مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (3) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (3) 2012

متراجحة نيكولسكي التكاملية على R^* مع أوزان لاجير المعممة

الدكتور محمد علي*
الدكتور حسن بدور**
ندى علي***

(تاريخ الإيداع 30 / 5 / 2012. قُبِل للنشر في 4 / 11 /2012)

ملخّص

ندرس في هذا البحث متراجحة من نوع نيكولسكي التكاملية لكثيرات الحدود $P_{\mathrm{m}}(\mathrm{x})$ ومتراجحة أخرى تخص الدالة $P_m(x)\varphi(x)$ وذلك من أجل حالات مختلفة لـ $\varphi(x)$ في الفضاء L_{p} الموّزن نستخدم وزن لاجير المعمم $w_{\alpha\beta} = x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}$ في الحالتين $p = \infty$ و $p < \infty$ على كامل المحور الحقيقي باستثناء الصفر.

الكلمات المفتاحية: متراجحة نيكولسكي ،وزن لاجير ، متراجحة برنشتين .

*أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
**أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
***طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (3) 2012
TishreenUniversity Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (3) 2012

INTEGRAL NIKOLSKII INEQUALITY ON R^* WITH THE GENERALIZED LAGUERRE WEIGHTS

Dr. Mohammad Ali [*]
Dr. HasanBadoor [**]
Nada Ali [***]

(Received 30 / 5 / 2012. Accepted 4 / 11 /2012)

□ABSTRACT□

In this research, we study integral Nikolskii inequality for polynomials $P_m(x)$ and another inequality for the function$P_m(x)\varphi(x)$ for different casesof$\varphi(x)$,in the weighted space L_p usinggeneralized Laguerre weights $w_{\alpha\beta} = x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}$,for both the cases of this space $p = \infty$ and $p < \infty$,on all real axis without 0.

Key words: Nikolskii inequality, Laguerre weights, Bernstein inequality.

[*] **Associate Professor, Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**] **Professor, Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[***] **Postgraduate student, Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يندرج موضوع هذا البحث ضمن دراسة المتراجحات التكاملية في الفضاءات المنظمة التي تنقسم بشكل عام إلى قسمين رئيسين هما:

1–متراجحة برنشتينالتكاملية التي تعطي العلاقة بين نظيم الدالة و نظيم مشتق هذه الدالة في الفضاء نفسه،فإذا كانXفضاءًمنظماً ما فإنلمتراجحة برنشتين الشكل العام الآتي :

$$\left\|f^{(n)}\right\|_X \leq C\|f\|_X \quad .$$

2– متراجحة نيكولسكي التكاملية التي تعطي العلاقة بين نظيم الدالة في L_pو نظيم الدالة نفسها في الفضاء L_qولها الشكل العام الآتي:

$$\|f\|_{L_\mathrm{p}} \leq \mathrm{C}\|f\|_{L_\mathrm{q}} \quad .$$

تركزت الدراسة في هذا البحث على المتراجحات التكاملية لكثيرات الحدود الحقيقية مع الأوزان الأسية وقد استخدمنا أوزان لاجير الشهيرة$w_{\alpha\beta} = x^\alpha e^{-x^\beta}$ التي تعد تعميماً لأوزان فرويد المعروفة بالعلاقة :

$$u = |x|^{2\alpha+1}e^{-x^{2\beta}}$$

وبشكل خاص توصلنا إلى متراجحة من نوع نيكولسكي لكثيرات الحدود$P_m(x)$في الفضاء L_p الموزّن مستخدمين وزن لاجير المعمم على كامل المحور الحقيقي ، كما أننا توصلنا إلى متراجحة تخص الدالة $P_m(x)\varphi(x)$وذلك من أجل حالات مختلفة لـ $\varphi(x)$ في الفضاء L_p الموّزن مستخدمين وزن لاجير المعممو هذه المتراجحات تتطابق مع متراجحة نيكولسكي في حالة $\varphi(x) = 1$.

تمت مناقشة نتائج هذا البحث في الفضاءL_p الموّزن في الحالتين $p = \infty$ و $p < \infty$ ،حيث يكون للمتراجحات التكاملية أهمية خاصة في حل بعض مسائل نظرية تقريب الدوال الحقيقية (كمثال انظر [3]) .

أهمية البحث وأهدافه:

أهمية هذا البحث تكمن في استخدام نتائجه في الكثير من مسائل التحليل الرياضي وبشكل خاص في مسائل نظرية التقريب .

هدف البحث هو الوصول إلى متراجحتين من الشكل :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{1/q}\right\|_p \leq C_1\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q$$

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_p \leq C_2\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q$$

في الحالات الآتية :

1) على النصف السالب للمحور الحقيقي .

2) على كامل المحور الحقيقي باستثناء الصفر .

3) عندما يكون $\varphi(x) = x$.

4) عندما يكون $\varphi(x) = x^{l/n} \quad : \forall l, n \in \mathbb{N}$.

طرائق البحث ومواده :

إنّ هذا البحث يقع ضمن اختصاص التحليل الرياضي وبشكل خاص ضمن نظرية الدوال وهو يملك صيغة نظرية تستخدم فيها الطرائق الرياضية المناسبة للوصول إلى المتراجحات المذكورة أعلاه .

النتائج والمناقشة:

تعريف(1):[1]الفضاء $L_p[a,b]$ هو فضاء كل الدوال القابلة للقياس على المجال$[a,b]$التي تحقق الشرط :

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

أما النظيم في هذا الفضاء فهو : $\|f\|_p = \left\{\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ حيث $p < \infty$

وفي حالة $p = \infty$ يرمز لهذا الفضاء بالرمز L_∞ والنظيم فيه يصبح على الشكل الآتي :

$\|f\|_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

تعريف (2):[1]لتكنwدالةمختلفة عن الصفر وقابلة للقياس على $I = [a,b]$، سوف نرمز بـ $L_P(I,w)$ لفضاء الدوال f المعرفة على$[a,b]$التي من أجلها يكون : $\int_a^b |f.w|^p\, dx<\infty$.

أما النظيم في هذا الفضاء فهو: $\|f\|_{p,w} = \left\{\int_a^b |f.w|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$: $p < \infty$

في حالة $p = \infty$ يرمز لهذا الفضاء بالرمز $L_\infty(I,w)$ والنظيم فيه يصبح بالشكل :

$$\|f\|_{\infty,w} = \max_{x\in[a,b]} |f.w|$$

بكلام آخر نقول إن $f \in L_p(I,w)$ إذا كان $f.w \in L_p(I)$.

تعريف(3):تسمى الدالة المعرفة بالعلاقة$w_\alpha = x^\alpha e^{-x}$وزن لاجير[3]، أما الدالة المعرفة بالعلاقة $w_{\alpha\beta} = x^\alpha e^{-x^\beta}$فتسمى وزن لاجير المعمم[2].

❖ لتكن $A > 0$ و من أجل $0 < t_1 < \cdots < t_r < a_m$ مثبتة سوف نضع :

$$A_m = \left[A.\frac{a_m}{m^2}, a_m(1 - \frac{A}{m^{2/3}}\right] \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \left[t_i - A\frac{\sqrt{a_m}}{m}, t_i + A\frac{\sqrt{a_m}}{m}\right]$$

حيثm كبيرة بشكل كافٍ و $r \geq 0$.

وفي حالة خاصة عندما $r = 0$ يكون $A_m = \left[A.\frac{a_m}{m^2}, a_m(1 - \frac{A}{m^{2/3}})\right]$.

مبرهنة (1) : [3]

لتكن $A, t_1, \dots, t_r$محققة لما سبق عندئذ من أجل كل كثيرة حدود P_{m} و$0 < p \leq \infty$يوجد ثابت $C = C(A)$لا يتعلق بـ p, m, P_m بحيث تتحقق المتراجحة :

$$\left(\int_0^\infty \left|(P_m w_{\alpha\beta})(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_{A_m} \left|(P_m w_{\alpha\beta})(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

مبرهنة (2): [3]

من أجل كل كثيرة حدود P_m و $0 < p \leq \infty$ يكون لدينا :

$$\left(\int_0^\infty \left|P'_m(x)w_{\alpha\beta}(x)\sqrt{x}\right|^p dx\right)^{1/p} \le C\frac{m}{\sqrt{a_m}}\left(\int_0^\infty \left|P_m(x)w_{\alpha\beta}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

حيث إن الثابتC لا يتعلق بـ p, m, P_m .

للمبرهنةالآتية أهمية خاصة في بحثنا هذا، لذلك سوف نورد البرهان الذي تم الاعتماد عليه في الحصول على نتائج هذا البحث.

مبرهنة (3):[2]

لتكن P_m كثيرة حدود اختيارية و $1 \le q < p \le \infty$.

عندئذ يوجد ثابت kغير متعلق ب P_m, m, p, qبحيث يتحقق:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{1/q}\right\|_p \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q-1/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_p \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{2/q-2/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \quad \dots\dots\dots (2)$$

حيث $\varphi(x) = \sqrt{x}$ و$w_{\alpha\beta} = x^\alpha e^{-x^\beta}$وزن لاجير المعمم وذلك من أجل الحالتين:

1) $\alpha \ge 0$: $p = \infty$

2) $\alpha > -1/p$: $p < \infty$

البرهان:

- في حالة $\alpha \ge 0$و$p = \infty$ و $1 \le q < \infty$نأخذ $I_x = [x, x + \Delta_m(x)]$ حيث $x \ge 0$و $\Delta_m(x) = \frac{\sqrt{a_m}}{m}\sqrt{x}$.

من العلاقة :

$$\int_{I_x} P_m(t)\,dt = P_m(x)\Delta_m(x) + \int_{I_x} P'_m(t)(x + \Delta_m(x) - t)\,dt$$

وباستخدام متراجحة هولدر من أجل $1<q$، نحصل من أجل $1 \le q$ على:

$$\left|P_m(x)\varphi(x)^{1/q}\right| \le \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left(\int_{I_x} |P_m(t)|^q dt\right)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m}\left(\int_{I_x} |P'_m(t)\varphi(t)|^q\right)^{1/q}\right] \dots (3)$$

بما أنَّ $w_{\alpha\beta}(x) \sim w_{\alpha\beta}(t)$ من أجل $t \in I_x$, $\alpha \ge 0$ يكون :

$$\left|P_m(x)w_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)^{1/q}\right| \le$$

$$\le C\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left(\int_{I_x} \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m}\left(\int_{I_x} \left|P'_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\varphi(t)\right|^q dt\right)\right)^{1/q}\right]. (4)$$

بتمديد التكاملات على المجال $(0, \infty)$ وباستخدام متراجحة برنشتين في المبرهنة (2) نحصل على:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{1/q}\right\|_\infty \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \dots\dots\dots (5)$$

وهي المتراجحة (1) في حالة $p=\infty$.

باستخدام المبرهنة (1) من أجل $A=1 \quad , \quad r=0$نجد:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_\infty \le C\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{1/q}\varphi^{-1/q}\right\|_{L_\infty\left([\frac{a_m}{m^2},\infty)\right)} \le C\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{1/q}\right\|_\infty$$

من العلاقة (5) نجد:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_\infty \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{2/q}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \dots\dots\dots (6)$$

وهي المتراجحة (2) في حالة $\boldsymbol{p}=\infty$.

- في حالة $1\le q<p<\infty$ و $\alpha>{}^{-1}/_{p}$ فإن برهان (2)يكون كما يلي :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_p^p = \left\|\left|P_m w_{\alpha\beta}\right|^{p-q}\left|P_m w_{\alpha\beta}\right|^q\right\|_1 \le \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_\infty^{p-q}\int_0^\infty \left|P_m w_{\alpha\beta}\right|^q(x)dx$$

$$\le k^{p-q}\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{2(p-q)/q}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^{p-q}.\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^q$$

أي أنّ: $\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_p \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{2/q-2/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \dots\dots\dots (7)$

برهان المتراجحة (1) في هذه الحالة يتم بطريقة مشابهة لبرهان المتراجحة (2) .

نلاحظ أنّ هذه المبرهنة صحيحة من أجل $x>0$ أي أنها صحيحة على النصف الموجب من المحور الحقيقي .

إن المبرهنة الآتية مكرسة للحصول على المتراجحتين (1) و(2)على النصف السالب من المحور الحقيقي أي عندما$x<0$.

مبرهنة (4):

لتكن P_{m}كثيرة حدود اختيارية و $1\le q<p\le\infty$.

عندئذ يوجد ثابت k لا يعتمد على P_{m}, m, p, q بحيث يتحقق:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}{}^*\varphi^{*1/q}\right\|_p \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q-1/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}{}^*\right\|_q \dots\dots\dots (8)$$

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}{}^*\right\|_p \le k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{2/q-2/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}{}^*\right\|_q \dots\dots\dots (9)$$

حيث $\varphi^*(x)=\sqrt{-x} \quad : \quad x<0$ و $w_{\alpha\beta}{}^*(x)=(-x)^\alpha e^{-(-x)^\beta}$ وزن لاجير المعمم وذلك من أجل الحالتين:

1) $\alpha\ge 0 \qquad p=\infty$:.

2) $\alpha>{}^{-1}/_{p} \qquad p<\infty$: .

البرهان:

لنأخذ P_{m}كثيرة حدود اختيارية من أجل$x < 0$

نجري التحويل $\xi = -x$ فنتحول بذلك إلى النصف الموجب من المحور الحقيقي ونكتب:

$$P_{\mathrm{m}}(x) = P_{\mathrm{m}}(-\xi) = {P_{\mathrm{m}}}^{*}(\xi) \qquad : \xi > 0$$

أصبح لدينا ${P_{\mathrm{m}}}^{*}(\xi)$ كثيرة حدود اختيارية و $\xi > 0$ وبحسب المبرهنة (3) يكون:

$$\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \varphi^{1/q}(\xi) \right\|_p \leq k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{1/q - 1/p} \left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right\|_q \dots \dots \dots (10)$$

$$\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right\|_p \leq k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{2/q - 2/p} \left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right\|_q \dots \dots \dots (11)$$

حيث $\varphi(\xi) = \sqrt{\xi} \quad : \quad \xi > 0$.

من أجل العودة إلى المتحول x لدينا :

$$\mathrm{w}_{\alpha\beta}(\xi) = \xi^{\alpha} \mathrm{e}^{-\xi^{\beta}} \qquad : \qquad \xi > 0$$

$$w_{\alpha\beta}(\xi) = w_{\alpha\beta}(-x) = (-x)^{\alpha} e^{-(-x)^{\beta}} = {w_{\alpha\beta}}^{*}(x)$$

أي أنّ: ${w_{\alpha\beta}}^{*}(x) = (-x)^{\alpha} e^{-(-x)^{\beta}}$حيث $x < 0$

ولدينا : $\xi > 0$: $\varphi(\xi) = \sqrt{\xi}$

$$\varphi(\xi) = \varphi(-x) = \sqrt{-x} = \varphi^*(x)$$

أي: $x < 0$: $\varphi^*(x) = \sqrt{-x}$

بالتالي من أجل $1 \leq q < p \leq \infty$ يكون:

$$\begin{aligned}
\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \varphi^{1/q}(\xi) \right\|_p &= \left\{ \int_0^{\infty} \left| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \varphi^{1/q}(\xi) \right|^p d\xi \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_0^{\infty} \left| P_m^*(\xi) (\xi^{\alpha} e^{-\xi^{\beta}}) (\sqrt{\xi})^{1/q} \right|^p d\xi \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left| P_m(x) \left((-x)^{\alpha} e^{-(-x)^{\beta}} \right) \left(\sqrt{-x} \right)^{1/q} \right|^p d(-x) \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_0^{\infty} \left| P_m(x) {w_{\alpha\beta}}^*(x) \varphi^*(x)^{1/q} \right|^p dx \right\}^{1/p} \\
&= \left\| P_m(x) {w_{\alpha\beta}}^*(x) {\varphi^*}^{1/q}(x) \right\|_p
\end{aligned}$$

أي أن :(12) $\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \varphi^{1/q}(\xi) \right\|_p = \left\| P_m(x) {w_{\alpha\beta}}^*(x) {\varphi^*}^{1/q}(x) \right\|_p \dots\dots (12)$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned}
\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right\|_q &= \left\{ \int_0^{\infty} \left| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right|^q d\xi \right\}^{1/q} \\
&= \left\{ \int_0^{\infty} \left| P_m^*(\xi) (\xi^{\alpha} e^{-\xi^{\beta}}) \right|^q d\xi \right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left| P_m(x) \left((-x)^{\alpha} e^{-(-x)^{\beta}} \right) \right|^q d(-x) \right\}^{1/q}$$

$$= \left\{ \int_{0}^{\infty} \left| P_{\mathrm{m}}(x) \mathrm{w}_{\alpha\beta}{}^*(\mathrm{x}) \right|^q dx \right\}^{1/\mathrm{q}}$$

$$= \left\| P_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}) \mathrm{w}_{\alpha\beta}{}^*(\mathrm{x}) \right\|_{\mathrm{q}}$$

أي :. $\left\| P_m^*(\xi) w_{\alpha\beta}(\xi) \right\|_q = \left\| P_m(x) w_{\alpha\beta}{}^*(x) \right\|_q \ldots\ldots (13)$

بتعويض $(\mathbf{13}), (\mathbf{12})$ في $(\mathbf{10})$ نجد أنه من أجل $x < 0$نحصل على (8) :

$$\left\| P_m w_{\alpha\beta}{}^* \varphi^{*1/q} \right\|_p \le k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{1/q - 1/p} \left\| P_m w_{\alpha\beta}{}^* \right\|_q$$

بتكرار الخطوات نفسها على طرفي المتراجحة $(\mathbf{11})$ نحصل على المتراجحة $(\mathbf{9})$.

نتيجة$(\mathbf{1})$:من المبرهنتين $(\mathbf{3})$ و $(\mathbf{4})$ نجد أن متراجحة نيكولسكي تعطى بالشكل :

$$\left\| P_m w_{\alpha\beta} \right\|_p \le k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{2/q - 2/p} \left\| P_m w_{\alpha\beta} \right\|_q \quad : \ x > 0 \ \ldots\ldots (14)$$

$$\left\| P_m w_{\alpha\beta}{}^* \right\|_p \le k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{2/q - 2/p} \left\| P_m w_{\alpha\beta}{}^* \right\|_q \quad : x < 0 \ldots\ldots\ldots. (15)$$

نتيجة(2) :لدينا $w_{\alpha\beta}(x) = x^{\alpha} e^{-x^{\beta}}$ و $w_{\alpha\beta}{}^*(x) = (-x)^{\alpha} e^{-(-x)^{\beta}}$

نلاحظ أنه إذا كانα, βعددينزوجيينفإن $w_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta}{}^*(x)$

ومنه ومن المتراجحتين $(\mathbf{14}), (\mathbf{15})$ في النتيجة $(\mathbf{1})$تصبح متراجحة نيكولسكي على كامل المحور الحقيقي باستثناء الصفر على الشكل الآتي :

$$\left\| P_m w_{\alpha\beta} \right\|_p \le k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{2/q - 2/p} \left\| P_m w_{\alpha\beta} \right\|_q \quad : \ x \in \mathbb{R} \ldots\ldots (16)$$

حيثk ثابت لا يعتمد على P_{m}, m, p, q .

نهتم فيما يلي بتعميم المتراجحة (1) من أجل حالات أخرى ل $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

نبرهن في البداية هذه المتراجحة من أجل $\varphi_1(x) = x$.

من أجل ذلك ندخل في دراستنا دالة الوزن $w_{\sigma\beta}$ الناتجة بضرب $w_{\alpha\beta}$ ب $\sqrt{x}$ أي:

$$w_{\sigma\beta} = x^{1/2} . w_{\alpha\beta} = x^{1/2} . x^{\alpha} e^{-x^{\beta}} = x^{\alpha + 1/2} e^{-x^{\beta}} = x^{\sigma} e^{-x^{\beta}}$$

أي أن : $w_{\sigma\beta} = x^{\sigma} e^{-x^{\beta}}$

وهي أيضا دالة وزن لاجير المعممة .

مبرهنة (6):

لتكن P_{m} كثيرة حدود اختيارية و $1 \le q < p \le \infty$.

عندئذ يوجد ثابت k غير متعلق بـP_m, m, p, qبحيث تتحقق المتراجحة الآتية :

$$\left\| P_m w_{\alpha\beta} \varphi_1{}^{1/q} \right\|_p \le k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}} \right)^{1/q - 1/p} \left\| P_m w_{\alpha\beta} \right\|_q \ldots\ldots\ldots (17)$$

حيث $\varphi_1(x) = x$ وذلك من أجل الحالتين:

1) $\alpha \geq 0$:$p = \infty$.

2) $\alpha > {}^{-1}/_{p}$: $p < \infty$.

البرهان:

لنفرض $I_{\mathrm{x}} = [\mathrm{x}, \mathrm{x} + \Delta_{\mathrm{m}}(\mathrm{x})]$ حيث $x > 0$ و $\Delta_m(x) = \frac{\sqrt{a_m}}{m}x$

في حالة $\alpha \geq 0$ و $p = \infty$ و $1 \leq q < \infty$

بتكرار الخطوات نفسهاالمتبعه في برهان المبرهنة (3) نصل إلى العلاقة :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} \varphi_1{}^{1/q}\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m} (\int_0^\infty \left|P'_m(t) w_{\alpha\beta}(t) \varphi_1(t)\right|^q dt^{1/q} \right] .. (18)$$

لدينا :

$$w_{\alpha\beta}(t)\varphi_1(t) = t^\alpha e^{-t^\beta}.t = t^{\alpha+1/2} e^{-t^\beta}.t^{1/2} = t^\sigma e^{-t^\beta}.t^{1/2} = w_{\sigma\beta}(t).\varphi(t)$$

نعوض في (18) نجد:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} \varphi_1{}^{1/q}\right\|_\infty \leq\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m} (\int_0^\infty \left|P'_m(t) w_{\sigma\beta}(t).\varphi(t)\right|^q dt)^{1/q} \right] ... (19)$$

باستخدام المبرهنة (2) نجد:

$$\left\|P_{\mathrm{m}} \mathrm{w}_{\alpha\beta} \varphi_1{}^{1/\mathrm{q}}\right\|_\infty \leq\leq \left(\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{a_m}}}\right)^{1/\mathrm{q}} \left[(\int_0^\infty \left|P_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) \mathrm{w}_{\alpha\beta}(\mathrm{t})\right|^{\mathrm{q}} \mathrm{dt})^{1/\mathrm{q}} + C \frac{\sqrt{\mathrm{a_m}}}{\mathrm{m}} . \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{a_m}}} (\int_0^\infty \left|P_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) \mathrm{w}_{\sigma\beta}(\mathrm{t})\right|^{\mathrm{q}} \mathrm{dt})^{1/\mathrm{q}} \right] ... (20)$$

بتعويض $\mathrm{w}_{\sigma\beta} = x^{1/2}.\mathrm{w}_{\alpha\beta}$ في(20) يكون لدينا:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} \varphi_1{}^{1/q}\right\|_\infty \leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[\left\|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right\|_q + C (\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t).\varphi(t)\right|^q dt)^{1/q} \right]$$

$$= \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q + CI \right] .... (21)$$

باستخدام متراجحة هولدر على التكامل I من أجل $r = 1 , r' = \infty$ نجد :

$$I^q = \int_0^\infty \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right|^q . |\varphi(t)|^q dt \le$$
$$\le \left(\int_0^\infty \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^1 . \|\varphi(t)\|_\infty^q = C_1 \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^q$$

ومنه يكون :(22) .…. … … $I \le C_1 \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q$

نعوض في $(\mathbf{21})$ نجد :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty \le \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q + C_2 \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q\right]$$

أي أن:(23) … … … $\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty \le k_1 \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q$

وهي المتراجحة (1) في حالة $\alpha \ge 0$ ‏ $p = \infty,$ و $\varphi_1 = x$.

- في حالة $1 \le q < p < \infty$ و $\alpha \ge {-1}/{p}$يكون لدينا:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_p^p = \left\|\left|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right|^{p-q} \left|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right|^q\right\|_1$$

باستخدام متراجحة هولدر من أجل $r = 1 \,, r' = \infty$ نجد :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_p^p = \left\|\left|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right|^{p-q} \left|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right|^q\right\|_1$$
$$\le \left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty^{p-q} . \left(\int_0^\infty \left|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right|^q (x) dx\right)^1$$
$$= \left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty^{p-q} . \left(\int_0^\infty \left|P_m w_{\alpha\beta}\right|^q . \left|{\varphi_1}^{1/q}\right|^q (x) dx\right)^1$$

بتطبيق متراجحة هولدر مرة أخرى نجد :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_p^p \le \left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty^{p-q} . \left(\int_0^\infty \left|P_m w_{\alpha\beta}\right|^q (x) dx\right)^1 . \|\varphi_1(x)\|_\infty$$
$$= C_3 \left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_\infty^{p-q} . \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^q$$

منه ومن المتراجحة $(\mathbf{23})$ نجد :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_p^p \le C_3 . k \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{{p-q}/{q}} \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^{p-q} . \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^q$$

أي أن :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi_1}^{1/q}\right\|_p \le k_2 \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q - 1/p} \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \text{ … … … } (24)$$

وهي المتراجحة (1)في حالة$1 \le q < p < \infty$ و $\alpha \ge {-1}/{p}$و $\varphi_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

الآن سنقوم بتعميم المتراجحة (1) والمتراجحة (17) من أجل $\varphi(x) = x^{l/n}$ ‏ : $\forall n, l \in \mathbb{N}$

من أجل ذلك نعرف دالة وزن جديدة $w_{\delta\beta}$ حيث:

$$w_{\delta\beta} = x^{l/n - 1/2} . w_{\alpha\beta} = x^{l/n - 1/2} . x^\alpha e^{-x^\beta} = x^{\alpha + l/n - 1/2} e^{-x^\beta} = x^\delta e^{-x^\beta}$$

أي أن : $w_{\delta\beta} = x^\delta e^{-x^\beta}$وهي أيضا دالة وزن لاجير المعممة .

مبرهنة (7):

لتكن P_{m} كثيرة حدود اختيارية و $1 \leq q < p \leq \infty$.

عندئذ يوجد ثابت kغير متعلق بـP_{m}, m, p, q بحيث يتحقق:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi^*}^{1/q}\right\|_p \leq k\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q-1/p} \left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \dots\dots\dots (25)$$

حيث $\varphi^* = x^{l/n}$

وذلك من أجل الحالتين:

$.(1p = \infty: \qquad \alpha \geq 0$

$. \quad (2p < \infty : \quad \alpha > {-1}/_p$

البرهان:

- في حالة $\alpha \geq 0$و $p = \infty$ و $1 \leq q < \infty$

بتكرار الخطوات نفسها المتبعه في برهان المبرهنة (6) نصل إلى العلاقة :

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi^*}^{1/q}\right\|_\infty$$

$$\leq\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q} \left[\left(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m}\left(\int_0^\infty \left|P'_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\varphi^*(t)\right|^q dt\right.^{1/q}\right]$$

$$= \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q + \frac{\sqrt{a_m}}{m} I_1\right] \dots\dots\dots..(26)$$

لدينا :

$$w_{\alpha\beta}(t)\varphi^*(t) = t^\alpha e^{-t^\beta}.t^{l/n} = t^{\alpha+l/n-1/2} e^{-t^\beta}.t^{1/2} = t^\delta e^{-t^\beta}.t^{1/2} = w_{\delta\beta}(t).\varphi(t)$$

نعوض في I_1 نجد:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi^*}^{1/q}\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^{1/q} + \frac{\sqrt{a_m}}{m}\left(\int_0^\infty \left|P'_m(t) w_{\delta\beta}(t).\varphi(t)\right|^q dt\right.^{1/q}\right] \dots (27)$$

من المبرهنة (2) نجد:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta} {\varphi^*}^{1/q}\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^{1/q} + C\frac{\sqrt{a_m}}{m}.\frac{m}{\sqrt{a_m}}\left(\int_0^\infty \left|P_m(t) w_{\delta\beta}(t)\right|^q dt\right.^{1/q}\right]$$

منه ومن كون $\mathrm{w}_{\alpha\beta} = \mathrm{t}^{l/n-1/2}.\mathrm{w}_{\alpha\beta}$يكون لدينا:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{*1/q}\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left\|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right\|_q + C\left(\int_0^\infty \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t).\, t^{l/n-1/2}\right|^q dt\right)^{1/q}\right]$$

$$= \left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q}\left[\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q + CI_2\right] \dots.(28)$$

باستخدام متراجحة هولدر على التكامل I_2 من أجل $r = 1\,, r' = \infty$ نجد أن :

$$I_2{}^q = \int_0^\infty \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right|^q.\left|t^{l/n-1/2}\right|^q dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \left|P_m(t)w_{\alpha\beta}(t)\right|^q dt\right)^1.\left\|t^{l/n-1/2}\right\|_\infty^q = C_4\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q^q$$

ومنه يكون :

$$I_2 \leq C_4\left\|P_\mathrm{m} \mathrm{w}_{\alpha\beta}\right\|_\mathrm{q} \dots\dots\dots.(29)$$

من (29)و(28) ينتج أن :

$$\left\|P_\mathrm{m}\mathrm{w}_{\alpha\beta}\varphi^{*1/\mathrm{q}}\right\|_\infty \leq k_3\left(\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{a_m}}}\right)^{1/\mathrm{q}}\left\|P_\mathrm{m}\mathrm{w}_{\alpha\beta}\right\|_\mathrm{q} \dots\dots\dots(30)$$

وهي المتراجحة (1) في حالة $\alpha \geq 0$ و $p = \infty,$ $\varphi^*(x) = x^{l/n}$.

- في حالة $1 \leq q < p < \infty$ و لدينا$\alpha \geq -1/p$:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{*1/q}\right\|_p^p = \left\|\left|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{*1/q}\right|^{p-q}\left|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{*1/q}\right|^q\right\|_1$$

بتكرار الخطوات المتبعة في هذه الحالة من المبرهنة (6) واستخدام متراجحة هولدر مرتين نجد أن:

$$\left\|P_m w_{\alpha\beta}\varphi^{*1/q}\right\|_p \leq k_4\left(\frac{m}{\sqrt{a_m}}\right)^{1/q-1/p}\left\|P_m w_{\alpha\beta}\right\|_q \dots\dots\dots(31)$$

وهي المتراجحة (1) في حالة$1 \leq q < p < \infty$ و $\alpha > -1/p$و $\varphi^* = x^{l/n}$.

ملاحظة(1):

في حال كان $\frac{l}{n} = \frac{1}{2}$ فإننا نحصل على المبرهنة (3) .

ملاحظة(2):

في حال كان $l = n$ نحصل على المبرهنة (6) .

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى إثبات بعض المتراجحات من نوع نيكولسكي من أجل كثيرات الحدود ويمكن أن نثبت هذه المبرهنات من أجل أسر أخرى من الدوال مثل أسرة الدوال الصحيحة أو أية أسرة أخرى .

المراجع:

[1]-GUVEN,A; ISRAFILOV,D-M . Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces. J.Korean Math soc,45,No6,2008,1535-1548.

[2]-G.Mastroianni and J.Szabados . polynomial approximation on the real semiaxis with generalized Laguerre weights. STUDIA UNIV ."BaBes – Bolyai", Mathematica,volume LII ,Number 4, December 2007.

[3]- G.Mastroianni .polynomial inequalities ,functional space and best approximation on the real semiaxis with generalized Laguerre weights .KENT STATE UNIV.volume 14 ,142-151,2002.