتمد على الدوال المنظمة (دالة مورو يوشيدا) [3] .وقد تم تعريف مفهوم متري آخر من قبل أتوش وويتس أيضاً سمي بمفهوم مسافة هاوسدورف الموضوعية الذي يعتمد على مفهوم فوق البيان للدالة [2] .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة مترية لاستقرارية النقاط السرجية المشروطة لدوال بمتغيرين ليست بالضرورة محدبة–مقعرة دون استخدام شروط الأمثليات ، ويملك هذا البحث أهمية تطبيقية في مجال البرمجة الخطية .

طرائق البحث وموارده:

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المعتمدة في مجال التحليل فوق/ تحت– البياني واستخدمنا في دراستنا هذه مفهوم مسافة ρ – هاوسدورف – فوق البيانية الذي تبناه العديد من الباحثين في أعمال مختلفة [2,7,8,9] .

1- <u>تعاريف ومفاهيم أساسية :</u>

نبدأ بتذكرة بعض تعاريف ومفاهيم التحليل المحدب [7,8,9] .

ليكن $(X\ ,\ \|.\|)$ فضاءً خطياً منظماً وليكن $(X^*,\|.\|_*)$ فضاءه الثنوي وسنرمز لشكل الثنا الخطية بين عناصر الفضائيين X^* و X بـ $<.,.>$.

لتكن $f: X \to \bar{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\bar{R}$.

- يعرف فوق البيان (*epi–graph*) للدالة f ويرمز له بـ $epi\ f$ بالعلاقة :

$$epi\ f = \{\ (x,\alpha) \in X \times R\ /\ f(x) \le \alpha\ \}$$

• يقال إن الدالة f محدبة إذا كانت $epi\ f$ مجموعة محدبة في $X \times R$ ويقال إن f مقعرة إذا كانت $(-f)$ محدبة .

• يقال إن f دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا كانت $epi\ f$ مجموعة مغلقة وإن f دالة خاصة (proper) إذا كانت $epi\ f$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي :

$$dom f = \{ x \in X \ / \ f(x) < +\infty \} \neq \phi$$

• تعرف الدالة المرافقة $f^* : X^* \to Y^*$ للدالة f بالعلاقة :

$$f^*(x^*) = \sup\{ <x, x^*> - f(x);\ x \in X \}$$

إن الدالة f^* محدبة سواء كانت f محدبة أم لم تكن .

• نرمز بـ $\Gamma(X)$ لمجموعة الدوال المحدبة نصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

• تعرف مجموعة النقاط الأصغرية $\arg\min f$ للدالة f بالشكل التالي:

$$\arg\min f = \{ \bar{x} \in X : f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x) \}$$

• يقال عن x_f إنها نقطة أصغرية محلية للدالة f إذا تحقق الشرط التالي :

$$f(x) \geq f(x_f) \qquad , \qquad \forall x \in B(x_f, \rho) \qquad (1)$$

حيث $B(x_f, \rho)$ هي الكرة المغلقة التي مركزها x_f ونصف قطرها ρ .

• يقال عن $\varphi : R^+ \longrightarrow \overline{R}^+$ إنها دالة شرطية إذا تحقق الشرط التالي :

$$\varphi(t_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow t_n \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

• يقال عن x_f إنها φ – نقطة أصغرية محلية إذا وجد φ دالة شرطية و $\rho > 0$ بحيث:

$$f(x) \geq f(x_f) + \varphi(\|x - x_f\|) \qquad \forall x \in B(x_f, \rho) \qquad (3)$$

• يقال عن النقطة x_f إنها نقطة عظمى محلية للدالة f إذا تحقق الشرط التالي :

$$f(x) \leq f(x_f) \qquad \forall x \in B(x_f, \rho) \qquad (4)$$

• يقال عن x_f إنها φ – نقطة عظمى محلية للدالة f إذا تحقق الشرط التالي :

$$f(x) \leq f(x_f) - \varphi(\|x - x_f\|) \qquad \forall x \in B(x_f, \rho) \qquad (5)$$

• من أجل الدالة $f : X \longrightarrow \overline{R}$ يرمز لدالة تقريب يوشيدا بالرمز f_λ حيث $\lambda > 0$ وتعرف بالعلاقة التالية :

$$f_\lambda(x) = \inf_{u \in X} \left\{ f(u) + \frac{1}{p\lambda} \|x - u\|^p \right\}$$

من أجل $p = 2$ ، تدعى f_λ دالة مورويوشيدا .

ومن أجل $p = 1$ ، تدعى f_λ دالة وايزمين ويرمز لها بالرمز $f_{[\lambda]}(x)$ أي أن :

$$f_{[\lambda]}(x) = \inf_{u \in X} \left\{ f(u) + \frac{1}{\lambda} \|x - u\| \right\}$$

• **مفهوم تقارب كوراتوفسكي :**

لتكن $\{C_n, C; n \in N\}$ متتالية من المجموعات الجزئية في X ، يقال إن $(C_n)_{n\in N}$ تتقارب من C وفق مفهوم كوراتوفسكي ونرمز لذلك بالرمز $C_n \xrightarrow{K} C$ إذا كان :

$$\tau-\lim_n \sup C_n \subseteq C \subseteq \tau-\lim_n \inf C_n$$

حيث :

$$\tau-\lim_n \inf C_n := \left\{x \in X \ : \exists (x_n)_{n\in N}; x_n \in C_n; x_n \xrightarrow[n]{\tau} x\right\}$$

$$\tau-\lim_n \sup C_n := \left\{x \in X \ : \exists (n_k)_{k\in N}; \exists (x_k)_{k\in N}, \forall k \in N; x_k \in C_{n_k}; x_k \xrightarrow[k]{\tau} x\right\}$$

• **مفهوم التقارب فوق البيان :** يقال عن المتتالية $(f_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة وفق مفهوم فوق البيان نحو f ونرمز لذلك بالرمز $f_n \xrightarrow[n]{epi} f$ إذا وفقط إذا كانت متتالية المجموعات $(epif_n)_{n\in N}$ متقاربة وفق مفهوم كوراتوفسكي نحو المجموعة $epif$ أي إذا كان :

$$epif_n \xrightarrow{k} epif$$

لتكن $L : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ دالة معرفة على $X \times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

• يقال عن الدالة L إنها محدبة – مقعرة إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني .

• تعرف الدالة الحدية العليا M $(upper\ marginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$M(x) = \sup_{y\in Y} L(x,y) \quad ; M : X \longrightarrow \overline{R} \tag{6}$$

• تعرف الدالة الحدية الدنيا m $(lower\ maginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$m(y) = \inf_{x\in X} L(x,y) \quad ; m : Y \longrightarrow \overline{R} \tag{7}$$

• يقال بأن النقطة $(\overline{x}, \overline{y})$ نقطة سرجية (saddle point) للدالة L إذا حققت الشرط التالي :

$$L(\overline{x}, y) \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

وهو مكافئ للشرط :

$$M(\overline{x}) \le m(\overline{y}) \tag{8}$$

• تعرف مجموعة النقاط السرجية $(\arg\min\max L)$ للدالة L بالعلاقة :

$$\arg\min\max L = \left\{(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y : L(\overline{x}, y) \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}) \quad \forall (x,y) \in X \times Y\right\} \tag{9}$$

• تعرف الدالة القرينة المحدبة $(parent\ convex)$ F للدالة L بالعلاقة :

$$F : X \times Y^* \longrightarrow \overline{R}$$

$$F(x,y^*) = \sup_{y\in Y}\{L(x,y) + < y, y^* >\} \qquad (10)$$

- تعرف الدالة القرينة المقعرة ($parent\ concave$) G للدالة L حيث بالعلاقة :

$$G : X^* \times Y \longrightarrow \overline{R}$$

$$G(x^*, y) = \inf_{x\in X}\{L(x,y) - < x, x^* >\} \qquad (11)$$

- يقال عن الدالة L إنها مغلقة إذا كان $F^* = -G\ ,\ F = -G^*$ حيث $G^*\ ,\ F^*$ هما الدالتان المرافقتان للدالتين G, F على الترتيب .
- يقال عن (x_L, y_L) إنها $\varphi-$ نقطة سرجية شرطية للدالة L بالنسبة إلى المتحول الأول إذا تحقق الشرط :

$$L(x, y_L) - \varphi(\|x - x_L\|) \geq L(x_L, y_L) \geq L(x_L, y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in B_\rho(x_L, y_L) \qquad (12)$$

يقال عن (x_L, y_L) إنها $\psi-$ نقطة سرجية شرطية للدالة L بالنسبة إلى المتحول الثاني إذا تحقق الشرط:

$$L(x, y_L) \geq L(x_L, y_L) \geq L(x_L, y) + \psi(\|y - y_L\|) \quad ; \forall (x,y) \in B_\rho(x_L, y_L) \qquad (13)$$

يقال عن (x_L, y_L) إنها $(\psi,\varphi)-$ نقطة سرجية شرطية للدالة L إذا تحقق الشرط :

$$L(x, y_L) - \varphi(\|x - x_L\|) \geq L(x_L, y_L) \geq L(x_L, y) + \psi(\|y - y_L\|) \quad ; \quad \forall (x,y) \in B_\rho(x_L, y_L) \qquad (14)$$

مسافة $\rho-$ هاوسدورف : (مسافة $\rho-$ هاوسدورف على X) [8,2] :

لتكن d دالة المسافة المولدة بالنظيم $\|.\|$ المعرف على X . من أجل كل مجموعة جزئية C في X تعرف المسافة بين العنصر x وبين المجموعة C بالعلاقة :

$$d(x,C) := Inf\{\|x - y\|, y \in C\} \quad ، \quad (\text{إذا كانت } C = \phi \text{ ، تكون } d(x,C) = \infty)$$

من أجل كل $\rho \geq 0$ ، نرمز بـρB للكرة المغلقة في X التي مركزها الصفر ونصف قطرها ρ ، ولكل C في X نعرف :

$$C_\rho := C \cap \rho B$$

من أجل أي مجموعتين C و D في X ، يعرف مدى (تجاوز) هاوسدورف ($Lexce\ Haussdorof$) لـ C على D بالعلاقة :

$$e(C,D) := \sup\{d(x,D); x \in C\} \quad ، \quad (\text{باعتبار } e = 0 \text{ إذا كانت } C = \phi)$$

- تعرف $\rho-$ مسافة هاوسدورف بين المجموعتين C و D بالعلاقة :

$$haus_\rho(D,C) = Sup\{e(C_\rho, D), e(D_\rho, C)\}$$

- يقال عن متتالية من المجموعات $(D_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المجموعة D في X بالنسبة لمسافة $\rho-$ هاوسدورف إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} haus_\rho(D_n, D) = 0\ ,\ \forall \rho \geq 0$$

مسافة $\rho-$ هاوسدورف على $\overline{R}^x$:

تعرف مسافة $\rho-$ هاوسدورف بين الدالتين f و g من $\overline{R}^x$ بالعلاقة :

$$h_\rho(f,g) := haus_\rho(epif, epig); \quad \forall \rho \geq 0 \qquad (15)$$

حيث $epif$ ، $epig$مجموعتان جزئيتان في $X \times R$ ويعرف ρB في$X \times R$ بالعلاقة :

$$\rho B_{X\times R}=\{(x,\alpha)\in X\times R:\|x\|\le\rho;|\alpha|\le\rho\}$$

• يقال عن متتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة f في $\overline{R}^X$ بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} h_\rho(f_n,f)=0 \;\; ; \;\; \forall\rho\ge 0$

سمي هذا المفهوم بمسافة ρ – فوق البياني وتبناه العديد من الرياضيين في دراسات مختلفة ونذكر منهم [2,3,7,8 ,9 ,16] .

<u>مبرهنة 1.1</u> [8] :

لتكن $f_i\in\Gamma(X)$ و $(i=1,2)$ عندئذ من أجل كل $\rho\ge 0$ لدينا :

$$\beta(\rho)h_\rho(f_1,f_2)\le h_\rho(f_1^*,f_2^*)\le\alpha(\rho)h_\rho(f_1,f_2)$$

حيث كل من $\alpha(\rho)$ و $\beta(\rho)$ ثابت يتعلق بـ ρ .

والمبرهنة صحيحة من أجل دوال مقعرة ونصف مستمرة من الأعلى وخاصة باعتبار إنه إذا كانت f_i دالة مقعرة فإن $(-f_i)$ تكون دالة محدبة .

مسافة ρ – هاوسدورف على $\overline{R}^{X\times Y}$ [2,16] :

ت(16) $$H_\rho(L,K):=h_\rho(F_L,F_K)$$

عرف ρ – مسافة هاوسدورف بين الدالتين L,K من $\overline{R}^{X\times Y}$ بالعلاقة :

حيث F_L و F_K هما الدالتان القرينتان المحدبتان للدالتين L و K على الترتيب .

وكان لهذه المسافة أهمية كبرى في دراسة استقرارية النقاط السرجية للدوال المحدبة– المقعرة .

ويقال عن متتالية من الدوال $(L_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة L في $\overline{R}^{X\times Y}$ بالنسبة لمسافة ρ – هاوسدورف إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_\rho(L_n,L)=0 \quad ; \quad \forall\rho\ge 0$

ولقد كان لاستخدام الدوال الحدية العليا والدنيا في حل بعض مسائل النقاط السرجية أهمية في إعطاء تعريف آخر لمسافة ρ – هاوسدورف H_ρ على صفوف دوال ليست بالضرورة محدبة– مقعرة بالعلاقة الآتية :

$$\tilde{H}_\rho(L,K)=h_\rho(M_1,M_2)+h_\rho(m_1,m_2) \tag{17}$$

حيث $M_1,M_2\,(m_2,m_1)$ هي الدوال الحدية العليا (الدنيا) لكل من L و K على الترتيب .

وفي هذه الحالة تكون المتتالية $(L_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو الدالة L إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\tilde{H}_\rho(L_n,L)=0 \quad ; \quad \forall\rho\ge 0$$

النتائج والمناقشة:

حالة الدوال المحدبة – المقعرة :

<u>مبرهنة 2.1 :</u>

لتكن $L,K:X\times Y\longrightarrow\overline{R}$ دالتين محدبتين – مقعرتين مغلقتين ولتكن F_L,F_K الدالتين المحدبتين القرينتين للدالتين L و K على الترتيب. ولتكن φ (x_L,y_L) – نقطة سرجية شرطية بالنسبة إلى المتحول الأول أي إن :

$$L(x,y_L)-\varphi(\|x-x_L\|)\geq L(x_L,y_L)\geq L(x_L,y) \quad ; \quad \forall(x,y)\in B_\rho(x_L,y_L)$$

ولتكن (x_K,y_K) نقطة سرجية للدالة K أي إن :

$$K(x,y_K)\geq K(x_K,y_K)\geq K(x_K,y) \quad ; \quad \forall(x,y)\in X\times Y$$

عندئذ من أجل كل :

$$\rho\geq 3\sup\{\|x_L-x_K\|,|F_L(.,0)-F_K(.,0)|\}$$

يكون :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L-x_K\|)\leq 4h_\rho(F_L(.,0),F_K(.,0))$$

البرهان :

حسب تعريف الدالة القرينة المحدبة F_L المعرفة بالعلاقة :

$$F_L:X\times Y^*\longrightarrow\overline{R}$$

$$F_L(x,y^*)=\sup_{y\in Y}\{L(x,y)+<y,y^*>\}$$

ومنه :

$$F_L(x,0)=\sup_{y\in Y}L(x,y)\geq L(x,y_L)$$

ومن أجل كل $x\in B_\rho(x_L)$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}F_L(x,0)&\geq L(x_L,y_L)+\varphi(\|x-x_L\|)\\&\geq F_L(x_L,0)+\varphi(\|x-x_L\|)\end{aligned} \tag{18}$$

من جهة أخرى ، حسب تعريف الدالة القرينة المحدبة F_K لدينا :

$$\begin{aligned}F_K(x,0)&=\sup_{y\in Y}K(x,y)\\&=K(x,y_K)\geq K(x_K,y_K) \qquad \forall x\in B_\rho(x_K)\end{aligned}$$

ومنه :

$$F_K(x,0)\geq F_K(x_K,0) \tag{19}$$

وبتطبيق النظرية 4.1 لـ أتوش وويتس في [2] نحصل على :

$\varphi_{[1]}(\|x_L-x_K\|)\leq 4h_\rho(F_L(.,0),F_K(.,0))$. وهو المطلوب . ■

مبرهنة 2.2 :

لتكن $L,K:X\times Y\longrightarrow\overline{R}$ دالتين محدبتين – مقعرتين مغلقتين ولتكن F_K,F_L الدالتين المحدبتين القرينتين للدالتين L و K على الترتيب. ولتكن (x_L,y_L) ψ – نقطة سرجية شرطية بالنسبة إلى المتحول الثاني أي أن :

$$L(x,y_L)\geq L(x_L,y_L)\geq L(x_L,y)+\psi(\|y-y_L\|) \qquad \forall(x,y)\in B_\rho(x_L,y_L)$$

ولتكن (x_K,y_K) نقطة سرجية للدالة K أي إن :

$$K(x,y_K)\geq K(x_K,y_K)\geq K(x_K,y) \quad ; \quad \forall(x,y)\in X\times Y$$

عندئذ من أجل $\rho \geq 3\sup\{\|y_L, y_K\|, |F_L^*(0,.), F_K^*(0,.)|\}$

يكون لدينا : $\psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) \leq 4h_\rho(F_L^*(0,.), F_K^*(0,.))$

البرهان :

حسب تعريف الدالة القرينة المقعرة G_L المعرفة في (11) ، لدينا:

$$G_L(0, y) = \inf_{x \in X} L(x, y) \leq L(x_L, y)$$

ومن أجل كل $y \in B_\rho(y_L)$ يكون لدينا :

$$G_L(0, y) \leq L(x_L, y_L) - \psi(\|y - y_L\|)$$

$$G_L(0, y) \leq L(0, y_L) - \psi(\|y - y_L\|) \tag{20}$$

ومنه :

$$-G_L(0, y) \geq -G_L(0, y_L) + \psi(\|y - y_L\|) \tag{21}$$

وبما إن الدالة L دالة محدبة – مقعرة ومغلقة فإن :

$$G = -F^* \tag{22}$$

بتعويض (22) في العلاقة (21) نحصل على :

$$F_L^*(0, y) \geq F_L^*(0, y_L) + \psi(\|y - y_L\|) \qquad \forall y \in B_\rho(y_L) \tag{23}$$

ومن جهة أخرى :

$$G_K(x^*, y) = \inf_{x \in X} \{K(x, y) - \langle x, x^* \rangle\}$$

$$G_K(0, y) = \inf_{x \in X} K(x, y) \leq K(x_K, y) \leq K(x_K, y_K)$$

$$G_K(0, y) \leq G_K(0, y_K) \tag{24}$$

ومنه :

$$-G_K(0, y) \geq -G_K(0, y_K) \tag{25}$$

بتعويض (22) في العلاقة (25) نحصل على :

$$F_K^*(0, y) \geq F_K^*(0, y_K) \tag{26}$$

وبتطبيق النظرية 4.1 لـ أتوش وويتس في [2] نحصل على :

$\psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) \leq 4h_\rho(F_L^*(0,.), F_K^*(0,.))$.وهو المطلوب . ■

مبرهنة 2.3 :

لتكن $L, K : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ دالتين محدبتين – مقعرتين مغلقتين، ولتكن F_K, F_L الدالتين المحدبتين القرينتين للدالتين L و K على الترتيب. ولتكن (ψ, φ) (x_L, y_L) – نقطة سرجية شرطية للدالة L أي إن:

$$L(x, y_L) - \varphi(\|x - x_L\|) \geq L(x_L, y_L) \geq L(x_L, y) + \psi(\|y - y_L\|) \,;\, \forall (x, y) \in B_\rho(x_L, y_L)$$

ولتكن (x_K, y_K) نقطة سرجية للدالة K أي إن :

$$K(x, y_K) \geq K(x_K, y_K) \geq K(x_K, y) \qquad ; \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

عندئذ من أجل كل :

$$\rho_1 \geq 3\sup\left\{\|x_L - x_K\|, \left|F_L(.,0) - F_K(.,0)\right|\right\}$$

$$\rho_2 \geq 3\sup\left\{\|y_L - y_K\|, \left|F_L^*(0,.) - F_K^*(0,.)\right|\right\}$$

يكون لدينا :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L - x_K\|) \leq 4h_{\rho_1}(F_L(.,0), F_K(.,0)) \qquad (27)$$

$$\psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) \leq 4h_{\rho_2}(F_L^*(.,0), F_K^*(.,0)) \qquad (28)$$

<u>**البرهان :**</u>

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة 2.1 و المبرهنة 2.2 السابقتين . وهو المطلوب. ■

<u>**مبرهنة 2.4 :**</u>

إضافة لشروط المبرهنة 2.3 ، لنفرض وجود $\gamma \geq 0$ و $\sigma \geq 0$ بحيث يكون

$$(\sigma B_{X\times Y^*})^2 \subset [F_L \leq \gamma]_\gamma - \{y^* = 0\}_\gamma \qquad (29)$$

حيث : $[F_L \leq \gamma]_\gamma = \left\{(x, y^*) \in X \times Y^* : F_L(x, y^*) \leq \gamma\right\} \cap \gamma B$

عندئذ من أجل كل $\rho \geq 2\gamma + \sigma$ لدينا :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L - x_K\|) \leq 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K)$$

$$\psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) \leq 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*, F_K^*)$$

$$C_1(\rho_1) = \frac{2\gamma + \sigma + \rho_1}{\sigma}\ ,\quad C_2(\rho_2) = \frac{2\gamma + \sigma + \rho_2}{\sigma} \qquad (29)_1$$

حيث ρ_1 ، ρ_2 ثوابت تتعلق بـ ρ و σ

<u>**البرهان:**</u> من تعريف الدوال القرينة والدوال الحدية نستطيع أن نكتب :

$$F(x,0) = (F + \delta_D)(x, y^*) \qquad (30)$$

$$G(0,y) = (G + \delta_{D^*})(x^*, y) \qquad (31)$$

حيث $D = \left\{(x, y^*) \in X \times Y^* : y^* = 0\right\},\ D^* = \left\{(x^*, y) \in X^* \times Y : x^* = 0\right\}$

δ_C تدل على الدالة المشيرة للمجموعة C ($\delta_C = 0$ عندما $x \in C$ و $\delta_C = +\infty$ عندما $x \notin C$)

وبالتالي حسب (29) وتطبيق المبرهنة (3.9) في[7] نحصل على :

$$h_\rho(F_L + \delta_D, F_K + \delta_{D^*}) \leq C_1(\rho_1)(h_{\rho_1}(F_L, F_K) + h_{\rho_1}(\delta_D, \delta_D))$$

وبما أن $h_{\rho_1}(\delta_D, \delta_D) = 0$ فإن :

$$h_\rho(F_L + \delta_D, F_K + \delta_{D^*}) \leq C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K)$$

ومنه حسب (30) :

$$h_\rho(F_L(.,0), F_K(.,0)) \leq C_1(\rho_1)haus_{\rho_1}(F_L, F_K) \qquad (32)$$

وبنفس الطريقة يتم برهان أن

$$h_\rho(F_L^*(0,.), F_K^*(0,.)) \leq C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*, F_K^*) \qquad (33)$$

بالتعويض في (27) و (28) نحصل على :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L - x_K\|) \le 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K)$$
(34)
$$\psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) \le 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*, F_K^*)$$

حيث $C_1(\rho_1)$, $C_2(\rho_2)$ ثوابت معرفة في $(29)_1$ وهو المطلوب . ■

<u>مبرهنة 2.5 :</u>

بفرض ψ, φ دالتان محدبتان ومستمرتان وتحققان العلاقتين التاليتين :

$$\psi_+^/(\|y_L - y_K\|) \le 1 \quad , \quad \varphi_+^/(\|x_L - x_K\|) \le 1 \qquad (35)$$

حيث $\psi_+^/$, $\varphi_+^/$ المشتقتان من اليمين للدالتين ψ, φ على الترتيب ، ولنفرض أن F_K, F_L يحققان شروط المبرهنة (4 .2) عندئذ نحصل :

$$\|(x_L, y_L) - (x_K, y_K)\| \le (\varphi^{-1} \vee \psi^{-1}) 4C(\rho) H_\rho(L, K)$$

حيث : $C(\rho) = \max\{C_1(\rho_1), C_2(\rho_2)\}$ ، $\rho \ge \max\{\rho_1, \rho_2\}$

<u>البرهان :</u>

حسب الفرض (35) وبتطبيق نتيجة هيرياتي – أريوتي في [14] على الدوال المحدبة المستمرة ψ, φ نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{[1]}(\|x_L - x_K\|) &= \varphi(\|x_L - x_K\|) \\ \psi_{[1]}(\|y_L - y_K\|) &= \psi(\|y_L - y_K\|) \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

بتعويض (36) في (34) نحصل على :

$$\varphi(\|x_L - x_K\|) \le 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K) \qquad (37)$$

$$\psi(\|y_L - y_K\|) \le 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*, F_K^*) \qquad (38)$$

ومنه :

$$(\|x_L - x_K\|) \le \varphi^{-1} 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K)$$
$$(\|y_L - y_K\|) \le \psi^{-1} 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*, F_K^*)$$

حسب المبرهنة (1.1) نحصل على:

$$(\|x_L - x_K\|) \le \varphi^{-1} 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L, F_K) \qquad (39)$$

ا

$$(\|y_L - y_K\|) \le \psi^{-1} 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L, F_K) \qquad (40)$$

لآن نأخذ

$$\rho \ge \max\{\rho_1, \rho_2\} \ ، \ C(\rho) = \max\{C_1(\rho_1), C_2(\rho_2)\} \ ، \ \beta^{-1} = \varphi^{-1} \vee \psi^{-1}$$

وبجمع العلاقتين (39) و (40) نحصل على :

$\|(x_L, y_L) - (x_K, y_K)\| \le 2\beta^{-1}(4C(\rho)H_\rho(F_L, F_K))$. وهو المطلوب . ■

حالة خاصة :

1)إذا كانت الدالتان الشرطيتان ψ,φ معطاتين بالعلاقتين :

$$\psi(r)=\alpha_2 r \quad , \quad \varphi(r)=\alpha_1 r$$

حيث $\alpha_{2,}\ \alpha_1$ ثابتان حقيقيان موجبان ، يقال إن الدالة L مشروطة مخروطياً .

2) إذا كانت الدالتان الشرطيتان ψ,φ معطاتين بالعلاقتين :

$$\psi(r)=\alpha_2 r^2 \quad , \quad \varphi(r)=\alpha_1 r^2$$

يقال إن الدالة L مشروطة تربيعياً .

نتيجة 2.6 :

1) إذا كانت الدالة L في المبرهنة (2.5) مشروطة مخروطياً فإن :

$$\|(x_L,y_L)-(x_K,y_K)\|\le \frac{8}{\alpha}\,C(\rho)\,H_\rho(L,K)$$

$$\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$$

2) إذا كانت الدالة L في المبرهنة (2.5) مشروطة تربيعياً فإن :

$$\|(x_L,y_L)-(x_K,y_K)\|\le \frac{4}{\sqrt{\alpha}}(C(\rho)\,H_\rho(L,K))^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$

البرهان :

1) بما أن $\varphi(r)=\alpha_1 r \quad , \quad \psi(r)=\alpha_2 r$ فإنه حسب العلاقتين (37) و (38) يكون لدينا :

$$\alpha_1(\|x_L-x_K\|)\le 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L,F_K)$$

$$\alpha_2(\|y_L-y_K\|)\le 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*,F_K^*)$$

وبطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة (2.5) نحصل على :

$$\|(x_L,y_L)-(x_K,y_K)\|\le \frac{8}{\alpha}\,C(\rho)\,H_\rho(L,K)$$

$$\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$$

2) لدينا حسب الفرض $\varphi(r)=\alpha_1 r^2 \quad , \quad \psi(r)=\alpha_2 r^2$

وباستخدام العلاقتين (37) و (38) نحصل على :

$$\alpha_1(\|x_L-x_K\|)^2\le 4C_1(\rho_1)h_{\rho_1}(F_L,F_K)$$

$$\alpha_2(\|y_L-y_K\|)^2\le 4C_2(\rho_2)h_{\rho_2}(F_L^*,F_K^*)$$

وبطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة (2.5) نحصل على :

$$\|(x_L,y_L)-(x_K,y_K)\|\le \frac{4}{\sqrt{\alpha}}\,(C(\rho)\,H_\rho(L,K))^{\frac{1}{2}}$$ وهو المطلوب . ■

حالة الدوال غير المحدبة – المقعرة :

بفرض $L:X\times Y\longrightarrow \overline{R}$ دالة معرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

نعرف الدوال الحدية المحلية العليا والدنيا للدالة L بالعلاقتين :

$$\left.\begin{aligned} M_\rho^L(x) &= \sup_{y\in B_Y(\rho)} L(x,y) \\ m_\rho^L(y) &= \inf_{x\in B_X(\rho)} L(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

حيث : $B_Y(\rho)=\{y\in Y/\|y\|\le\rho\}$, $B_X(\rho)=\{x\in X/\|x\|\ge\rho\}$.

<u>مبرهنة 2.7 :</u>

لتكن $L,K:X\times Y\longrightarrow\overline{R}$ دالتين معرفتين على $X\times Y$ وتأخذان قيمتهما في $\overline{R}$ ، ولتكن M_ρ^K ، M_ρ^L $(m_\rho^L$ ، $m_\rho^K)$ الدوال الحدية المحلية العليا (الدنيا) على الترتيب للدالتين L,K ، ولتكن φ,ψ دالتان شرطيتان ، وبفرض (x_L,y_L) $(\varphi,\psi)-$ نقطة محلية للدالة L و (x_K,y_K) نقطة محلية للدالة K عندئذ من أجل كل :

$$\rho\ge 3\sup\{\|x_L-x_K\|,\|y_L-y_K\|,|M_\rho^L(x_L)-M_\rho^K(x_K)|,|m_\rho^L(y_L)-m_\rho^K(y_K)|\}$$

لدينا :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L-x_K\|)\le 4h_{\rho_1}(M_\rho^L,M_\rho^K)$$
$$\psi_{[1]}(\|y_L-y_K\|)\le 4h_{\rho_2}(m_\rho^L,m_\rho^K)$$

زيادة على ذلك إذا كانت φ,ψ دالتين محدبتين ومستمرتين ومشتقتيهما من اليمين تحققان العلاقتين :

$$\psi'_+(\|y_L-y_K\|)\le 1 \quad , \quad \varphi'_+(\|x_L-x_K\|)\le 1$$

فإن :

$$\|(x_L,y_L)-(x_K,y_K)\|\le\beta^{-1}(4\tilde{H}_\rho(L,K))$$

حيث :

$$\beta^{-1}=\sup\{\varphi^{-1},\psi^{-1}\}$$
$$\tilde{H}_\rho(L,K)=h_\rho(M_\rho^L,M_\rho^K)+h_\rho(m_\rho^L,m_\rho^K)$$

<u>البرهان :</u>

حسب تعريف الدالة الحدية المحلية العليا في (41) لدينا :

$$M_\rho^L(x)=\sup_{y\in B_\rho(y_L)} L(x,y)\ge L(x,y_L)$$

بما أن (x_L,y_L) هي $(\varphi,\psi)-$ نقطة محلية للدالة L ، فإن من أجل كل $x\in B_\rho(x_L)$ يكون :

$$\begin{aligned} M_\rho^L(x) &\ge L(x_L,y_L)+\varphi(\|x-x_L\|) \\ &\ge M_\rho^L(x_L)+\varphi(\|x-x_L\|) \end{aligned} \qquad (42)$$

وبما أن (x_K,y_K) نقطة محلية للدالة K إذن :

$$M_\rho^K(x)\ge M_\rho^K(x_K) \qquad (43)$$

وإذن بتطبيق نظرية أتوش وويتس (4.1) في [2] للعلاقتين (42) و (43) نحصل على :

$$\varphi_{[1]}(\|x_L-x_K\|)\le 4h_{\rho_1}(M_\rho^L,M_\rho^K)$$

بطريقة مشابهة نتحقق من صحة العلاقة :

$$\psi_{[1]}(\|y_L-y_K\|)\le 4h_\rho(m_\rho^L,m_\rho^K)$$

من جهة أخرى وبتطبيق نتيجة هيرياتي – أريوتي في [14] للدالتان ψ,φ وبالتعويض في العلاقات السابقة نحصل على :

$$\varphi(\|x_L - x_K\|) \le 4h_\rho(M_\rho^L, M_\rho^K)$$
$$\psi(\|y_L - y_K\|) \le 4h_\rho(m_\rho^L, m_\rho^K)$$

ومنه :

$$\|(x_L, y_L) - (x_K, y_K)\| \le \beta^{-1}(4(h_\rho(M_\rho^L, M_\rho^K) + h_\rho(m_\rho^L, m_\rho^K))$$
$$\le \beta^{-1}(4\tilde{H}_\rho(L,K)$$

وهو المطلوب . ■

مبرهنة 2.8 :

لتكن $\{L_n, L, n \in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة والمغلقة وتحقق شروطاً مبرهنة (2.5) ، ولتكن (x_n, y_n) $(\psi,\varphi)-$ نقطة سرجية شرطية للدالة L_n لكل $n \in N$ ولتكن (x,y) نقطة سرجية للدالة L فإذا كانت L_n تتقارب من L وفق مفهوم هاوسدورف للتقارب و β^{-1} خطية ومستمرة فإن :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n]{} (x,y)$$

البرهان :

بما أن (x_n, y_n) هي $(\psi,\varphi)-$ نقطة سرجية شرطية للدالة L_n لكل $n \in N$ وبما أن (x,y) هي نقطة سرجية للدالة L فإنه حسب المبرهنة (2.5) يكون لدينا لكل $n \in N$ العلاقة الآتية :

$$\|(x_n, y_n) - (x\ ,y\ )\| \le 8\beta^{-1}(C(\rho)H_\rho(L_n, L))$$

بأخذ (lim) للطرفين عندما $n \longrightarrow \infty$ فنحصل على :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_n, y_n) - (x\ ,y\ )\| \le \lim_{n\longrightarrow\infty} [8\beta^{-1}(C(\rho)H_\rho(L_n, L))]$$

وبما أن β^{-1} دالة خطية ومستمرة ، وحسب الفرض $\lim_{n\longrightarrow\infty} H_\rho(L_n, L) = 0$ فإنه ينتج :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_n, y_n) - (x\ ,y\ )\| = 0$$

وهذا يعني أن (x_n, y_n) تتقارب بقوة من (x,y) وهو المطلوب. ■

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد كان للدوال القرينة المحدبة والمقعرة أهمية في دراسة مسائل النقاط السرجية من وجهة نظر تبولوجية. إن الدراسة المترية لا تقل أهمية عن الدراسة التبولوجية وتبين المبرهنات السابقة أهمية هذه الدوال في دراسة النقاط السرجية واستقرارها من وجهة نظر مترية .حيث بينت المبرهنة (2.8) إنه إذا كانت متتالية من الدوال المحدبة المقعرة متقاربة بالنسبة لمسافة $\rho-$ هاوسدورف فإن متتالية النقاط السرجية الموافقة تتقارب بقوة ،وكان للدوال الحدية العليا والدنيا أهمية أيضاً في دراسة الحالة غير محدبة – مقعرة . والسؤال الذي يمكن طرحه ما هي العلاقة بين الدوال الحدية العليا (الدنيا) والدوال القرينة المحدبة (المقعرة) ؟ بمعنى آخر إذا كانت متتالية الدوال الحدية العليا ومتتالية

الدوال الحدية الدنيا متقاربة بالنسبة لمسافة ρ − هاوسدورف فما هو الشرط الذي يجب أن تحققه متتالية الدوال القرنية المحدبة والمقعرة حتى تكون متقاربة.

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. : Variational convergence for functions and operators, Pitman, London, 1984.

[2] ATTOUCH, H; WETS,R.: Quantitative stability of varational system: I The epigrphical distance. Tran. Amer. Soc. N° 2, 1991, 695-729.

[3] ATTOUCH, H; WETS,R.: Isometries for the Legendre-Fenchel transform. Tran. Amer. Soc. 296, 1989, 33-60.

[4] ATTOUCH, H; WETS,R.: Epigraphic analysais, analyse non linéaire, Gauthiers-Villars, paris, (1989), 73-100.

[5] ATTOUCH, H; WETS,R.: Convergence Theory of saddle functions, Trans. Amaer. Math.Soc. 280, n (1), 1983, 1-14.

[6] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.: Convergence of convex-concave saddle functions, Ann. H. Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[7] D.Aze and J.B.Penot : Operation on convergence families of sets and functions. A.V.M.A.C. 1987,Vol. 1, 08-.

[8] BEER, G.: Conjugate convex function, and the epi-distance topology, Proc. Amer. Soc. 108, 1991, 117-126.

[9] BEER, G.; LUCCHETTI, R: Coninuity results for the epi-distance topology with applications to convex optimization problems, (preprint).

[10] EKLEND,I. ; TEMMAM, R.: Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, 1974.

[11] HIRIART-URRUTY, J.B: Lipschitz r-continuity of the approximate subdifferential of a convex function .Math. Scand. 47,123-134,(1980).

[12] GUILLERME , J.: convergence of approximate saddle points. Universite *de Limoges* 1985.

[13] Lemaire, B : Bon poshtion, conditionnement, et bon comportement asymptotique, seminaire d'Analyse convexe.5, 1992,23-37.

[14] ROCKAFELLAR, R. : convex Analysis . Princeton University Press, Princeton N. J, 1970.

[15] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. : varational analysis, 2en, Springer, New York, 2004.

[16] SOUEYCATT,M .: The Convergence of level sets and the Convergence of ε-solutions in Terms of ρ-Hausdorff Distance.vol.22,n°.3,2007, 111-127.

[17] WETS, R.; JOFRE, A. : variational convergence of bivariate functions, (Manscript) 2006.