مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (26) العدد (3)2004
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (26) No (3) 2004

توليد مجموعات من المتتاليات الايزومورفية لمتتاليات Walsh

الدكتور أنور اللحام*
الدكتور محي الدين ايناخ**
أحمد حمزة الشيخة***

(قبل للنشر في 2004/9/7)

□ الملخّص □

تشكل مجموعة متتاليات Walsh من الرتبة 2^k (حيث k صحيح موجب) زمرة جمعية مولدة بمتتاليات Rademacher من الرتبة K، وباستثناء المتتالية الصفرية، فإن مجموعة متتاليات Walshهذه تشكل مجموعة متعامدة .

يسمح هذا البحث بتوليد 2^{k-2} مجموعة من المتتاليات، كل من هذه المجموعات مكافئة لمجموعة متتاليات Rademacher من الرتبة k العدد نفسه من المجموعات الايزومورفية لمتتاليات Walsh الموافقة.

* أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة دمشق – دمشق – سوريا .

** أستاذ باحث في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا – دمشق – سوريا .

*** طالب دكتوراه – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق– دمشق–سوريا .

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (26) العدد (3)2004
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (26) No (3) 2004

Isomorphic Sequences Sets
Generation of the Walsh Sequences

Dr. Anwar Allaham *
Dr. Mohiy Al dinWainakh**
Ahmad Al cheikha ***

(Accepted 7/9/2004)

□ ABSTRACT □

Walsh sequences of the order 2^k (where k is an integer number) form an additive group generated by Rademacher sequences set of (k – order). Except for the zero sequence Walsh sequences form orthogonal set.

Our present work allows us to generate 2^{k-2} set of sequences. Each of these set is equivalent to the Rademacher sequences set of k – order, and of that related to Walsh sequences.

*** Prof. Department Of Math – Faculty Of Sciences-Damascus University -Syria.**
****Prof. Of Higher Inst. For Application And Technique. Sciences- Damascus - Syria.**
*****Ph.D Student - Department Of Math. – Faculty -Of Sciences-Tishreen University-Lattakia - Syria.**

تعاريف ومبرهنات أساسية:

∗ تعاريف أساسية:

تعريف (1): تسمى مجموعة التوابع $\left(f_i\right)_{i\in I}$ المستمرة جزئياً (partial continuous) على المجال (0,T) متعامدة (Orthogonal) ومنظمة (Normalized) وتامة (Complete) فيما إذا حققت الشروط التالية:

1- التعامد:
$$\int_0^T f_i(t).f_j(t)\,dt=0; i,j\in I, i\neq j$$

2 - منظمة:
$$\int_0^T f_i^2(t)\,dt=T, \forall i\in I$$

3- تامة: يمكن تقريب أي تابع مستمر جزئياً على (0, T) بعبارة خطية في هذه التوابع [1].

تعريف (2): توابع "Rademacher" من الرتبة K $\{R_n(t)\ ;\ t\in(0,T), n=1,2,...., \log_2 N=K\}$ هي مجموعة من التوابع عددها ($1+\log_2 N$) كل منها مؤلف من $N=2^k$ نبضة تأخذ القيم:1، 1− في المجال (0, T) وتعين بالعلاقة: $R_n(t)=\text{sgn}(Sin2^n\pi t), t\in(0,T), n=1,2,...., \log_2 N=K$

حيث:
$$\text{sgn}(x)\ \underline{\underline{\Delta}}\ \begin{cases}-1\ ;\ for\ \ x\prec 0\\ \ 0\ ;\ for\ \ x=0\\ \ 1\ ;\ for\ \ x\succ 0\end{cases}$$

وتبنى بالشكل التالي:

- $R_0(t)$ يأخذ القيمة "1" على كامل المجال.
- $R_1(t)$ يأخذ القيمة "1" على النصف الأيسر من المجال و"1−" على النصف الأيمن منه والقيمة "0" في منتصفه وعلى طرفيه.
- $R_2(t)$ يأخذ القيمة "1" على الربعين الأول والثالث و"1−" على الربعين الثاني والرابع من المجال ويأخذ القيمة "0" من أجل t =0,T/4,T/2,3T/4,T وهكذا بشكل متتالي يقسم كل مجال جزئي إلى نصفين وتكرر القيم "1" على النصف الأيسر و"1−" على النصف الأيمن و"0" في المنتصف وعلى الطرفين. وهي توابع متعامدة، وتمثل على شكل متتاليات إثنينية (Binary) باستخدام التمثيل المنطقي التالي $0\leftarrow"1"$ و $1\leftarrow"-1"$ أو $\left(0\leftarrow"-1"\right.$ و $\left.1\leftarrow"1"\right)$.

مثال (1):

متتاليات "Rademacher" من أجل K=3 و K=4 هي:

R_0= (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0) R_0=(0 0 0 0 0 0 0
0)
R_1= (0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1) R_1=(0 0 0 0 1 1 1
1)
R_2= (0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1) R_2=(0 0 1 1 0 0 1
1) R_3= (0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1) R_3=(0 1 0 1 0 1 0

1) R_4= (0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1)

متتاليات .Rad من الرتبة(3)   متتاليات .Rad من الرتبة(4)   [1]

تعريف (3): بفرض $X=(x_0x_1....x_{n-1})$ و $Y=(y_0y_1.....y_{n-1})$ متجهين على $GF(2)=\{0,1\}$ طولاهما "n" يعين الارتباط بين X و Y ويرمز له بـ $R_{X,Y}$ بالعلاقة:

حيث x_i+y_i يحسب بـ mod 2 ; $R_{X,Y}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{x_i+y_i}$

ويساوي عدد المركبات المتقابلة المتساوية مطروحاً منه عدد المركبات المتقابلة المختلفة. [2]

تعريف(4): بفرض G مجموعة من المتجهات الاثنينية (Binary vector) التي طولها n أي :

$G=\{X; X=(x_0x_2....x_{n-1}), x_i\in F_2=\{0,1\}, i=\{0,...,n-1\}$ و $0^*=1$ و $1^*=-1$

تسمى G متعامدة (Orthogonal set) إذا حققت الشرطين التاليين:

1. $\forall X\in G: \sum_{t=0}^{n-1}x^*\in\{-1,0,1\}$

أي عدد الواحدات في X يختلف عن عدد الأصفار بواحد على الأكثر.

2. $\forall X,Y\in G, X\neq Y: \sum x_i^*y_i^*\in\{-1,0,1\}$

أي ان عدد العناصر المتقابلة والمتساوية بين Y,X يساوي عدد العناصر المتقابلة والمختلفة او يختلف عنه بواحد **[1]**.

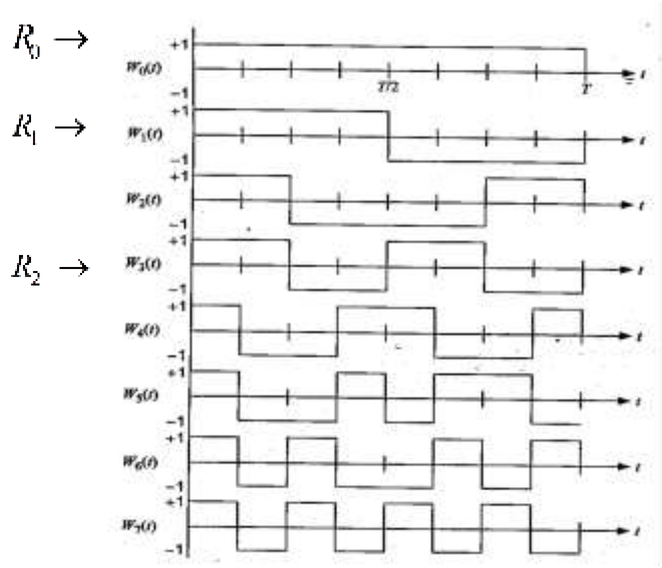
مقدمة:

في 1923 نشر (J.L.Walsh) بحثاً بعنوان "مجموعة مغلقة من التوابع المنظمة والمتعامدة "Aclossed Set of Normal Orthogonal Functions". والتي عرف فيها مجموعة من التوابع المتعامدة والمنظمة والتامة على المجال **(0,1)**.

لقد بقي تصنيف توابع Walsh من الرتب المختلفة $N=2^k$ كمسألة صعبة حتى عام 1970 حيث نشر "Byrnes" و" Swick " بحثاً بعنوان: "توابع Walsh الحالية" "Instant Walsh Function" شرحوا فيه طرقاً للحصول على توابع walsh بواسطة توابع Rademacher أو بواسطة بعض المعادلات التفاضلية وذلك بالاعتماد على الخواص التناظرية لتوابع walsh والتي تعرف الآن بتوابع walsh من الرتبة N كمجموعة يشار لها $\{W_J(t), t\in(0,T), J=0,1,...,N-1\}$ بالشكل التالي:

- $W_J(t)$ يأخذ القيم **{+1,-1}** باستثناء قفزات يأخذ عندها القيمة صفر
- $W_J(0)=1$ من أجل جميع قيم J
- $W_J(t)$ يغير إشارته بالضبط J مرة (التقاطعات الصفرية)
- في المجال **(0,T)** $\int_0^T W_J(t).W_K(t)dt=\begin{cases}0, J\neq k\\ T, J=k\end{cases}$
- كل تابع $W_J(t)$ يكون إما فردياً أو زوجياً بالنسبة لنقطة منتصف المجال وترتب هذه التوابع بحسب عدد مرات تغير الإشارة $\{W_0(t), W_1(t),....., W_J(t),...W_{n-1}(t)\}$ وأن مجموعة التوابع هذه

تشكل مجموعة ضربية. يمثل الشكل (1) توابع Walsh من الرتبة "8 " .



$R_3 \rightarrow$ **شكل (1) توابع Walsh من الرتبة 2^3=8**

إن متتاليات Walsh من الرتبة 2^k والتي تنتج من التمثيل الإثنيني لتوابع Walsh من الرتبة $N=2^k$ تشكل زمرة جمعية حيث جمع الحدود يتم بـ"mod 2" وأن مجموعة المتتاليات هذه باستثناء W_0 تشكل مجموعة متعامدة.تبين الجداول (1) و(2) و(3) متتاليات Walsh من الرتب 2^4,2^3, 2^2 على الترتيب:

جدول(1) 2^2=4 من الرتبة Walsh متتاليات

Index Sequence	Walsh Sequence Of order $4=2^2$
0 0	W_0=0 0 0 0
0 1	W_1= 0 0 1 1
1 0	W_2= 0 1 1 0
1 1	W_3= 0 1 0 1

جدول(2) 2^3=8 من الرتبة Walsh متتاليات

Index Sequence	Walsh Sequence Of order $8=2^3$
0 0 0	W_0 =0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1	W_1 = 0 0 0 0 1 1 1 1
0 1 0	W_2 = 0 0 1 1 1 1 0 0
0 1 1	W_3 = 0 0 1 1 0 0 1 1
1 0 0	W_4 = 0 1 1 0 0 1 1 0
1 0 1	W_5 = 0 1 1 0 1 0 0 1
1 1 0	W_6 = 0 1 0 1 1 0 1 0
1 1 1	W_7 =0 1 0 1 0 1 0 1

جدول(3)=16 من الرتبة Walsh متتاليات

Walsh Sequence
$W_0 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$W_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$
$W_2 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$W_3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$
$W_4 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$
$W_5 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$
$W_6 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$
$W_7 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$
$W_8 = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$
$W_9 = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)$
$W_{10} = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$
$W_{11} = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$
$W_{12} = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$
$W_{13} = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$
$W_{14} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$
$W_{15} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$

إن الطرق العامة لتوليد توابع أو متتاليات Walsh هي:

1- بوا سطة توابعRademacher .
2- باستخدام مصفوفات Hadamard. [3]
3- بالاستفادة من الصفات التناظرية لتوابع Walsh. [4,2]
4- هدف البحث وأهميته:إن توابع Walsh (أو متتالياته) تستخدم على مدى واسع كمجموعات متعامدة في خطوط الاتصال الأمامية "Forward Link" وخطوط الاتصال العكسية " Inverse Link” لقنوات الاتصال في أنظمة CDMA خاصة نظام IS-95 وفي أقنية إرشاد السفن "Pilot channels" وفي أقنية التزامن "Sync channels" وفي الأقنية التجارية " Traffic channels". [5]

يهدف هذا البحث إلى توليد 2k-2 مجموعة من المتتاليات المكافئة لمجموعة متتاليات Rademacher من الرتبة k ونفس العدد من المجموعات الإيزومورفيه لمجموعة متتاليات Walsh الموافقة بواسطة حلقة تقسيم (Division ring) ومن ثم إيجاد صيغ تدريجية لتوليد هذه المتتاليات بعيداً عن متتاليات (Raaf, Slant) ومزيجهم . كما أن هذه المجموعات ليست سوى أشكال مختلفة إيزومورفية لمصفوفة Hadamard .

خطة البـحث:

أولاً:

1 – **توليد متتاليات Walsh بواسطة حلقة القسمة**

لنأخذ حلقة القسمة $(Z/mZ,+,\cdot)$ حيث $m=2^k$ مرفقة بالعمليتين :

$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$ $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{x\cdot y}$ & حيث $\overline{x}$ يرمز للمرافقة اليسارية (left coset) (أو اليمينية أو صف تكافؤ x بالمقاس mod m) ويفرض :

$$\psi : Z/mZ=\left\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{2^K-1}\right\}\to Z_{2^K}=\left\{0,1,2,\ldots 2^K-1\right\}$$

حيث: $\psi(\overline{X})=X$ ، إن ψ ايزومورفيزيم و $Z_2^{\,k}$ تشكل حلقة تعطى عملية الضرب المعرفة عليها بالجدول(4)

جدول (4) نواتج عملية الضرب على $Z_2^{\,k}$

•	0	1	2	3	4	…	2^{k-1}	$2^{k-1}+1$	…	2^k-1
0	0	0	0	0	0	…	0	0	…	0
1	0	1	2	3	4	…	2^{k-1}	$2^{k-1}+1$	…	2^k-1
2	0	2	4	6	8	…	0	2	…	2^k-2
3	0	3	6	9	12	…	2^{k-1}	3	…	2^k-3
4	0	4	8	12	16	…	0	4	…	2^k-4
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^{k-1}	0	2^{k-1}	0	2^{k-1}	0	…	0	2^{k-1}	…	2^{k-1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^k-1	0	2^k-1	2^k-2	2^k-3	2^k-4	…	2^{k-1}	$2^{k-1}-1$	…	1

بترتيب الأسطر من الأعلى للأسفل $h_0, h_1, \ldots, h_{2^k-1}$ والأعمدة من اليسار إلى اليمين $C_0, C_1, \ldots, C_{2^k-1}$ نجد أن:

* السطر h_0 جميع عناصره أصفار و h_1 يحوي جميع عناصر الحلقة بالترتيب.

* السطر h_2 مضاعف h_1 ويحوي جميع مضاعفات العدد 2 بالترتيب مكررة مرتين أو 2^1 مرة.

* السطر $h_{2^2}=h_4$ مضاعف h_2 ويحوي جميع مضاعفات العدد 4 بالترتيب مكررة أربع مرات أو 2^2 مرة.

بالتكرار نجد أن السطر $t=1,2,3,\ldots\ldots,k-1$; h_{2^t} ينتج من السطر $h_{2^{t-1}}$ بمضاعفة نواتجه وان $h_{2^{k-1}}$ يحوي(2^{k-1} 0) مكررة 2^{k-1} مرة اما h_{2^k} فانه يطابق السطر الصفري.

بفرض المصفوفة $\omega_k^{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ والتي عناصرها من Z_{2^k} و

$$\omega_k^{(1)}=\begin{bmatrix}h_{2^0}\\ h_{2^1}\\ \cdot\\ h_{2^{k-1}}\end{bmatrix}$$

فإن $\omega_k^{(1)}$ يمكن الحصول عليها بشكل تدريجي بالعلاقة

$$\omega_k^{(1)}=\begin{bmatrix} & h_1 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\omega^{(1)}{}_{k-1} & \vdots & 2\omega^{(1)}{}_{k-1}\end{bmatrix};k\geq 2$$

لنعرف التطبيق:

$$\chi . z_{2^k} \rightarrow \{0,1\} ; \chi\left(\{0,1,2,.......,2^{k-1}-1\}\right)=0 ; \chi\left(\{2^{k-1},.........,2^k-1\}\right)=1$$

بفرض أن صورة المصفوفة $H=\lfloor a_{i\,j} \rfloor_{n,m}$ والتي عناصرها من Z_{2^K} وفق χ هي المصفوفة $\lfloor \chi(a_{i\,j}) \rfloor_{n,m}$ و $\chi(h_i)=H_i$ وبحساب صورة الجدول(4) وفق χ نحصل على التمثيل الاثنيني لنواتج عملية الضرب المعرفة على Z_{2^K}. بفرض $(S)^K=\left(\overbrace{SS.........S}^{k\ \text{مرة}}\right)$ وبملاحظة ان كل عملية مضاعفة لـ h_1 (ضرب بـ 2) تنصف في التمثيل الاثنيني كل مجال صفري (جميع عناصره أصفار) أو واحدي (جميع عناصره واحد) إلى نصفين النصف الأيسر صفري والنصف الأيمن واحد نجد أن

$$* H_0=(0)^{2^K} \qquad ; H_1=\left((0)^{2^{K-1}}(1)^{2^{K-1}}\right)$$

$$* H_2=\left((0)^{2^{K-2}}(1)^{2^{K-2}}\right)^{2^1} ; H_4=H_{2^2}=\left((0)^{2^{K-3}}(1)^{2^{K-3}}\right)^{2^2}$$

....

$$* H_{2^t}=\left((0)^{2^{K-t-1}}(1)^{2^{K-t-1}}\right)^{2^t}, t=0,.............,k-2$$

$$* H_{2^{K-1}}=(0 \quad 1)^{2^{K-1}} \qquad ; H_{2^K}=(0)^{2^K}$$

إن الأسطر $H_1, H_{2^1},.......,H_{2^{K-1}}$ متطابقة مع متتاليات Rademacher $R_1,R_2,.........,R_K$ وهي متتاليات فردية (العناصر المتقابلة بالنسبة للوسط متخالفة) ومستقلة خطياً ويمكن الحصول عليها بشكل تدريجي من المصفوفة $W_k^{(1)}=\chi\left(\omega_k^{(1)}\right)$ حيث :

$$W_K^{(1)}=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_{2^1} \\ H_{2^2} \\ \vdots \\ H_{2^{K-1}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & H_1 & \\ ....\,... & \vdots & ....\,...... \\ W_{K-1}^{(1)} & \vdots & W_{K-1}^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overbrace{0........0}^{2^{k-1}\ \text{مرة}} & \overbrace{1........1}^{2^{k-1}\ \text{مرة}} \\ .... & ....\,..... \\ & \vdots \\ W_{k-1}^{(1)} & W_{k-1}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad K\geq 2$$

حيث $W_1^{(1)}=[0 \quad 1]$ والتي تسمى مصفوفة البذرة .

إن $W_K^{(1)}$ مصفوفة مولدة (Generator matrix) لمتتاليات Walsh من الرتبة 2^k والتي نرمز لها $\zeta_k^{(1)}$ وذلك بأخذ جميع العبارات الخطية لأسطر $W_K^{(1)}$ (أو متتاليات Rademacher).

إن الدراسة التطبيقية على $Z_{2^k} ; k=2,3,4,5,6$ أظهرت أن التمثيل الإثنيني لجدول الضرب على Z_{2^k} يحوي من متتاليات Walsh بالإضافة للسابقة، فقط المتتاليات:

$H_{2^{K-1}+2^\ell}=H_{2^{K-1}}+H_{2^l}$, $\ell=0,........,k-2, H_0=R_0$ أي فقط الأسطر التي هي عبارات خطية لأسطر $W_K^{(1)}$ وبالتالي عدد متتاليات Walsh في جدول التمثيل الاثنيني هو $2k$ فقط .

مثال: من اجل $m = 2^4$ فإن $Z_{2^4} = \{0,1,2,...,15\}$ والجدول (5) يمثل نواتج الضرب على هذه الحلقة والجدول (6) يعطي التمثيل الاثنيني لهذه النواتج

جدول (5) نواتج عملية الضرب في Z_{2^4}

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	2	4	6	8	10	12	14	0	2	4	6	8	10	12	14
3	0	3	6	9	12	15	2	5	8	11	14	1	4	7	10	13
4	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
5	0	5	10	15	4	9	14	3	8	13	2	7	12	1	6	11
6	0	6	12	2	8	14	4	10	0	6	12	2	8	14	4	10
7	0	7	14	5	12	3	10	1	8	15	6	13	4	11	2	9
8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8
9	0	9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14	7
10	0	10	4	14	8	2	12	6	0	10	4	14	8	2	12	6
11	0	11	6	1	12	7	2	13	8	3	14	9	4	15	10	5
12	0	12	8	4	0	12	8	4	0	12	8	4	0	12	8	4
13	0	13	10	7	4	1	14	11	8	5	2	15	12	9	6	3
14	0	14	12	10	8	6	4	2	0	14	12	10	8	6	4	2
15	0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$$\omega_4^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \dddot{0} & \dddot{2} & \dddot{4} & \dddot{6} & \dddot{8} & \overset{\cdots\cdots}{10} & \overset{\cdots\cdots}{12} & \overset{\cdots\cdots}{14} & \dddot{0} & \dddot{2} & \dddot{4} & \dddot{6} & \dddot{8} & \overset{\cdots\cdots}{10} & \overset{\cdots\cdots}{12} & \overset{\cdots\cdots}{14} \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

جدول (6) التمثيل الاثنيني لنواتج عملية الضرب في Z_{2^4}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
7	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
9	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
10	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
11	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
13	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
14	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
15	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

$$W_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{0........0}^{2^3 \text{ مرة}} & \overbrace{1........1}^{2^3 \text{ مرة}} \\ \multicolumn{2}{c}{........................} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ W_3^{(1)} & W_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

2 – <u>المصفوفة المولدة لمتتاليات Walsh حسب ترتيب الأدلة</u>

ان ترقيم متتالياتWalsh حسب الأدلة المتزايدة يرتبط بتناظر المتتاليات بالنسبة للنقاط: $T/2^i, i=1,....,k$. لنفرض أن الأدلة هي : $X_j, j=0,....,2^k-1$ حيث:

$$X_j = x_{j1}2^{k-1} + x_{j2}2^{k-2} + ... + x_{jk}2^0$$

عندئذ التمثيل الاثنيني لـ X_j هو: $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk})$ وأن متتالية Walsh المقابلة لـ X_j هي W_j عندئذ اذا كان $x_{ji}=1$ فان W_j متتالية Walsh المقابلة يكون تناظرها فرديا بالنسبة للنقطة $T/2^{k+1-i}$ وإذا كان $x_{ji}=1$ فان التناظر يكون زوجيا بالنسبة لهذه النقطة. فمثلا من أجل متتاليات Walsh من الرتبة 2^4 نجد أن :

$$X_{13} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1), W_{13} = \quad 1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0$$

فأن: $x_{j1}=1$ يستلزم التناظر فردي بالنسبة للنقطة T/16

$x_{j2}=1$ يستلزم التناظر فردي بالنسبة للنقطة T/8

$x_{j3}=0$ يستلزم التناظر فردي بالنسبة للنقطة T/4

$x_{j4}=1$ يستلزم التناظر فردي بالنسبة للنقطة T/2

T/16 T/8 T/4 T/2

0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

أن جمع تناظرين متقابلين متماثلين (فرديين أو زوجيين) هو تناظر زوجي، وأن جمع تناظرين متقابلين متخالفين (أحدهما فردي والآخر زوجي) هو تناظر فردي .

لنأخذ المصفوفة الواحدية I_{KxK}، إن أسطر هذه المصفوفة على الترتيب من الأعلى إلى الأسفل هي: $X_{2^{k-i}}, i=1,...,k$ تشكل قاعدة لـ F_2^k .

إن مجموعة متتاليات Walsh من الرتبة 2^k تشكل فضاء متجها على F_2 عدد أبعاده k .

لنأخذ المصفوفة G_W التي أسطرها متتاليات Walsh المقابلة للأدلة $X_{2^{k-i}}, i=1,...,k$ والمتوافقة مع الأسطر $H_{2^{k-i}}$ ، هذه المتتاليات مستقلة خطيا وبالتالي G_W تشكل مصفوفة مولدة لمجموعة متتاليات Walsh من الرتبة 2^k ، فإذا فرضنا أن :

$X_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk}) = x_{j1}X_{2^{k-1}} + x_{j2}X_{2^{k-2}} + ... + x_{jk}X_{2^0}, j \in \{0,...,2^k-1\}$ و W_j متتالية Walsh الموافقة عندئذ:

$$W_j = [x_{j1}.....x_{jk}]G_W, j=0,1,....,2^k-1=N$$

مثال :

لنأخذ متتاليات Walsh من الرتبة 2^4 نجد أن :

$$X_8 \to H_{2^3} = W_8 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 00\ 1\ \ 1\ 00\ 1\ 1\ 0$$
$$X_4 \to H_{2^2} = W_4 = 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$$
$$X_2 \to H_{2^1} = W_2 = 0\ \ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ \ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$1\,X_1 \to H_{2^0} = W_1 = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 0$$

وبالتالي :

$$G_W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

لتعيين W_{13} نجد أن: $W_{13} = X_{13} G_{13}$

$$W_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{13} = [\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ ]$$

ثانياً: بفرض أن :

$$\varphi_\alpha : Z_{2^K} \to Z_{2^K}\ ; \varphi_\alpha(X) = \alpha\, X; \alpha = 2\ell - 1 \in Z_m ; 1 < \alpha \le 2^{K-1} - 1$$

أي أن :

$$\alpha = 2\ell - 1 \text{ و } \ell = 2\text{و}3 \ldots\ldots\ldots\ldots 2^{k-2}$$

إن φ_α ايزمورفيزم زمرة يحافظ على عملية الضرب الخارجية (حيث ننظر إلى الضرب على Z_{2^k} كعملية خارجية مؤثراتها Z_{2^k} نفسها) وذلك أن:

$$\varphi_\alpha(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha\, x + \alpha\, y = \varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(y)$$
$$\varphi_\alpha(ax) = \alpha(ax) = a(\alpha\, x) = a\varphi_\alpha(x) \quad ; \quad a \in Z_2 k$$
$$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\alpha^{-1}}$$

بفرض: $\varphi_\alpha\left(\left[a_{i\,j}\right]_{n,m}\right) = \left[\varphi_\alpha\left(a_{i\,j}\right)\right]_{n,m} ; a_{i\,j} \in Z_{2^k}$

فان: $\varphi_\alpha\left(\omega_k^{(1)}\right) = \alpha\omega_k^{(1)}$ وبفرض $\alpha\omega_k^{(1)} = \omega_k^{(\ell)}$

$$\varphi_\alpha\left(\omega_k^{(1)}\right)=\omega_k^{(\ell)}=\begin{bmatrix}\alpha h_1\\ \alpha h_{2^1}\\ .\\ .\\ .\\ \alpha h_{2^{k-1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_\alpha\\ h_{\alpha 2^1}\\ .\\ .\\ .\\ h_{\alpha 2^{k-1}}\end{bmatrix}$$

حيث الأدلة تحسب بالمقاس 2^k $(\mathrm{mod}\ \ 2^k)$

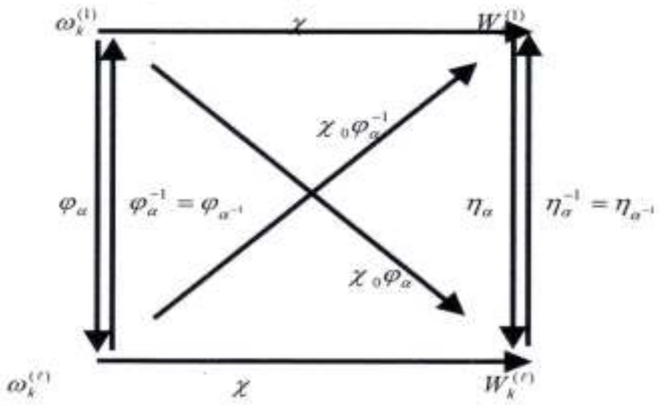
$$\omega_k^{(\ell)}=\begin{bmatrix} & h_\alpha & \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots\\ 2\alpha\omega_{k-1}^{(1)} & \vdots & 2\alpha\omega_{k-1}^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & h_\alpha & \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots\\ 2\alpha\omega_{k-1}^{(\ell)} & \vdots & 2\alpha\omega_{k-1}^{(\ell)}\end{bmatrix}$$

$$\chi\left(\omega_k^{(\ell)}\right)=W_K^{(\ell)}=\begin{bmatrix}H_\alpha\\ H_{\alpha 2^1}\\ \vdots\\ \vdots\\ H_{\alpha 2^{K-1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & H_\alpha & \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots\\ W_{K-1}^{(\ell)} & \vdots & W_{K-1}^{(\ell)}\end{bmatrix}\ ,\quad K\ge 2\quad \ell=2,3,\dots\dots,2^{k-2}$$

حيث $W_1^{(\ell)}=[0\quad 1]$ تسمى مصفوفة البذرة بالتناظر في الشكل (1) نرى ان اسطر $W_k^{(\ell)}$ تشكل مجموعة متعامدة متقابلة مع $W_k^{(1)}$ (و $W_k^{(1)}$فردية) $W_k^{(\ell)}$ مصفوفة مولدة لمجموعة متتاليات متعامدة نرمز لها $\xi_k^{(\ell)}$ ايزومورفية لـ $\xi_k^{(1)}$ وهي مؤلفة من جميع العبارات الخطية لأسطر $W_k^{(\ell)}$ كما ان جدول التمثيل الاثنيني لنواتج الضرب في Z_{2^K} يحوي من عناصر $\xi_k^{(1)}$ فضلا عن السطر الصفري وأسطر $W_k^{(\ell)}$ فقط الأسطر:

$$H_{\alpha\left(2^{K+1}+2^\ell\right)}=H_{\alpha 2^{K-1}}+H_{\alpha 2^\ell}\ ,\ \ell=0,1,\dots\dots\dots\dots,2^{k-2}$$

وهي زوجية (العناصر المتقابلة بالنسبة للوسط متساوية)



الشكل (1) التقابل بين $W_k^{(1)}$ و $W_k^{(\ell)}$

<u>ملاحظة:</u> إذا كان H_α غير موجود في $W_{k-1}^{(\ell)}$ فإنه يستبدل بـ H_t حيث $\alpha=t\left(\mathrm{mod}\,2^{k-1}\right)$

<u>مبرهنة:</u> كل من مجموعة المتتاليات $W_k^{(\ell)};\ell=2,\dots\dots\dots,2^{k-2}$ مكافئة (تقابلية) لمجموعة المتتاليات $W_k^{(1)}$.

البرهان: لنأخذ التطبيق $\eta_\alpha : W_k^{(1)} \to W_k^{(\ell)}; \eta_\alpha\left(H_{2^i}\right) = H_{\alpha 2^i}, i = 0,.........., k-1$

حيث $\alpha = 2\ell - 1$ إن η_α تطبيق متباين(injection)وغامر (surjection) وبالتالي تقابل (bijection)

ومعكوسه (inverse) هو $\eta_\alpha^{-1} = \eta_{\alpha^{-1}}$.

مبرهنة: $\xi_k^{(l)}$ ايزومورفية لـ $\xi_k^{(1)}$.

البرهان: نمدد η_α على $\xi_k^{(1)}$ بالشكل التالي :

$$H_{2^i}, H_{2^j} \in \xi_k^{(1)} \Rightarrow \eta_\alpha(H_{2^i} + H_{2^j}) = \eta_\alpha(H_{2^i}) + \eta_\alpha(H_{2^j})$$

حيث تجمع حدود المتتاليات بالمقاس 2.

تطبيق: بالعودة للمثال 1 والجدول (5) نواتج عملية الضرب في Z_{2^4} والجدول (6) التمثيل الاثنيني لهذه النواتج نجد أن :

$$\omega_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ \hline 0 & 6 & 12 & 2 & 8 & 14 & 4 & 10 & 0 & 6 & 12 & 2 & 8 & 14 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$W_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\xi_4^{(2)} =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	r_1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	r_2
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	r_3
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	r_4
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	r_1+r_2
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	r_1+r_3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	r_1+r_4
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	r_2+r_3
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	r_2+r_4
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	r_3+r_4
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	$r_1+r_2+r_3$
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	$r_1+r_2+r_4$
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	$r_1+r_3+r_4$

0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	$r_2+r_3+r_4$
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	$r_1+r_2+r_3+r_4$

كما أن :

$$\omega_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 4 & 9 & 14 & 3 & 8 & 13 & 2 & 7 & 12 & 1 & 6 & 11 \\ \hline 0 & 10 & 4 & 14 & 8 & 2 & 12 & 6 & 0 & 10 & 4 & 14 & 8 & 2 & 12 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 & 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$W_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بشكل مشابه ننشئ $\xi_4^{(3)}$ كما في $\xi_4^{(2)}$ وأن:

$$\omega_4^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 & 5 & 12 & 3 & 10 & 1 & 8 & 15 & 6 & 13 & 4 & 11 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$W_4^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بشكل مشابه ننشئ $\xi_4^{(4)}$ كما في $\xi_4^{(2)}$.

إن المجموعات $\xi_4^{(4)}$، $\xi_4^{(3)}$، $\xi_4^{(2)}$، $\xi_4^{(1)}$ مختلفة عن بعضها مثنى مثنى وعلى الرغم من وجود عناصر مشتركة فيما بينها.

ثالثاً : أ- من أجل $\alpha > 2^{k-1}-1$, $\alpha = 2\ell - 1$ فإن المجموعات $\xi_k^{(\ell)}$ المتشكلة تنطبق على أحد المجموعات $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, ..., \xi_k^{(2^k-2)}$.

مثال: من أجل $\alpha = 9$ أي $\ell = 5$ نجد :

$$\omega_4^{(5)}=\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}0&9&2&11&4&13&6&15&8&1&10&3&12&5&14&7\\ \hline 0&2&4&6&8&10&12&14&0&2&4&6&8&10&12&14\\0&4&8&12&0&4&8&12&0&4&8&12&0&4&8&12\\0&8&0&8&0&8&0&8&0&8&0&8&0&8&0&8\end{array}\right]$$

$$W_4^{(5)}=\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\end{array}\right]$$

عن اسطر $W_4^{(5)}$ كلها منتمية لـ $\xi_4^{(1)}$ وبالتالي فإن $\xi_4^{(5)}$ منطبقة على $\xi_4^{(1)}$ وبشكل مشابه نجد أن $\xi_4^{(6)}$ منطبقة على $\xi_4^{(2)}$، و $\xi_4^{(7)}$ منطبقة على $\xi_4^{(3)}$، و $\xi_4^{(8)}$ منطبقة على $\xi_4^{(4)}$.

ب – من اجل α زوجي نحصل على مجموعات متعامدة جزئية من المجموعات $\xi_K^{(1)},\xi_K^{(2)},......\xi_K^{(2^{K-2})}$.

النتائج:

بفرض $Z_m=\{0,1,...,2^k-1\}\approx Z/mZ$ حيث $m=2^k$, $\chi:Z_m\to\{0,1\}$ بحيث $\chi\left(\{2^{k-1},...,2^k-1\}\right)=1$ و $\chi\left(\{0,1,....,2^{k-1}-1\}\right)=0$ و h_i السطر المقابل لـ $i\in Z_m$ و $\chi(h_i)=H_i$ التمثيل الاثنيني لـ h_i و $\omega_K^{(1)}$ مصفوفة عناصرها من Z_m حيث :

$$\omega_k^{(1)}=\begin{bmatrix}h_{2^0}\\h_{2^1}\\ \cdot\\h_{2^{k-1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & h_1 & \\ .... & \vdots & .... \\ 2\omega_{k-1}^{(1)} & \vdots & 2\omega_{k-1}^{(1)}\end{bmatrix};k\geq 2 \quad , \quad , \omega_1^{(1)}=[0\ 1]$$

وبفرض أن $\chi(\omega_k^{(1)})=W_K^{(1)}$ فإن :

$$W_K^{(1)}=\begin{bmatrix}H_1\\H_{2^1}\\H_{2^2}\\ \vdots\\H_{2^{K-1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & H_1 & \\ .... & \vdots & .... \\ W_{K-1}^{(1)} & \vdots & W_{K-1}^{(1)}\end{bmatrix}, \quad K\geq 2, W_K^{(1)}=[0\quad 1]$$

فإن $W_K^{(1)}$ مولدة لـ $\xi_K^{(1)}$ متتاليات Walsh من الرتبة 2^k وأسطر $W_K^{(1)}$ متطابقة بالترتيب مع R_1,R_2,R_3,R_4 متتاليات Rademacher من الرتبة k

2. التمثيل الاثنيني لجدول الضرب على Z_m يحوي من متتاليات Walsh بالاضافة لـ $H_0 = R_0$ فقط المتتاليات:

$H_{2^{K-1}+2^{\ell}} = H_{2^{K-1}} + H_{2^{\ell}}\ ,\ell = 0,...,2^{K-2}$ وعدد متتاليات Walsh في الجدول هو 2^k

3-بفرض

$$\varphi_\alpha : Z_m \to Z_m, \varphi_\alpha(x) = \alpha x, \alpha = 2\ell - 1 \in Z_m, 1 < \alpha \le 2^{k-1} - 1$$

أي $\ell = 2,3,...,2^{k-2}$ وبفرض: $\varphi_\alpha(\omega_k^{(1)}) = \omega_k^{(l)}$ فإن :

$$\omega_k^{(\ell)} = \begin{bmatrix} h_\alpha \\ h_{\alpha 2^1} \\ . \\ . \\ . \\ h_{\alpha 2^{k-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & h_\alpha & \\ .... & \vdots & .... \\ 2\alpha\omega_{k-1}^{(1)} & \vdots & 2\alpha\omega_{k-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & h_\alpha & \\ .... & \vdots & .... \\ 2\omega_{k-1}^{(\ell)} & \vdots & 2\omega_{k-1}^{(\ell)} \end{bmatrix}, K \ge 2$$

$$\ell = 2,3,...,2^{k-2}$$

وبفرض $\chi(\omega_K^{(\ell)}) = W_K^{(\ell)}$ فإن:

$$W_K^{(\ell)} = \begin{bmatrix} H_\alpha \\ H_{\alpha 2^1} \\ \vdots \\ \vdots \\ H_{\alpha 2^{K-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & H_\alpha & \\ .... & \vdots & .... \\ W_{K-1}^{(\ell)} & \vdots & W_{K-1}^{(\ell)} \end{bmatrix}, \quad K \ge 2 \quad \ell = 2,3,.......,2^{k-2}$$

حيث: $W_1^{(\ell)} = [0\ \ 1]$

و φ_α تقابل بين أسطر $\omega_K^{(1)}$ وأسطر $\omega_K^{(\ell)}$ و $\eta_\alpha : H_i \to H_{\alpha i}$ تقابل بين $\omega_K^{(1)}$ و $[0\ \ 1] = W_1^{(\ell)}$ وبفرض $\xi_K^{(\ell)}$ الزمرة الجمعية المولدة من $W_K^{(\ell)}$ فإن $\xi_K^{(\ell)}$ ايزومورفية مع $\xi_K^{(1)}$.

4- التمثيل الاثناني لجدول الضرب يحوي من $\xi_K^{(\ell)}$ فضلا عن الأسطر $W_K^{(\ell)}$ السطر الصفري وفقط الأسطر

$$H_{\alpha 2^{K-1}+\alpha 2^{\ell}} = H_{\alpha 2^{K-1}} + H_{\alpha 2^{\ell}}\ ,\ell = 0,...,2^{K-2}$$

5- إن المجموعات $\xi_K^{(\ell)}$ ليست سوى أشكال مختلفة إيزومورفية لمصفوفة Hadamard .

المراجع:

....

1- Lee d. s & Miller L. E- 1998- *CDMA Engineering Hand Book*- Artech House. Bostsn ,London

2- Yang K. ; kg Kim Y & Kumar P. J-2000- *Quasi-orthognal Sequences for Code -Division -Multiple- Access Systems* IEEE- Trans. information theory vol 46 No 3 pp 982-993

3- Mac WILIAMS, F. G & SLOANE N. G. A. 1978-*the theory of Error- correcting Codes*- North-Holland, Amsterdom.

4- Yang S.C-1998- *CDMA RF System Engineering*- Artech House. Boston - London.

5-BEAUCHAMP,K.G,1984-*Applications of Walsh And Related Functions with an Introduction to sequency Theory* –ACADEMIC PRESS INC.(LONDON) LTD.