مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

دراسة موضوعات الفصل : $\alpha\text{-}T_0$ ، $\alpha\text{-}T_1$ ، $\alpha\text{-}T_2$

الدكتور عدنان ظريف*
أسعد شاكر حميد الخفاجي**

(تاريخ الإيداع 15 / 9 / 2011. قُبِل للنشر في 31 / 5 /2012)

ملخّص

لقد أدخل العالم الرياضي Njastad لأول مرة في عام 1965 مفهوماً جديداً للمجموعات المفتوحة أسماها المجموعات المفتوحة من النوع α وقام بدراستها .

وباستخدام هذا المفهوم تم تعريف مجموعات أخرى جديدة في الفضاءات التبولوجية مثل المجموعات شبه المفتوحة من النوع α، والمجموعات المغلقة المعممة من النوع α .

نحاول في هذا البحث دراسة بعض المفاهيم التبولوجية باستخدام هذا المفهوم الجديد، وقد قمنا بتوضيح العلاقة بين المجموعات المفتوحة والمجموعات المفتوحة من النوع α .

كما أننا استخدمنا هذا المفهوم في دراسة أنواع جديدة من موضوعات الفصل سميت موضوعات الفصل من النوع α والموضوعات التي قمنا بدراستها هي : $\alpha\text{-}T_0$ ، $\alpha\text{-}T_1$ ، $\alpha\text{-}T_2$.

الكلمات المفتاحية: مجموعة مفتوحة من النوع α ، مجاورة من النوع α، مجموعة مغلقة من النوع α ، لصاقة المجموعة من النوع α .

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.
** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

Study of Separation Axioms : α-T_0 , α-T_1, α-T_2

Dr. Adnan Zarif*
Asaad AL-Khafaji**

(Received 15 / 9 / 2011. Accepted 31 / 5 /2012)

ABSTRACT

In 1965, the mathematician Njastad introduced and studied, for the first time, a new concept of open set which is called "α-open set". And by using this concept, it was defined another new open sets in topological spaces which is called "semi α-open set " in addition to "α- generalized closed set " .

We Try in this paper to study most of the topological concepts by using this new concept, and we have clarified the relation between open sets and α-open sets. Also, we use this concept to study new kinds of separation axioms which is called "α- separation axioms " .

And the axioms we have studied are : α-T_0, α-T_1, α-T_2 .

Keywords : "α - open set, α- Neighborhood, α - closed set, α - closure set" .

***Assistant professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria .**
****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria .**

مقدمة:

تعد موضوعات الفصل في الفضاءات التبولوجية من أهم القضايا والمسائل التبولوجية، حيث تعتمد هذه الموضوعات على إمكانية فصل كل نقطتين مختلفتين بواسطة مجموعة مفتوحة أو مجموعتين مفتوحتين ومن ثم إمكانية فصل كل مجموعة مغلقة وكل نقطة من متممتها بالنسبة للفضاء المدروس ، أو فصل كل مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين بمجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين .

ووفقاً لذلك صنفت هذه الموضوعات إلى الأصناف الآتية : فضاء T_0 ، فضاء $T_{1/2}$ ، فضاء T_1 ، فضاء T_2 ، فضاء T_3 ، فضاء تيخونوف ، فضاء T_4 ، فضاء T_5 .

نشير إلى أن هذه الموضوعات قد أشبعت دراسةً ، وتم التعرف على خصائص كل نمط من ألأنماط السابقة .

في عام 1965 قام العالم Njastad [1] باقتراح تعريف جديد للمجموعات المفتوحة في الفضاءات التبولوجية أسماها المجموعات المفتوحة من النوع α ، والتي تعرف كالأتي:

يقال لأية مجموعة جزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة مفتوحة من النوع α إذا تحقق الشرط التالي : $A \subseteq \text{int}(cl(\text{int}(A)))$ ، ويرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع α بالرمز $O_\alpha(X)$.

لقد استخدم هذا التعريف في نشوء أنماط جديدة من الفضاءات التبولوجية كالفضاءات التبولوجية من النوع α [3]،[7]، والتي تختلف بنيتها عن بنية الفضاءات التبولوجية المعروفة .

سنقوم في هذا البحث بدراسة موضوعات الفصل : $\alpha\text{-}T_0$ ، $\alpha\text{-}T_1$ ، $\alpha\text{-}T_2$.

أهمية البحث وأهدافه:

إن البحث يقع ضمن مجال التحليل الرياضي وهو يخدم التبولوجيا العامة ، والهدف منه هو دراسة بعض المفاهيم الجديدة في الفضاءات التبولوجية باستخدام مفهوم المجموعات المفتوحة من النوع α ، بدلاً من المجموعات المفتوحة.

مما نتج عن ذلك إحداث بنية جديدة للفضاءات التبولوجية تختلف عن بنية الفضاءات التبولوجية المعروفة .

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع في مجال الرياضيات البحتة ويعتمد على مفهوم المجموعات المفتوحة من النوع α في الحصول على نتائج جديدة متعلقة بموضوعات الفصل في الفضاءات التبولوجية .

تعاريف أساسية:

<u>تعريف (4.1) [1]:</u>

المجموعة المفتوحة من النوع α (α - Open Set):

يقال عن المجموعة A إنها مجموعة مفتوحة من النوع α في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا تحقق الشرط التالي : $A \subseteq \text{int}(\text{cl}(\text{int}(A)))$ ، ويرمز لأسرة جميع المجموعات المفتوحة من النوع α بالرمز $O_\alpha(X)$.

<u>تعريف (4.2) [1]:</u>

المجوعة المغلقة من النوع α (α - Closed Set):

إن متممة المجموعة المفتوحة من النوع α تدعى المجموعة المغلقة من النوع α ، ويرمز لأسرة جميع المجموعات المغلقة من النوع α بالرمز $C_\alpha(X)$.

<u>تعريف (4.3) [2]:</u>

المجموعة شبه المفتوحة من النوع α (Semi - α - Open Set):

لتكن A مجموعة نقاط من الفضاء التبولوجي (X,τ)، يقال عن المجموعة A إنها مجموعة شبه مفتوحة من النوع α إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النوع α مثل U في الفضاء (X,τ) بحيث يكون:

$U \subseteq A \subseteq cl(U)$، ويرمز لأسرة جميع المجموعات شبه المفتوحة من النوع α بالرمز $S_\alpha O(X)$.

<u>تعريف (4.4) [2]:</u>

المجموعة شبه المغلقة من النوع α (Semi - α - Closed Set):

إن متممة المجموعة شبه المفتوحة من النوع α تدعى المجموعة شبه المغلقة من النوع α ويرمز لأسرة جميع المجموعات شبه المغلقة من النوع α بالرمز $S_\alpha C(X)$.

<u>تعريف (4.5):</u>

لصاقة المجموعة من النوع α (α - Closure Set):

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ)، يسمى تقاطع كل المجموعات المغلقة من النوع α الحاوية على المجموعة A لصاقة المجموعة A من النوع α ويرمز لها بالرمز $CL_\alpha(A)$.

<u>تعريف (4.6) [3]:</u>

المجموعة المغلقة من النوع α المعممة (Generalized α - Closed Set):

يقال عن المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة مغلقة من النوع α معممة في إذا ا كان $cl_\alpha(A) \subseteq U$ بحيث $A \subseteq U$ و U مجموعة مفتوحة من النوع α في (X,τ)، ويرمز لها اختصاراً (gα-closed).

<u>تعريف (4.7) [4]:</u>

المجموعة المغلقة المعممة من النوع α (α - Generalized Closed Set):

يقال عن المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة مغلقة معممة من النوع α في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا كان: $cl_\alpha(A) \subseteq U$ بحيث $A \subseteq U$ و U مجموعة مفتوحة في (X,τ)، ويرمز لها اختصاراً (αg - closed).

<u>تعريف (4.8):</u>

التبولوجيا من النوع α (α - Topology):

إن جماعة جميع المجموعات المفتوحة من النوع α في الفضاء التبولوجي (X,τ) تشكل تبولوجيا على X تسمى التبولوجيا من النوع α ويرمز لها بالرمز $\tau_\alpha(X)$ أي أن : $\tau_\alpha(X) = O_\alpha(X)$.

تعريف (4.9) [5]:

المجاورة من النوع α (α - Neighborhood):

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ)، يقال عن A إنها مجاورة من النوع α للنقطة x من الفضاء X إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النوع α مثل U في الفضاء (X,τ) بحيث يكون:

$x \in U \subseteq A$ ، ويرمز لأسرة المجاورات من النوع α للنقطة x بالرمز $V_\alpha(x)$.

تعريف (4.10):

نقطة تراكم من النوع α (α - Accumulation Point):

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ)، نسمي النقطة x من الفضاء X نقطة تراكم من النوع α للمجموعة A إذا كانت أية مجاورة من النوع α للنقطة x تتقاطع مع A بنقطة واحدة على الأقل مختلفة عن النقطة x، بمعنى آخر: $\forall\, U \in V_\alpha(x) \Rightarrow (U \cap A) - \{x\} \neq \varnothing$

تعريف (4.11) [6]:

الدالة المستمرة من النوع α (α - Continuous Function):

لتكن f دالة ما من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,τ^*) عندئذ يقال للدالة f إنها مستمرة من النوع α إذا كان $f^{-1}(v)$ مجموعة مفتوحة (مغلقة) من النوع α في الفضاء التبولوجي (X,τ) لكل مجموعة مفتوحة (مغلقة) v في الفضاء التبولوجي (Y,τ^*) .

تعريف (4.12):

الفضاء T_0 :

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_0 إذ اوجد من أجل أي نقطتين مختلفتين y,x من X مجموعة مفتوحة بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين دون الأخرى .

تعريف (4.13):

الفضاء T_1 :

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_1 إذا وجد من أجل أي نقطتين مختلفتين x,y من X مجموعتان مفتوحتان مثل U,V إحداهما تحوي x ولا تحوي y والثانية تحوي y ولا تحوي x، بمعنى أخر:

$$(x \in U \wedge y \notin U) \wedge (y \in V \wedge x \notin V)$$

النتائج والمناقشة:

نورد مثالاً توضيحياً لفضاء تبولوجي نحدد فيه أسر المجموعات المفتوحة من النوع α و المجموعات المغلقة من النوع α و المجموعات المغلقة من النوع α المعممة والمجموعات المغلقة المعممة من النوع α .

مثال (5.1):

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ فإن:

1. المجموعات المفتوحة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\varnothing, X, \{a,b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}, \{b\}, \{a\}$$

2. المجموعات المغلقة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\varnothing, X, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$$

3. المجموعات المغلقة من النوع α المعممة في الفضاء (X,τ) هي:

$$\varnothing, X, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$$

4. المجموعات المغلقة المعممة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\varnothing, X, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}$$

ملاحظة (5.1):

كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النوع α . (الحالة المعاكسة ليست بالضرورة صحيحة) .

مثال (5.2):

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ولتكن $A = \{a,b,d\}$

إن المجموعات المفتوحة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\tau_\alpha(X)=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$$

نلاحظ أن المجموعة A هي مجموعة مفتوحة من النوع α لأنها تنتمي إلى τ_α ولكنها ليست مجموعة مفتوحة لأنها لاتنتمي إلى τ .

ملاحظة (5.2):

كل مجموعة مفتوحة من النوع α هي مجموعة شبه مفتوحة من النوع α . (الحالة المعاكسة ليست بالضرورة صحيحة) .

مثال (5.3):

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau_x=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$

إن المجموعات المفتوحة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\tau_\alpha(X)=\tau_X \cup \{a,b,d\}$$

إن المجموعات شبه المفتوحة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$S_\alpha O(X)=\tau_\alpha(X)\cup\{\{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,c\}\}$$

ولتكن $A=\{b,c\}$

نلاحظ أن المجموعة A هي مجموعة شبه مفتوحة من النوع α ولكنها ليست مجموعة مفتوحة من النوع α لأنها لاتنتمي إلى $\tau_\alpha(X)$.

تمهيدية (5.1):

لتكن كل من A, B مجموعة جزئية من (X,τ) عندئذ تكون القضايا الآتية محققة :

1- $A \subseteq CL_\alpha(A)$.

2- If $A \subseteq B$ then $Cl_\alpha(A) \subseteq Cl_\alpha(B)$.

3- $Cl_\alpha(A)$ is α - closed set .

4- $Cl_\alpha(Cl_\alpha(A)) = Cl_\alpha(A)$.

5- $A \text{ is } \alpha\text{-closed set} \Leftrightarrow A = CL_\alpha(A)$.

تعريف (5.1) [3]:

الفضاء $\alpha\text{-}T_0$:

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_0 إذا وجد من أجل أي نقطتين مختلفتين y,x من X مجموعة مفتوحة من النوع α بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين دون الأخرى .

مبرهنة (5.1):

من أجل أي فضاء تبولوجي (X,τ) تكون الشروط الآتية متكافئة :

1− (X,τ) فضاء $\alpha-T_0$.

2− من أجل كل $x \neq y$ يكون $Cl_\alpha\{x\} \neq Cl_\alpha\{y\}$.

3− من أجل كل $x \neq y$ إما أن يكون $x \notin Cl_\alpha\{y\}$ أو $y \notin Cl_\alpha\{x\}$.

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$

بما أن الفضاء (X,τ) فضاء $\alpha-T_0$ فإنه من أجل كل نقطتين مختلفتين y,x من الفضاء التبولوجي (X,τ)، توجد G مجموعة مفتوحة من النوع α حاوية لإحداهما ولا تحوي الأخرى . لتكن مثلاً $x \in G$ بما أن G مجموعة مفتوحة من النوع α فهي مجاورة من النوع α للنقطة x وبما أن $G \cap \{y\} = \varnothing$ فإن $x \notin Cl_\alpha\{y\}$ ، وبما أن $x \in Cl_\alpha\{x\}$ فإن $Cl_\alpha\{x\} \neq Cl_\alpha\{y\}$.

$2 \Rightarrow 3$

لنفرض جدلاً أن $x \in CL_\alpha\{y\}$ و $y \in CL_\alpha\{x\}$ عندئذ نجد أن $\{x\} \subseteq CL_\alpha\{y\}$ و $\{y\} \subseteq CL_\alpha\{x\}$ ، من ذلك ينتج أن : $Cl_\alpha\{x\} \subseteq Cl_\alpha\{y\}$ و $Cl_\alpha\{y\} \subseteq Cl_\alpha\{x\}$ وبالتالي نحصل على تناقض مع 2 . إذاً الفرض الجدلي خاطئ وعكسه هو الصحيح .

$3 \Rightarrow 1$

لنفرض أن $x \notin Cl_\alpha\{y\}$ ، بما أن $Cl_\alpha\{y\}$ مجموعة مغلقة من النوع α فإن $X \setminus Cl_\alpha\{y\}$ مجموعة مفتوحة من النوع α، ليكن $V = X \setminus Cl_\alpha\{y\}$

نلاحظ أن $x \in V \wedge y \notin V$ وهذا يعني أن X فضاء $\alpha-T_0$.

بالطريقة نفسها إذا كان $y \notin Cl_\alpha\{x\}$ فإن X فضاء $\alpha-T_0$.

ملاحظة (5.3):

كل فضاء T_0 هو فضاء $\alpha-T_0$. (الحالة المعاكسة ليست بالضرورة صحيحة) .

مثال(5.4):

لتكن $X = \{1,2,3\}$ و $\tau = \{\varnothing, X, \{3\}\}$

إن المجموعات المفتوحة من النوع α في الفضاء (X,τ) هي:

$$\tau_\alpha = \{\varnothing, X, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

ومنه نجد أن X فضاء $\alpha-T_0$ ولكنه ليس فضاء T_0 .

تعريف (5.1) [3]:

الفضاء α-T_1 :

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_1 إذا وجد من أجل أي نقطتين مختلفتين y,x من X مجموعتان مفتوحتان من النوع α مثل U,V إحداهما تحوي x ولا تحوي y والثانية تحوي y ولاتحوي x، بمعنى أخر:

$$(x \in U \wedge y \notin U) \wedge (y \in V \wedge x \notin V)$$

ملاحظة (5.4):

كل فضاء T_1 هو فضاء $\alpha - T_1$.

تمهيدية (5.2):

من أجل كل مجموعة جزئية A الفضاء التبولوجي (X,τ) تكون مفتوحة من النوع α إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة G بحيث يكون $G \subseteq A \subseteq \operatorname{int}(cl(G))$.

البرهان:

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X,τ) بحيث تكون مفتوحة من النوع α .

وفق تعريف المجموعة المفتوحة من النوع α يكون الشرط $A \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A))$ محققاً

لذلك نجد أن : $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A)))$

بوضع $G = \operatorname{int}(A)$

نحصل على : $\operatorname{int}(A) = G \subseteq A \subseteq \operatorname{int}(cl(G))$.

الاتجاه الأخر:

لنفرض أن G مجموعة مفتوحة بحيث إن $G \subseteq A \subseteq \operatorname{int}(cl(G)$ ،

نعلم أن $\operatorname{int}(A)$ هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A وأن G مجموعة مفتوحة وتحقق $G \subseteq A$ ومنه نحصل على $G \subseteq \operatorname{int}(A)$ وبأخذ اللصاقة للطرفين نحصل على : $cl(G) \subseteq cl(\operatorname{int}(A)) \Leftarrow$

ولكن $\operatorname{int}(cl(G)) \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A)))$ هذا يعني أن $G \subseteq A \subseteq \operatorname{int}(cl(G)$: $A \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A)))$

ومنه A مجموعة مفتوحة من النوع α .

مبرهنة (5.2):

الفضاء التبولوجي X يكون فضاء $\alpha - T_1$ إذا وفقط إذا كانت {p} مجموعة مغلقة من النوع α لكل p تنتمي إلى X .

البرهان:

ليكن X فضاء $\alpha - T_1$ ولتكن p تنتمي إلى X ، سوف نبرهن على أن {p} مجموعة مغلقة من النوع α،

$$\forall x \in X \setminus \{p\} \Rightarrow x \neq p$$

بما أن X فضاء $\alpha - T_1$ إذاً توجد G_x, G_P مجموعتان مفتوحتان من النوع α بحيث :

$$(x \in G_x \wedge p \notin G_x) \wedge (x \notin G_p \wedge p \in G_p)$$

إذا كان $x \in G_x \Leftarrow p \notin G_x$

ومنه نجد إن $x \in G_x \subseteq X \setminus \{p\}$ وهذا يعني إن $X \setminus \{p\}$ تكون مجموعة مفتوحة من النوع α وبالتالي فإن{p} مجموعة مغلقة من النوع α .

الاتجاه الأخر:

لنفرض أن {P}مجموعة مغلقة من النوع α ولنبرهن على أن X هو فضاء $\alpha - T_1$.

من أجل كل $x \neq y$ في X تكون المجموعتان $\{x\},\{y\}$ مغلقتين من النوع α ومنه نجد أن $X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}$ مجموعتان مفتوحتان من النوع α تحققان:

$$(x \in X \setminus \{y\} \wedge y \notin X \setminus \{y\}) \wedge (y \in X \setminus \{x\} \wedge x \notin X \setminus \{x\})$$

وهذا يعني إن فضاء X $\alpha - T_1$.

مبرهنة (5.3):

إذا كان X فضاءً تبولوجياً من النوع $\alpha - T_1$ عندئذ:

إذا كانت المجموعة B منتهية من الفضاء X و x نقطة كيفية غير منتمية للمجموعة B فإنه توجد مجاورة من النوع α للنقطة x غير متقاطعة مع المجموعة B .

البرهان:

لتكن $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من الفضاء X و لتكن النقطة x نقطة كيفية لا تنتمي للمجموعة B،

مهما يكن العنصر b_i توجد مجاورة V_i من النوع α للنقطة x لاتحوي b_i، إن المجموعة $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ تكون مجاورة من النوع α للنقطة x وغير متقاطعة مع المجموعة B .

مبرهنة (5.4):

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً من النوع $\alpha - T_1$ عندئذ:

إذا كانت B مجموعة جزئية من (X, τ)فان النقطة x من X تكون نقطة تراكم من النوع α لـ B إذا وفقط إذا تقاطعت أية مجاورة من النوع α مع المجموعة B بعدد غير منته من النقاط .

البرهان:

إذا كانت أية مجاورة من النوع α للنقطة x تتقاطع مع المجموعة B بعدد غير منته من النقاط فواضح أن العنصر x يكون نقطة تراكم من النوع α للمجموعة B.

الاتجاه الأخر:

لنفرض أن النقطة x تكون نقطة تراكم من النوع α للمجموعة B وسوف نبرهن على أن تقاطع أية مجاورة من النوع α للنقطة x مع المجموعة B هو مجموعة غير منتهية من النقاط .

لنفرض جدلاً أنه توجد V مجاورة من النوع α للعنصر x بحيث يكون :

$V \cap B = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = C$ مجموعة منتهية من العناصر ، لدينا x نقطة تراكم من النوع α للمجموعة B،

سنناقش حالتين:

1- إذا كان $x \notin B$ أي إن : x لاتنتمي للمجموعة C، وفق المبرهنة (5.3) تكون المجموعة C مجموعة منتهية و x نقطة لاتنتمي لها،عندئذ توجد V_1 مجاورة من النوع α للنقطة x بحيث:

$$V_1 \cap C = \varnothing ....(1)$$

وبتعويض $C = V \cap B$ في (1) نحصل على :

$$V_1 \cap C = V_1 \cap V \cap B = \varnothing ....(2)$$

ولدينا $V_2 = V_1 \cap V \in V_\alpha(x)$، وبتعويض V_2 في العلاقة **(2)** نحصل على :

$$V_2 \cap B = \varnothing$$

ومنه نحصل على أن x ليست نقطة تراكم من النوع α للمجموعة B وهذا تناقض مع الفرض .

2- إذا كان $x \in B$ أي أن : $x \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ومنه نجد أن: $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \setminus \{x\} \not\ni x$ وفق المبرهنة (5.3) لدينا S مجموعة منتهية والنقطة x لا تنتمي لها عندئذ توجد مجاورة V_3 للنقطة x بحيث : $V_3 \cap S = \varnothing$ .... *

وبتعويض $S = C \setminus \{x\}$ و $C = V \cap B$ في العلاقة * نحصل على:

$$V_3 \cap S = V_3 \cap (V \cap B) \setminus \{x\} = (V_3 \cap V) \cap B \setminus \{x\} = \varnothing ...**$$

ولدينا : $V_4 = V_3 \cap V \in V_\alpha(x)$ ، وبتعويض V_4 في العلاقة ** نحصل على:

$$V_4 \cap B \setminus \{x\} = \varnothing$$

ومنه نحصل على أن النقطة x ليست بنقطة تراكم من النوع α للمجموعة B، وهذا تناقض مع الفرض. إذاً فرضنا الجدلي خاطئ وعكسه هو الصحيح .

نتيجة (5.1):

من المبرهنة (5.4) ينتج مباشرة أن:

كل مجموعة منتهية من أي فضاء $\alpha - T_1$ لا تملك نقاط تراكم من النوع α .

تعريف (5.3) [7]:

الفضاء α-T_2 :

يقال للفضاء التبولوجي X إنه فضاء $\alpha - T_2$ إذا وجد من اجل أي نقطتين مختلفتين x, y من X مجموعتان مفتوحتان من النوع α مثل T, G وغير متقاطعتين إحداهما تحوي x والأخرى تحوي y، بمعنى أخر:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists\ T, G \in \tau_\alpha : x \in T \wedge y \in G, T \cap G = \varnothing$$

ملاحظة (5.5):

كل فضاء T_2 هو فضاء $\alpha - T_2$.

مبرهنة (5.5):

ليكن كل من $\tau_\alpha, \tau_\alpha^*$ تبولوجيا من النوع α على الفضاء (X, τ) بحيث $\tau_\alpha \subseteq \tau_\alpha^*$:إذا كان (X, τ_α) فضاء $\alpha - T_i$ فإن (X, τ_α^*) يكون فضاء $\alpha - T_i$ ، i=0,1,2 .

البرهان:

إذا كان i= 0 فإن: $\forall x, y \in X; x \neq y \Rightarrow \exists U \in \tau_\alpha$

بحيث : $(x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$

بما أن $\tau_\alpha \subseteq \tau^*_\alpha \Leftarrow U \in \tau^*_\alpha \Leftarrow (X, \tau^*_\alpha)$ يكون فضاء $\alpha - T_0$.

إذا كان i =1 فإن: $\forall x, y \in X; x \neq y \Rightarrow \exists T, G \in \tau_\alpha$

بحيث : $(x \in T \wedge y \notin G) \wedge (x \notin T \wedge y \in G)$

بما أن $\tau_\alpha \subseteq \tau^*_\alpha$ هذا يعني $T, G \in \tau^*_\alpha$ وكل منهما مجموعة مفتوحة من النوع α، ومنه نحصل على (X, τ^*_α) هو فضاء $\alpha - T_1$.

إذا كان i=2 فإن : $\forall x, y \in X; x \neq y \Rightarrow \exists T, G \in \tau_\alpha$

بحيث: $x \in T \wedge y \in G$ and $T \bigcap G = \varnothing$

بما أن $\tau_\alpha \subseteq \tau^*_\alpha \Leftarrow T, G \in \tau^*_\alpha \Leftarrow (X, \tau^*_\alpha)$ يكون فضاء $\alpha - T_2$.

ملاحظة(5.6):

كل فضاء $\alpha - T_2$ هو فضاء $\alpha - T_1$. (الحالة المعاكسة ليست بالضرورة صحيحة) .

مثال (5.5):

لتكن X مجموعة غير منتهية و التبولوجيا المعرفة عليها هي تبولوجيا المتممات المنتهية والتي يرمز لها بالرمز (τ_{cof}) وتعرف بالشكل الأتي:

$$\tau = \{G \subseteq X ; |X - G| < \infty\} \bigcup \{\varnothing\}$$

نلاحظ أن (X, τ) هو فضاء T_1 وبالتالي فإنه فضاء $\alpha - T_1$ وفق الملاحظة (5.4) .

وقبل التحقق من كونه ليس فضاء $\alpha - T_2$ سنبين أن $\tau_\alpha = \tau$.

لتكن $A \subseteq X$ فإن:

أولاً:

إذا كانت A مجموعة منتهية فإن A لاتحوي على مجموعات مفتوحة وبالتالي: $\operatorname{int}(A) = \varnothing \Leftarrow$ $cl(\operatorname{int}(A)) = \varnothing \Leftarrow \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A))) = \varnothing$ ومنه نجد أن الشرط $A \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A)))$ غير محقق وهذا يعني أن المجموعة A ليست مجموعة مفتوحة من النوع α .

ثانياً:

إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإن هنالك حالتين هما:

أ- إذا كانت A^c مجموعة منتهية فهذا يعني أن A مجموعة مفتوحة وبالتالي $\operatorname{int}(A) = A$ في تبولوجيا المتممات المنتهية(τ_{cof}) نجد أن $cl(A) = A$ إذا كانت A منتهية و $cl(A) = X$ إذا كانت A غير منتهية .

لدينا $\operatorname{int}(A) = A$ هذا يعني أن $cl(\operatorname{int}(A)) = cl(A) = X$

ومنه نجد أن :

$$\operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A))) = \operatorname{int}(cl(A)) = \operatorname{int}(X) = X$$

$$\Rightarrow \quad A \subseteq \operatorname{int}(cl(\operatorname{int}(A)))$$

وهذا يعني أن A مجموعة مفتوحة من النوع α وأن A^c هي مجموعة مغلقة من النوع α .

ب- إذا كانت A^c مجموعة غير منتهية ، في هذه الحالة تكون المجموعة A غير مفتوحة وبالتالي $\text{int}(A) = \emptyset$ ومنه نلاحظ أن الشرط $A \subseteq \text{int}(cl(\text{int}(A))$ غير محقق وبالتالي فإن المجموعة A ليست مجموعة مفتوحة من النوع α .

وبالتالي فإن $\tau_\alpha = \tau$.

لنفرض جدلاً أنه فضاء $\alpha - T_2$ هذا يعني أن:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \ T, G\,(\alpha - open\, sets): x \in T \wedge y \in G, T \cap G = \emptyset$$

بما أن : $T \cap G = \emptyset$ منه نحصل على $T \subseteq X \setminus G$ ، $G \subseteq X \setminus T$.

بما أن : $X \setminus T$ مجموعة منتهية فإن G تكون مجموعة منتهية ،

وبما أن : $X = G \cup (X \setminus G)$ فإن X تكون مجموعة منتهية وهذا تناقض لأن X مجموعة غير منتهية، إذاً الفرض الجدلي خاطئ وعكسه هو الصحيح .

الاستنتاجات والتوصيات:

1- الحصول على مفاهيم جديدة في التبولوجيا العامة .

2- الحصول على علاقات بين المجموعات المفتوحة والمجموعات المفتوحة من النوع α . حيث إن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من النوع α ، وإن كل مجموعة مفتوحة من النوع α هي مجموعة شبه مفتوحة من النوع α .

3- نشوء أنماط جديدة من موضوعات الفصل تختلف عن موضوعات الفصل المعروفة .

4- إيجاد العلاقة بين الفضاءات المدروسة من خلال المخطط الآتي:

$$\alpha - T_2 \Rightarrow \alpha - T_1 \Rightarrow \alpha - T_0$$

إن الحالة المعاكسة ليست بالضرورة صحيحة ولقد تم إعطاء أمثلة توضح ذلك .

5- إن موضوعات الفصل من النوع α تملك صفة وراثية والمبرهنة (5.5) وضحت ذلك .

إن دراسة موضوعات الفصل $\alpha - T_i$ ، $i = 3, 4, \ldots$ ، باستخدام مفهوم المجموعات المفتوحة من النوع α تبقى مسألة قائمة وتحتاج إلى حل في المستقبل .

المراجع:

[1] - NJASTAD, O. 1965,on some classes of nearly open sets, pacific J .Math.15, 961-970.

[2]– الطباطبائي – نادية – أنواع جديدة من المجموعات المفتوحة من النوع α والمجموعات شبه المفتوحة من النوع α، أطروحة ماجستير، كلية ابن الهيثم ، جامعة بغداد ، 2004، (4).

[3] - MAKI, H. DEVI, R.; BALACHANDRAN, K. 1993, Generalized α - closed sets in topology, Bull.Fukuoka Univ. Ed. Part III 42,(13-21).

[4] - MAKI, H. DEVI, R. ; BALACHANDRAN, K. Associated topologies of Generalized α - closed sets and α - Generalized closed sets . Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser Math.15, 1994 , (51-63) .

[5] – MAHESHWAIR, S.N.; THAKUR, S.S. On α - compact spaces, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 13,1985,(341-347) .

[6] – MASHHOUR, A.S., HASANEIN, I.A., EL-DEEB S.N.,1983, α - continuous and α - open mappings, Acta Math. Hungar. 41, (213 – 218) .

[7] - Maheshwari , S . N .; Thakur, S. S. On α - irresolute functions, Tamkang J. Math . 11 , 1980, (209-214) .