مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (26) العدد (3)2004
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (26) No (3) 2004

خوارزمية لإيجاد التماثل (Isomorphism) بين بيانين هاملتونيين

الدكتور جبران جبران*
صلاح إسماعيل محمد **

(قبل للنشر في 2004/10/3)

□ الملخّص □

تدرس هذه المقالة خوارزمية لإيجاد التماثل بين بيانين هاملتونيين G1، G2 تعتمد هذه الخوارزمية على تمثيل البيان وفقاً لمسار طويل. يعطي هذا التمثيل للبيان خواص مثل التوازي والتقاطع بين الأضلاع وتظهر هذه الصفات بشكل واضح في مصفوفة التجاور. وهناك خواص للمسارات الطويلة مثل: المسارات الطويلة المتراتبة والمسارات الطويلة المتقاطعة وغير المتقاطعة. سنستخدم في خوارزميتنا هذه خوارزمية ويليم كوكي وباك–تشينغ لي(لإيجاد المسار الأطول) حيث سنقدم شرحاً مفصلاً لها قبل عرضها ضمن خوارزمية التماثل المنشودة. إن هذه الخوارزمية تدرس التماثل على بيانات هاملتون وتأتي أهمية هذه الخوارزمية من اختبار كشف بيانات هاملتون والذي ينص على أن كل البيانات G التي تحقق العلاقة $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}, \forall v \in V(G)$ [1,2] هي بيانات لهاملتون أي أن بيانات هاملتون هي البيانات التي يكون فيها عدد الأضلاع كبيراً بالنسبة لعدد الرؤوس في البيان.

* مدرس في قسم الرياضيات في كلية العلوم بجامعة دمشق –دمشق–سوريا.
** طالب ماجستير دراسات عليا في نظرية البيان في جامعة دمشق –دمشق–سوريا.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (26) العدد (3)2004
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (26) No (3) 2004

An Algorithm for Graph Isomorphism

Dr. Jobran Jobran *
Salah Mohammad**

(Accepted 3/10/2004)

☐ ABSTRACT ☐

This paper explains a new algorithm for isomorphic graphs. The algorithm depends on William kocay and Pak-ching Li's algorithm (for Finding a Long Path in a Graph). The paper says that if we have two graphs G_1 *and* G_2 represented according to a long path, in every one, we can find the isomorphism between them by using certain properties of edges and other properties of long paths. It discusses the concepts :Parallel edges, degree ordering long paths and intersected long paths. It also defines two operations on long paths called: replacement operation and injection operation, which give a long path from another one intersected with it .

***Lecturer, Department Of Mathematics, Faculty Of Science, University Of Damascus-Damascus - Syria.**
****Postgraduate Student, Department Of Mathematics, Faculty Of Science In University Of Damascus-Damascus-Syria.**

1. تمثيل بيان G وفقاً لأطول مسار فيه :

تعريف 1.1: ليكن G بياناً ما حيث $V(G)$ مجموعة رؤوسه و $E(G)$ مجموعة أضلاعه نعرف مصفوفة التجاور للبيان G بأنها المصفوفة $A=(a_{ij})$ [1,2]حيث:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \ v_i v_j \in E(G) \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases}$$

تعريف 2.1 [1]: نقول عن متتالية من الرؤوس $v_1 v_2 v_3 \ldots\ldots v_l$ إنها تشكل مساراً P طوله $l-1$ في G إذا تحقق ما يلي:

1. $v_i = v_j \Leftrightarrow i = j$ وذلك من أجل $1 \le i, j \le l$

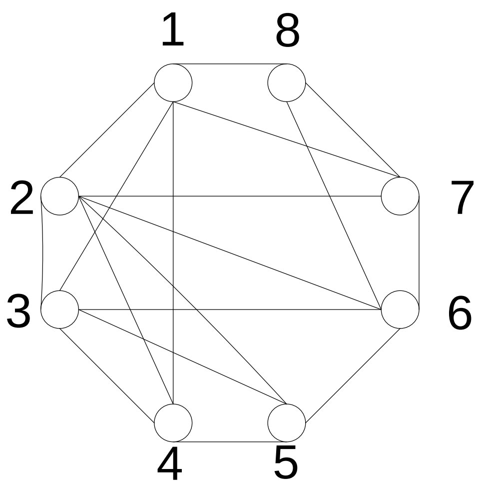
2. $v_i v_{i+1} \in E(G)$ حيث $1 \le i \le l$.

تعريف 3.1 [1] : ليكن G بياناً ما و $V(G)$ مجموعة رؤوسه وليكن $P: v_1 v_2 v_3 .....v_l$ نقول عن P إنه المسار الأطول في G (أو مسار هاملتوني) إذا تحقق $l = n$ حيث $|V(G)| = n$ وبنفس الشكل نعرف الحلقة الهاملتونية C بأنها مسار طويل يحقق: $v_1 = v_l$ و نقول عن G إنه بيان هاملتونتي أو بيان لهاملتون إذا احتوى حلقة هاملتونية واحدة على الأقل[1,2].
ستقتصر دراستنا هذه على بيانات هاملتون، ولكننا لن نتعرض للاختبارات التي تحدد بيانات هاملتون وذلك يعود إلى أن خوارزمية وليم كوكي وباك–تشينغ لي تشكل اختباراً كافياً لتحديد هذه البيانات [3].

تعريف 4.1: ليكن G بياناً لهاملتون نقول عن G إنه مرقم أو ممثل بالنسبة لمسار طويل P إذا تحقق:
1. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$.
2. $P: v_1 v_2 v_3 .....v_n$ هو مسار طويل في G وبحيث يكون v_1 في أحد طرفي P و v_n في طرفه الآخر نسمي v_1 بداية المسار الطويل و v_n نهايته [1,2] ؛ ونقول إن P مرقم من 1 إلى $|V(G)|$.

تعريف 5.1: ليكن G بياناً ممثلاً بالنسبة لمسار طويل $P: v_1 v_2 v_3 .....v_n$ حيث $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ ولتكن $A(a_{ij})$ مصفوفة التجاور لـ G نقول عن الضلعين $e_1, e_2 \in E(G)$ من الشكل $e_1 = v_i v_j, e_2 = v_{i+1} v_{j-1}$ إنهما متوازيان ويكون عندئذ $a_{ij} = a_{i+1\,j-1} = 1$ ، ونقول عن الضلعين $e_1, e_2 \in E(G)$ من الشكل $e_1 = v_i v_j, e_2 = v_{i+1} v_{j+1}$ إنهما متقاطعتان ويكون عندئذ $a_{ij} = a_{i+1\,j+1}$ ويكون الضلعان في هذه الحالة قطرين للرباعي $v_i v_{i+1} v_j v_{j+1}$.

مثال 6.1: ليكن البيان G المبين في الشكل التالي :



الشكل 1: يبين البيان G ممثلاً بالنسبة للمسار الطويل $p: v_1 v_2 v_3 ....v_n$

الممثل بالنسبة للمسار الأطول $p: v_1 v_2 v_3 ....v_n$ ونلاحظ فيه $v_1 v_8, v_2 v_7, v_3 v_6, v_4 v_5$ هي

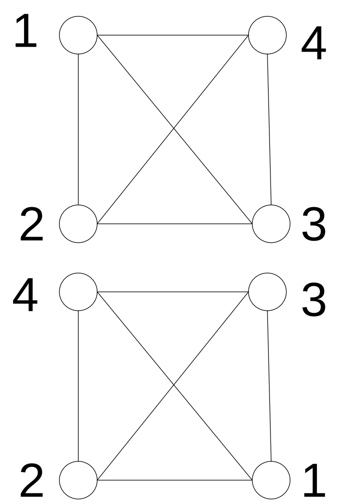
أضـلاع متوازيـة ونـلاحظ أيضـاً v_1v_3 , v_2v_4 همـا متقاطعتـان أو قطـران للربـاعي $v_1v_2v_3v_4$ ولـدينا أيضـاً v_1v_4 , v_2v_5 همـا ضـلعان متقاطعـان ويشـكلان قطـرين للربـاعي $v_1v_2v_4v_5$ ولنكتـب مصـفوفة التجـاور لهـذا البيان:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	1	1	1	0	0	1	1
v_2	1	0	1	1	1	1	1	0
v_3	1	1	0	1	1	1	0	0
v_4	1	1	1	0	1	0	0	0
v_5	0	1	1	1	0	1	0	0
v_6	0	1	1	0	1	0	1	1
v_7	1	1	0	0	0	1	0	1
v_8	1	0	0	0	0	1	1	0

نلاحظ أن عناصر الوتر الموازي للقطر الرئيسي كلها 1 وهذا يعود إلى تمثيل البيان وفقاً لمسار طويل ونلاحظ أن عناصـر القطر الثانوي كلها 1 وذلك يعود إلـى توازي الأضـلاع $v_1v_8 , v_2v_7 , v_3v_6 , v_4v_5$ وجعل الترقيم يبدأ مـن الطرف الأيسر للضـلع الأول. علماً أن هذه المجموعـة مـن الأضـلاع تشـكل مجموعـة متوازيـة أعظمية أي أنه لا توجد مجموعة أخرى من الأضلاع المتوازية رتبتها أكبر من رتبة هذه المجموعة.

ملاحظـة: يمكن للأضـلاع المتوازيـة فـي بيـان G ممثل وفقاً لمسار طويل فيـه P أن تصـبح متقاطعة والمتقاطعة تصبح متوازية في البيان نفسه إذا مثل بالنسبة لمسار طويل آخر P_1 أي أن الأضـلاع المتوازيـة (المتقاطعـة) بالنسبة لتمثيل ما للبيان وفقاً لمسار طويل فيه يمكن أن تصبح متقاطعة (متوازية) بالنسبة لتمثيل للبيان وفقاً لمسار طويل آخر

مثال 7.1: ليكن البيان G المبين في الشكل2:



الشكل 2: يبين البيان G ممثلاً في الأعلى بالنسبة للمسار الطويل $P_1 : v_1v_2v_3v_4$

وفي الأسفل بالنسبة للمسار الطويل $P_2 : v_4v_2v_1v_3$

$$\begin{array}{c|cccc} & v_4 & v_2 & v_1 & v_3 \\ \hline v_4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

مصفوفة التجاور لـG بالنسبة لـ P_2

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

مصفوفة التجاور لـG بالنسبة لـ P_1

نلاحظ من الشكل أن البيان ممثل بالنسبة للمسار الأطول $P_1: v_1v_2v_3v_4$ ولدينا v_1v_4 , v_2v_3 ضلعان متوازيان بالنسبة لـ p_1 ولكنهما متقاطعان بالنسبة للمسار الأطول $P_2 : v_4v_2v_1v_3$ كما يتضح ذلك من مصفوفتي التجاور. ولكن وفي كل الحالات تشكل كل من مجموعة الأضلاع المتوازية ومجموعة الأضلاع المتقاطعة وصلاً للبيان وبذلك تكون لدينا النتيجة التالية :

نتيجة 8.1: يمكن الحصول على الوصل الأعظمي للبيان من تحديد مجموعات الأضلاع المتوازية (المتقاطعة) الأعظمية .

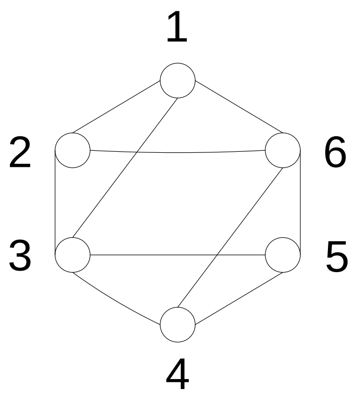
في الحقيقة إن هذه النتيجة هامة جداً وذلك لوجود خوارزمية لـ Nauty [4] وهي خوارزمية لإيجاد التماثل بين بيانين باستخدام مجموعة الوصل الأعظميMaximum matching [1,2] . ولكن ليس هذا فقط ما يهمنا في المسارات الطويلة، وإنما أيضاً خواص أخرى لهذه المسارات ستساعدنا في استخدام خوارزمية ويليم كوكي وباك–تشينغ لي (لإيجاد المسار الأطول) لإيجاد التماثل بين بيانين ما. وهذا ما سندرسه في البند التالي :

2. خواص المسارات الطويلة:

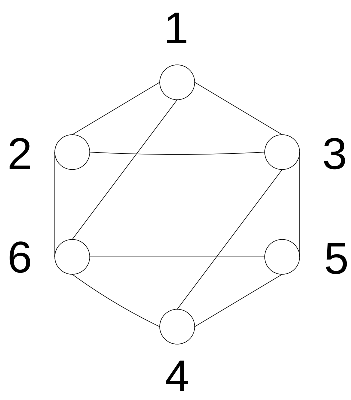
سنضع في هذا البند تعاريفاً متعلقة بخواص هامة للمسار الأطول ستساعد في استخدام هذا المفهوم في إثبات تماثل بيانين .

تعريف 1.2: ليكن لدينا بيان ما G و P_1 , P_2 مسارين طويلين في G نقول عن P_1 , P_2 إنهما متكافئان إذا كان لـ G نفس التمثيل بالنسبة لهما (أي إذا كتبنا مصفوفتي التجاور لـ G بالنسبة لـ P_1 وبالنسبة لـ P_2 كانت هاتان المصفوفتان متساويتين رياضياً [5]) .

مثال 2.2: ليكن G هو البيان الموضح في الشكل التالي:



a



b

الشكل 3: يبين البيان في a ممثلاً بالنسبة للمسار الطويل P_1:123456 وفي b بالنسبة للمسار الطويل P_2:126453

نلاحظ في الشكل (3,a) البيان G كما هو ممثل بالنسبة للمسار الطويل P_1:123456 وفي الشكل(3.b) وفقاً للمسار الأطول P_2:126453 وتكون مصفوفتي التجاور لـ G بالنسبة لـ P_1 وبالنسبة لـ P_2 :

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

مصفوفة التجاور لـG بالنسبة لـP_1

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

مصفوفة التجاور لـG بالنسبة لـ P_2

نلاحظ أن مصفوفتي التجاور بالنسبة لـ P_1 وبالنسبة لـ P_2 متساويتان وبالتالي فإن P_1 , P_2 متكافئان .

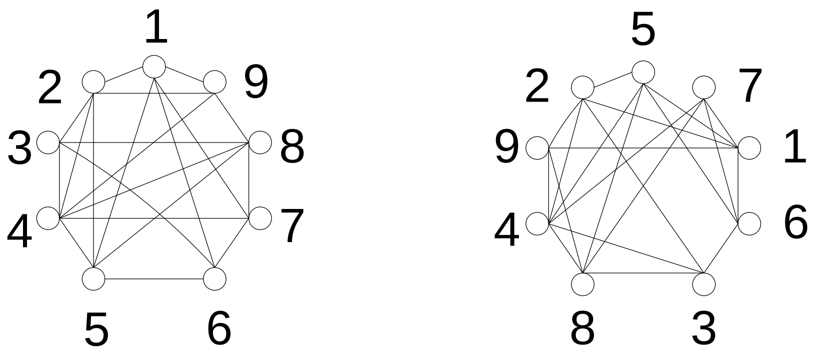
تعريف 3.2: ليكن p_1 , p_2 مسارين طويلين في بيان G نقول إن p_1 , p_2 متراتبان أو إن P_1 متراتب درجياً (وباختصار نقول مراتبين) مع P_2 (أو إن له نفس التتالي الدرجي أو لهما نفس التتالي الدرجي) إذا أمكن إعادة ترقيم P_2 من أحد طرفيه بحيث يصبح للرؤوس المتقابلة مع رؤوس P_1 (التي لها نفس الدليل) درجات متساوية أي إذا كان لرأس من P_1 نفس الدليل لرأس من P_2 فإن لهما نفس الدرجة .

تمهيدية 4.2: ليكن G بياناً ما و p_1 , p_2 مسارين طويلين فيه عندئذ إذا كان p_1 , p_2 متكافئين فإنهما متراتبان درجياً .

البرهان: لنفرض جدلاً أن p_1 , p_2 متكافئين وغير متراتبين. بما أن p_1 , p_2 متكافئين فإن مصفوفتي التجاور لـ G بالنسبة لـ p_1 , p_2 متساويتان، ولكن بما أنهما غير متراتبين فإنه يوجد دليل i بحيث يكون من أجله $\deg(v_i) \neq \deg(u_i)$; $v_i \in P_1$, $u_i \in P_2$ وبفرض أن $\deg(v_i) \geq \deg(u_i)$ $\Leftarrow$ السطر i في مصفوفة التجاور لـ G بالنسبة لـ P_1 يحوي خانات أكثر مدخلاتها 1 أي أنه لا يساوي السطر ذا الدليل نفسه من مصفوفة التجاور لـ G بالنسبة لـ P_2 وبالتالي فإن المصفوفتين غير متساويتين وهذا تناقض. وبالتالي فإن p_1 , p_2 متراتبين وهو المطلوب.

ملاحظة 4.2: ليس كل مسارين طويلين متراتبين متكافئان ، والمثال التالي يوضح صحة ذلك .

مثال 5.2: ليكن البيان G الممثل في الشكل4 :



a b

الشكل4: يبين في a البيان G **ممثلاً بالنسبة للمسار الطويل** $P_1:v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9$ **وفيb بالنسبة للمسار الطويل**
$P_2:v_5v_2v_9v_4v_8v_3v_6v_1v_7$

في الشكل 4 نجد أن G ممثل في a وفقاً للمسار الأطول $P_1:v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9$ والتتالي الدرجي لهذا المسار هو $5,5,4,6,5,4,4,5,4$. وفي b نجد G ممثلاً وفقاً للمسار الأطول $P_2:v_5v_2v_9v_4v_8v_3v_6v_1v_7$ والتتالي الدرجي لـ P_2 هو $5,5,4,6,5,4,4,5,4$ وهو نفسه التتالي الدرجي لـ P_1 ولكن لهذا البيان تمثيلين مختلفين بالنسبة لهذين المسارين ويظهر ذلك من الشكل4 .

و بشكل أكثر وضوحاً لدينا مصفوفة التجاور لـ G بالنسبة لـ P_1 :

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
v_2	1	0	1	1	1	0	0	0	1
v_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	0	1	0	1	1	1
v_5	1	1	0	1	0	1	0	1	0
v_6	1	0	1	0	1	0	1	0	0
v_7	1	0	0	1	0	1	0	1	0
v_8	0	0	1	1	1	0	1	0	1
v_9	1	1	0	1	0	0	0	1	0

و مصفوفة التجاور لـ G بالنسبة لـ P_2 :

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & v_5 & v_2 & v_9 & v_4 & v_8 & v_3 & v_6 & v_1 & v_7 \\
v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
v_9 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

نلاحظ أن مصفوفتي التمثيل غير متساويتين وبالتالي فإن التمثيلين مختلفان .

تعريف 6.2: ليكن G بياناً ما وليكن P_1 , P_2 مسارين طويلين في G نقول عن P_1 , P_2 إنهما غير متقاطعين إذا لم يشتركا بأي ضلع [2].

نظرية 7.2: ليكن G بياناً ما عدد رؤوسه n ، إن عدد المسارات الطويلة غير المتقاطعة في G هو $\frac{n}{2}$

البرهان: لنفرض أن عدد المسارات الطويلة في G هو m ، إن عدد الأضلاع في كل مسار طويل هو تماماً $n-1$ [1,2]ضلع وبالتالي فإن عدد الأضلاع في هذه المسارات هو $m(n-1)$ وهو أقل من $\frac{n(n-1)}{2}$ = عدد الوصلات في البيان الكلي [1,2]. وبالتالي فإن $m \le \frac{n}{2}$.

تعريف 8.2: ليكن G بياناً ما ولتكن p_1 , p_2 , p_3 مسارات طويلة فيه نقول عن p_3 إنه متشابك مع p_1 , p_2 إذا كان مشكلاً من أضلاع من p_1 ومن p_2 وكان p_1 , p_2 منفصلان.

نظرية 9.2: ليكن G بياناً ما، إذا كان في G $\frac{n}{2}-1$ مساراً طويلاً منفصلاً يصل بين الرأسين u , v فإنه يحوي بياناً جزئياً تاماً رتبته $n-2$.

البرهان: ليكن G هذا البيان عندئذ يرتبط u بـ $\frac{n}{2}-1$ رأساً مختلفاً ويرتبط v أيضاً بـ $\frac{n}{2}-1$ رأساً مختلفاً مختلفة تماماً عن تلك التي يرتبط بها u (وإلا لما كان لدينا $\frac{n}{2}-1$ مساراً منفصلاً) بحذف u , v تحذف الأضلاع المتداخلة مع كل منهما ويبقى لكل رأس $2(\frac{n}{2}-1)-1=n-3$ ضلعاً وبالتالي فإن البيان الناتج عن حذف u , v هو بيان تام رتبته $n-2$.

سنعرف عمليتين على مسار p من بيان G ما ، تعطينا هاتان العمليتان مسارات متقاطعة مع هذا المسار ويمكننا الحصول على أي مسار متقاطع مع p بتطبيق إحدى هاتين العمليتين أو لكليهما معاً عدداً كافياً من المرات :

عملية الاستبدال: ليكن لدينا المسار الطويل p نقول عن الرأسين v_i , v_j منه إنهما قابلان للمبادلة فيما بينهما إذا أمكن وضع v_i بين v_{j-1} , v_{j+1} ووضع v_j بين v_{i-1} , v_{i+1} ويتحقق ذلك في حال كان لدينا:

$v_i\, v_{j-1}\,,\, v_i\, v_{j+1} \quad,\quad v_j\, v_{i-1}\,,\, v_j\, v_{i+1} \;\in\; E(G)$.

عملية الزرع: ليكن لدينا المسار p من البيان G نقول عن الرأس v_i إنه قابل للزرع بين رأسين متتابعين $v_j\,,\,v_{j+1}$ إذا تحقق : $v_{i-1}\,v_{i+1} \quad,\quad v_i\,v_j\,,\,v_i\,v_{j+1} \;\in\; E(G)$

في الحقيقة يمكن توسيع عمليتي الاستبدال والزرع بين الرؤوس في مسار طويل p من بيان G إلى عمليتي استبدال بين مسار ورأس (أو زرع مسار بين رأسين) أو استبدال بين مسارين. نرمز لمجموعة الرؤوس المتبادلة مع الرأس v في المسار p بـِ $R(v/p)$ (وهي الرؤوس التي يمكن إجراء عملية استبدال بينها وبين الرأس v). ومجموعة الرؤوس الثابتة مؤلفة من الرؤوس u التي تحقق $R(u/p)=\phi$.

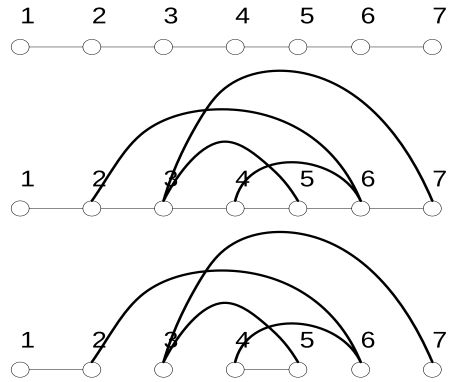
خوارزمية الاستبدال: ليكن G بياناً ما ، و P_1, P_2 مسارين طويلين في G ، وليكن P_2 ناتجاً عن P_1 بالاستبدال بين الرأسين i, j . ولنضع خوارزمية الاستبدال :

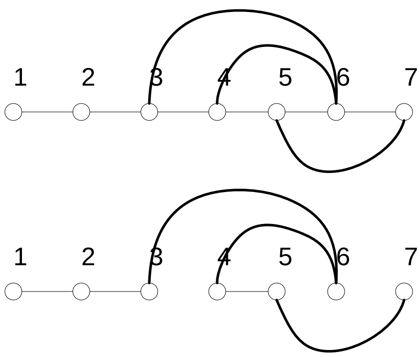
- أولاً : إذا كان $j = i+1$
  - إذا كان $i\,j+1\,,\,i-1\,j \in E(G)$ نبدل موقعي i, j في P_1 فنحصل على P_2
  - و إلا الاستبدال غير ممكن
- ثانياً إذا كان $i \neq j+1 \vee j \neq i+1$

1. إذا كان $i\,j+1\,,\,i\,j-1\,,\,i-1\,j\,,\,i+1\,j \in E(G)$ نبدل موقعي i, j في P_1 فنحصل على P_2
2. و إلا الاستبدال غير ممكن .

انتهت الخوارزمية.

مثال 10.2: ليكن المسار الطويل $P:1,2,3,4,5,6,7$ إن الشكل التالي يوضح عمليتي الاستبدال والزرع





الشكل 5: يوضح عمليتي الاستبدال والزرع ، ففي الأعلى عندما نبادل بين الرأسين 6 , 3 نحصل من $P:1,2,3,4,5,6$ على المسار الطويل $P_1:1,2,6,4,5,3,7$ ، وعند زرع الرأس 6 بين الرأسين 4 , 3 نحصل من P على المسار الطويل (في الأسفل) $P_2:1,2,3,6,4,5,7$

نظرية 11.2: ليكن G بياناً ما رتبته n فيه p_2 , p_1 مساران طويلان متقاطعان عندئذ يمكن الحصول على p_2 من p_1 (والعكس صحيح) بتطبيق عملية الاستبدال n مرة على الأكثر .

ملاحظة: إن عمليتي الاستبدال والزرع تعطينا المسارات الطويلة المتقاطعة مع مسار طويل مفروض ولكننا لن نحاول البحث عن مسارين طويلين منفصلين بهذه الطريقة لأنها ستصبح مكلفة .كما إن تعريف هاتين العمليتين مستوحى من تعريف القاطع [3] .

3.خوارزمية التماثل :

سنقوم في هذا البند بدراسة خوارزمية إيجاد المسار الطويل لويليم كوكي وباك- تشينغ لي [3] مع شرح مفصل لها مع عرض للإجرائيات الخوارزمية الأساسية كما وردت في نص المقالة الأساسية(خوارزمية لإيجاد مسار طويل في بيان)[3]. تتألف هذه الخوارزمية من ثلاثة إجرائيات يتعلق الأول بإيجاد مسار طويل قدر الإمكان يمر من نقطة معينة. وسنعرض الآن هذه الإجرئيات:

1. الإجرائية الأولى[3]: وهي عملية بناء مسار طويل ما أمكن، يمر من نقطة x حيث سنرمز لعبارة x يجاور w بالشكل $x \to w$ [3] وتتلخص هذه الخطوة بالخوارزمية :

$u := x$, $v := x$;

$while\ \ \exists w \to v, w \notin P\ do$

$P := P + vw;$

$v := w;$

$end;$

$while\ \ \exists w \to u, w \notin P\ do$

$P := P + uw;$

$u := w;$

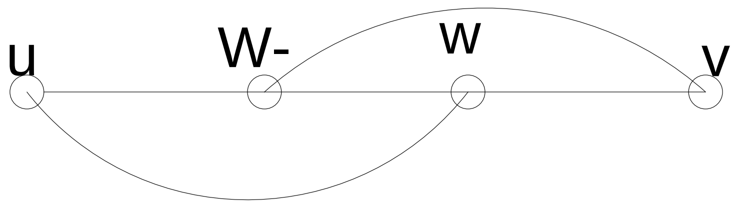
$end;$

قد نحصل من خلال هذا الإجراء على المسار الطويل المنشود. ولكن يتوقف هذا الإجراء عن العمل

عندما نصل إلى مسار $P=(u,.....,x,.....,v)$ حيث $V(P)\neq V(G)$ وتنتمي كل الرؤوس المجاورة لكل من u , v إلى $V(P)$ فقط أي لا يوجد خارج $V(P)$ أية رؤوس مجاورة لـ u , v. وفي مثل هذه الحالة ننتقل للعمل بالإجراء التالي:

2. الإجرائية الثانية[3]: ويقوم هذا الإجراء بإيجاد ذيل $trail$ (الذيل هو متتالية من الرؤوس بحيث توجد بين كل رأسين متتالين ضلع، ويمكن أن يتكرر الرأس أكثر من مرة دون تكرار للأضلاع) يرمز لهذا الذيل بـ Q ويسمى بـ القاطع ويحقق $P+Q=C$ حيث C حلقة تحقق $V(Q)\subseteq V(P)=V(C)$ والشكل التالي يوضح مثالاً عليه:

P :



الشكل 6: يبين مسار $P=(u,w-,w,v)$ **والقاطع** $Q=(u,w,w-,v)$ **وحلقي** $C=P+Q-w^{-}w$

يوضح الشكل 6 مساراً $P=(u,w-,w,v)$ وقاطعاً هو $Q=(u,w,w-,v)$ ونلاحظ أنه لدينا حلقة $C=P+Q-w^{-}w$ [3] .

تتلخص هذه الخطوة: بتحويل المسار P (الناتج من الإجراء الأول) إلى حلقة C لها نفس مجموعة الرؤوس ثم البحث عن مجاور y لأحد رؤوس C وليكن v_i عندئذ نحصل على مسار $P^{|}$ أطول من P بالعلاقة:

$$P^{|}:=C+v_i\,y-v_i\,v_{i-1} \quad [3]$$

و الخوارزمية لهذا الإجراء [3] :

$FindCrossover(w:vertex\ ,\ k:integer)$

{تمديد Q من نقطة w ، حيث أن الرتبة الحالية لـ Q هي k }

begin

Crossover:= False {نفرض عدم وجود القاطع }

If k>M exit

If w→v then {تحقق من أن Q+wv هو قاطع}

If so, set Crossover:= true, و اخرج

For all x → w, such that $x\in P-Q$, $x\neq w^{y}$, deg $(x,Q)\leq 2$ do

Begin

Q := Q + wx

If $x\neq v$ then if $x^{-}x\notin E(Q)$ then

Begin

```
             Q := Q + x  x⁻
             Find Crossover ( x⁻ , k + 1)
                If  Crossover := true then  exit
                 Q := Q – x  x⁻
        End
        If   x ≠ v  then if    (if x x^δ  ∉ E(G) then
             Begin
                   Q := Q + x x^δ
                    Find Crossover ( x^δ , k + 1)
                    If  Crossover := true then  exit
                     Q := Q – x  x^δ
               End
          Q := Q – wx
       End
 End { FindCrossover}
```

حيث x^{-} هو الرأس السابق لـ x و x^{δ} هو الرأس اللاحق لـ x

الإجرائية الثالثة: سنعرف الآن القطعة: ليكن P هو uv – مساراً في البيان G القطعة من P بالنسبة للذيل Q هي أي مركبة مترابطة من $P-E(Q)$ نرمز لمجموعة القطع من P بالنسبة للذيل Q بـ $S(Q)$ والبيان القطعي [3] لـ P بالنسبة لـ Q هو $SG(Q)$ حيث مجوعة رؤوسه هي $S(Q)$ ونقول عن القطعتين $S_i , S_J \in S(Q)$ إنهما متجاورتان إذا وجد ضلع قطع يصل بين نهاية لـ S_i إلى نهاية لـ S_j إن عدد المركبات هي من سيقرر إن كان Q قاطعاً أم لا .

سنعرف أيضاً النقاط الداخلية للبيان G ليكن $H=G-V(P)$ حيث H هو بيان جزئي من G نسمي رؤوس H بالرؤوس الداخلية لـ G بالنسبة لـ P. يتألف H من عدد من المركبات المترابطة $H_i , H_j ,....., H_k$ حيث $k \geq 1$.

إذا كان $x, y \in V(P)$ فإن P_{xy} يرمز إلى الـ $xy-$ مسار الجزئي من P. لنفرض أن المركبة H_i تحوي الرأسين a , b فإن R_{ab} يرمز لـ $ab-$ مسار في H_i . إذا كان $x , y \in V(P)$ يحققان $a \to x , b \to y$ وكان $l(R_{ab}) + 2 > l(P_{xy})$ فإنه يمكننا بناء مسار من P أطول من P نفسه وذلك باستبدال $(x,a,....,b,y)$ مكان P_{xy} نسمي كل $R_{ab} \subseteq H$ يحوي $x , y \in P$ بـ $xy-$ مسار جانبي.

خوارزمية الإجرائية الثالثة[3]:

$for\ \ each\ \ x \in P\ \ do$

$for\ \ each\ \ a \rightarrow x\ \ do\ \ if\ \ a \notin P\ \ then$

$begin$

$find\ \ i\ \ such\ \ that\ \ a \in H_i$

$if\ \ T_i\ \ has\ \ not\ \ been\ \ built\ \ then\ \ construct\ \ T_i\ \ and\ \ the\ \ list\ \ A_i$

$for\ \ y \in A_i\ \ do$

$begin$

$\sup pose\ \ that\ \ y \rightarrow b \in H_i$

$if\ \ l(R_{ab}) + 2 > l(P_{xy})\ \ then$

$replace\ \ P_{xy}\ \ with\ \ (x, a, ..., b, y)\ \ and\ \ exit$

end

end

و أما الآن فسنعرض خوارزمية إيجاد المسار الطويل بشكل كامل :

$long\ \ Path(x)$

$begin$

$u := x\ \ ,\ \ v := x; P := (x)$

$while\ \ p\ \ is\ \ not\ \ a\ \ hamilton\ \ path\ \ do$

$begin$

$extend\ \ P\ \ to\ \ a\ \ cycle\ \ C := P \oplus Q$

$find\ \ w \in C\ \ such\ \ that\ \ w \rightarrow y \notin P$

end

$for\ \ each\ \ x \in P\ \ do$

$for\ \ each\ \ a \rightarrow x\ \ such\ \ that\ \ a \notin P\ do$

$begin$

$find\ \ i\ \ such\ \ that\ \ a \in H_i$

$if\ \ T_i\ \ dose\ \ not\ \ yet\ \ exist\ \ ,\ then\ \ construct\ \ T_i\ \ and\ \ A_i$

$for\ \ y \in A_i\ \ do$

$begin$

$if\ \ y \rightarrow b \in H_i\ \ ;\ R_{ab} \subseteq H_i\ \ is\ \ an\ \ ab - path$

$if\ \ b > a\ \ on\ \ P\ \ then$

$if\ \ l(R_{ab}) + 2 > l(P_{xy})\ \ then$

$reroute\ \ P\ \ via\ \ R_{ab}\ \ and\ \ go\ \ to\ \ 1$

$Q := (x)$

$FindBypassCrossover(x, 0)$

$if\ \ a\ \ crossover\ Q\ \ was\ \ found\ \ then$

$set\ \ P := P \oplus Q + R_{ab}\ \ and\ \ go\ \ to\ \ 1$

$$end$$
$$end$$
$$end$$
$$at\ this\ \ po\text{int}\ \ P\ cannot\ be\ extended\ \ \ further \Rightarrow exit$$
$$1: extend\ \ P\ \ from\ u\ and\ v$$
$$end\ \{while\}$$
$$end\{longPath\}$$

هذا هو النص الكامل لخوارزمية ويليم كوكي وباك–تشينغ لي كما ورد في المقالة المنشورة في مجلة Utlitas Mathematica 45 (1994),169-185 [3] دون أي تغيير .

و بذلك أصبح الآن بإمكاننا أن نضع خوارزمية التماثل بين بيانين هاملتونيين. ليكن G_1 , G_2 بيانين هاملتونيين ، ولتكن $A = \left(a_{i\,j}\right)$ مصفوفة التجاور لـ G_1 و $B = \left(b_{i\,j}\right)$ رمزاً لمصفوفة التجاور لـ G_2 ، ولتكن $V\left(G_1\right) = \{ v_1 , v_2 , ..., v_n \}$ و $V\left(G_2\right) = \{ u_1 , u_2 , ..., u_n \}$. ولندرس التماثل بين G_1 , G_2 وفق خوارزمية التماثل التالية :

خوارزمية التماثل بين بيانين هاملتونيين :

1– ندخل البيانين G_1 , G_2 بطريقة مصفوفة التجاور ؛

2– نوجد مساراً طويلاً P_1 في البيان G_1 ونقوم بما يلي:

- نمثل G_1 وفقاً لـ P_1 ونرقم الرؤوس من جديد ونعتبرها $V\left(G_1\right) = \{ v_1 , v_2 , ..., v_n \}$ ونعتبر $A = \left(a_{i\,j}\right)$ مصفوفة التجاور لـ G_1 وفقاً لـ P_1
- نحدد من أجل كل رأس $v_s ; 1 \le s \le n$

1. درجة الرأس v_s ونرمز لها اختصاراً d_s
2. الرؤوس المجاورة لـ v_s ولتكن $v_{r_1} , v_{r_2} , ..., v_{r_{d_s}}$ ودرجاتها $d_{r_1} , d_{r_2} , ..., d_{r_{d_s}}$
3. الأضلاع الموازية لكل ضلع من الأضلاع

$$v_s\, v_{r_1} , v_s\, v_{r_2} , ..., v_s\, v_{r_{d_s}}$$

وذلك بالعلاقات :

$v_{s+i}\ v_{r_1 - i} , ..., v_{s+i}\ v_{r_{d_s} - i}$ ونحدد درجات الرؤوس: $v_{s+i} , v_{r_1 - i} , ..., v_{r_{d_s} - i}$

ونرمز لدرجاتها بـ $d_{s+i} , d_{r_1 - i} , ..., d_{r_{d_s} - i}$ حيث $1 \le i \le n$

4. الأضلاع المتقاطعة مع كل ضلع من الأضلاع:

$v_s\, v_{r_1} , v_s\, v_{r_2} , ..., v_s\, v_{r_{d_s}}$ بالعلاقات

$v_{s+i}\ v_{r_1 + i} , ..., v_{s+i}\ v_{r_{d_s} + i}$ ونحدد درجات الرؤوس

و نرمز لدرجاتها بـ $v_{s+i}, v_{r_1+i}, \ldots\ldots, v_{r_{d_s}+i}$ $d_{s+i}, d_{r_1+i}, \ldots\ldots, d_{r_{d_s}+i}$

3- سنقوم الآن بإيجاد مسار طويل P_2 في البيان G_2 بحيث يكون متكافئاً مع المسار الطويل P_1 في البيان G_1 إن أمكن كما يلي :

- نحدد رأساً من G_1 وليكن v_s ، بحيث تشكل الأضلاع المتوازية مع أحد الأضلاع المرتبطة بـ v_s ، مجموعة متوازية أعظمية (عدد الأضلاع المتوازية أعظمي) .
- * نحدد رأساً u_s من G_2 بحيث تكون له نفس درجة v_s أي d_s ومتجاور مع رؤوس لها الدرجات: $d_{r_1}, d_{r_2}, \ldots, d_{r_{d_s}}$ (نفس درجات الرؤوس المتجاورة مع v_s) ، ومرتبط بضلع تنتمي إلى وصل أعظمي في G_2 بحيث عدد أضلاع هذا الوصل مساويا لعدد أضلاع المجموعة المتوازية الأعظمية في G_1 ،وبحيث للرؤوس المرتبطة بأضلاع الوصل الأعظمي في G_2 الدرجات d_{s+i}, d_{r_1-i} ، إن هذه الرؤوس ستأخذ الأرقام u_{s+i}, u_{r_1-i} ، وإلا كان البيانان غير متماثلين.
- نتحقق من أن الأضلاع $u_s u_{r_1}, u_s u_{r_2}, \ldots\ldots, u_s u_{r_{d_s}}$ ،و الدرجات $d_{r_1}, d_{r_2}, \ldots, d_{r_{d_s}}$ وهي درجات الرؤوس $u_{r_1}, u_{r_2}, \ldots\ldots, u_{r_{d_s}}$ ، ينتمي كل منها إلى وصل عدد أضلاعه يساوي عدد الأضلاع المتوازية في كل من العلاقات:

$$u_{s+i}\, u_{r_1-i}, u_{s+i}\, u_{r_2+i}, \ldots\ldots, u_{s+i}\, u_{r_{d_s}-i}$$

فإذا كان لهذه الرؤوس الدرجات: $d_{s+i}, d_{r_1-i}, \ldots\ldots, d_{r_{d_s}-i}$ حيث $1 \le i \le n$ وكان

$$u_{s+i}\, u_{s+i+1}\ ,\ u_{r_1-i}\, u_{r_1-i+1}\ ,\ \ldots..\ ,\ u_{r_{d_s}-i}\, u_{r_{d_s}-i+1} \in E(G_2)$$

{ إن الشرط السابق يضمن وجود المسار الطويل .}

نعطيها الأرقام $u_{s+i}, u_{r_1-i}, u_{r_2-i}, \ldots\ldots, u_{r_{d_s}}$ وإلا نختار رأساً آخر $u_{s'}$ ونعود إلى *.

- نتحقق من وجود أضلاع ترتبط برؤوس لها الدرجات : $d_{s+i}, d_{r_1+i}, \ldots\ldots, d_{r_{d_s}+i}$

ويمكن أن ترتبط بالرؤوس: $u_{s+i}, u_{r_1+i}, u_{r_2+i}, \ldots\ldots, u_{r_{d_s}}$ وإلا نختار رأساً جديداً $u_{s'}$ ونعود إلى *. إن الأضلاع المتقاطعة تضمن أيضاً وجود المسار الطويل من خلال تحقق العلاقات

$$u_{s+i}\, u_{s+i+1}\ ,\ u_{r_1+i}\, u_{r_1+i+1}\ ,\ \ldots..\ ,\ u_{r_{d_s}+i}\, u_{r_{d_s}+i+1} \in E(G_2)$$

{وأيضاً من خلال كون متتالية الأضلاع المتقاطعة مع ضلع ينتمي إلى المسار الطويل تشكل هذا المسار الطويل}. وإلا نختار رأساً جديداً $u_{s'}$ ونعود إلى*

- نكمل بناء G_2 بمراعاة التوازي والتقاطع بين الأضلاع ودرجات الرؤوس ونتأكد من إنشاء المسار الطويل P_2. في حال تم بناء G_2 والمسار الطويل P_2 نكتب مصفوفة التجاور لـ G_2 وفقاً لـ P_2 ولتكن $B=\left(b_{ij}\right)$ ونقارنها بمصفوفة التجاور $A=\left(a_{ij}\right)$ لـ G_1 وفقاً لـ P_1 بطريقة طرح المصفوفات فإن كان الناتج هو المصفوفة الصفرية فإن البيانين متماثلان ، وإلا نختار رأساً جديداً $u_{s'}$ ونعود إلى * .
- في حال مررنا على كل الرؤوس التي درجتها d_s ، نقارن مصفوفتي التجاور لـ G_2 , G_1 فإن كانتا متساويتين كان البيانان متماثلين وإلا فإنهما غير متماثلين.

انتهت الخوارزمية

كلفة الخوارزمية :

إن كلفة هذه الخوارزمية كما هو واضح مرتبطة بشكلٍ أساسيٍ بكلفة خوارزمية إيجاد المسار الطويل، والتي تكون في أعلى درجات تعقيدها عندما يكون البيان $r-$ نظامي وفي مثل هذه الحالة يكون تعقيد الخوارزمية هو $o(2r^M)$ [3] وذلك وفقاً لمقالة ويليم كوكي وباك–تشينغ لي حيث M [3] هو الحد الأعلى الذي نختاره لطول القاطع ولذلك يجب عدم ترك طول القاطع اختيارياً لأن الخوارزمية في هذه الحالة ستصبح غير فعالة. كما يجب ملاحظة أن طول القاطع = 1 عندما يحقق البيان العلاقة $\deg(v)\geq\frac{n-1}{2}\ ,\ \forall v\in V(G)$ (انظر [1] في برهان النظرية 8.2 ص230). ويضاف إلى هذه الكلفة كلفة تمثيل بيان وفقاً لمصفوفة التجاور وتساوي n^2 حيث $n=|V(G)|$. وأيضاً كلفة إيجاد درجات رؤوس البيان وهي كلفة مقبولة ولنعتبر أنها α_1 بالإضافة إلى كلفة إيجاد الوصل الأعظمي ولنعتبر أنها α_2 والتي يمكن تكرارها n مرة في حال كان كل رؤوس البيان متساوية الدرجة أي أن البيان هو $r-$ نظامي فتكون الكلفة هي $n\times\alpha_2$ ، بالإضافة إلى كلفة المقارنة بين مصفوفتين وفق عملية الطرح على المصفوفات والتي تقتضي استخدام عملية الطرح العادية n^2 مرة ويمكن تكرارها من أجل البيان الـ $r-$ نظامي n مرة فتكون الكلفة n^3 بالإضافة إلى كلفة استخدام هذه العملية في طرح الأدلة ويكن أيضا أن تستخدم n مرة وتكرر n مرة فتكون الكلفة الكلية لاستخدام عملية الطرح هي $\left(n^3+n^2\right)\alpha_3$ حيث α_3 هو كلفة استخدام عملية الطرح لمرة واحدة فقط.

فتكون الكلفة الكلية لهذه الخوارزمية هي :

$$\left(n^3+n^2\right)\alpha_3+n^2\alpha_2+n\alpha_1+o\left(2r^M\right)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن كلفة الخوارزمية تعتمد بشكل أساسي على كلفة خوارزمية إيجاد المسار

الطويـل وهــي $o(2r^M)$ ولــذلك مــن الضــروري فــي حــال أننــا نبحــث فــي بيــان لا يحقــق العلاقــة $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}\ ,\ \forall v \in V(G)$ أن نحدد طول القاطع.

المراجع:

....

[1] Applied and Algorithm Graph Theory, Gary Chartrand, Orturd R.Oellermann

[2] Graphs and Digraphs, Mehdi Behzad, Gary Chartrand, Linda lesniak-Foster

[3] An Algorithm for Finding a Long Path in a Graph, William Kocay, Pak-ching Li
Utilitas Mathematic, 45 (1994), 169-185

[4] PRACTICAL GRAPH ISOMORPHISM
This paper appeared in Congressus Numerantium, Vol. 30 (1981), pp. 45-87

[5] مبادئ الجبر، الدكتور محمد الهوشي