

طريقة تدرج مترافقة لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور محمد على**

مهران متوج***

(تاريخ الإيداع 16 / 12 / 2012. قُبِلَ للنشر في 29 / 4 / 2013)

□ ملخص □

تم في هذا البحث تقديم طريقة عددية لحل مسألة الأمثليات غير المقيدة. تعتمد الطريقة على إنشاء قاعدة من المتجهات المترافقة، ثم تحديثها تكرارياً بادخال متجهات تدرج مترافقة تحقق شرط الانحدار الأشد وشروط وولف-جاول. اختُبرت الطريقة بحل مجموعة من مسائل الاختبار القياسية الموجودة في دراسات سابقة. تبين النتائج العددية أن الطريقة المقترحة تستطيع إيجاد الحل العددي المضبوط من أجل الدوال التربيعية، وتستطيع أيضاً تقديم حلول عددية عالية الدقة إذا كانت دالة الهدف فوق تربيعية. وبمقارنة النتائج التي تم التوصل إليها مع نتائج الطرائق الأخرى تظهر الكفاءة والفعالية التطبيقية للطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: متجهات بحث، متجهات مترافقة، بحث خطي، طريقة تدرج مترافقة، الأمثلية غير المقيدة.

* أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
** أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

A Conjugate Gradient Method for Solving Unconstrained Optimization problems

Dr. Suliman M. Mahmood*
Dr. Mohamad Ali**
Mahran Motaweg***

(Received 16 / 12 / 2012. Accepted 29 / 4 / 2013)

□ ABSTRACT □

In this paper, we present numerical method for solving unconstrained optimization problems. The method is based on a set of conjugate search directions, and then this set is updated repeatedly by generating new conjugate gradient directions so that steepest descent condition and Wolfe- Powell conditions are satisfied. The method is tested on set of standard problems. Numerical experiments show that the proposed method can find exact solution for quadratic functions, so it can find high accurate solution for over quadratic functions. Moreover, the comparisons with other available results illustrate the applicability and efficiency of the presented method.

Keywords: Search Directions, Conjugate Directions, Line Search, Conjugate Gradient Method, Unconstrained Optimization.

* Associate Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.
** Associate Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.
*** Postgraduate student, Dept. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

مقدمة:

يُعد علم الأمثليات من العلوم الهامة جداً منذ عقود قديمة نظراً لأنه العلم الذي يساهم في عملية التوازن في اتخاذ القرار في ظروف صعبة وشبه غامضة. إذ بدأ العالم يولي اهتماماً خاصاً بهذا العلم، إبان الحرب العالمية الثانية لمعالجة بعض المسائل الحيوية التقليدية مثل التوزيع الأمثل لانتشار الجيش على أوسع مساحة ممكنة من الأرض، واستخدم أيضاً في اكتشاف أماكن تواجد العدو وطرائق التعامل معه، وحل معضلات الدفاع الجوي والانزالات. وحالياً تعد دراسة مسألة إيجاد الحل الأمثل من المسائل الهامة في علوم الإدارة والاقتصاد والتجارة وذلك للتنبؤ بالريح والخسارة والسيطرة على الاختناقات الاقتصادية، ونظرية التحكم واتخاذ القرار وغيرها.

فقد درس الباحثون مسألة الأمثليات غير المقيدة [1-15] على أنها مسألة إيجاد النهاية الصغرى للدالة

الحقيقية $f(X)$:

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} f(X), \quad (1.1)$$

حيث:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين على الأقل، و $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ هو شعاع بـ n من المتغيرات

الحقيقية.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد طريقة عددية فعالة لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة ثم اختبار الطريقة المقدمه بإعداد البرمجيات اللازمة لخوارزمية الطريقة وتنفيذها لحل مجموعة من مسائل الاختبار المعيارية ومقارنة النتائج التي يتم الحصول عليها مع نتائج لطرائق بأبحاث أخرى بغية تأكيد فعالية الطريقة المقترحة. تكمن أهمية البحث في أهمية المسألة المطروحة فهي من المسائل الحيوية والهامة لأنها ترتبط في كثير من العلوم المختلفة مثلًا كالتجارية والاقتصادية والإدارية.

طرائق البحث وموارده

تم في هذا البحث تقديم طريقة عددية تعتمد على إنشاء قاعدة ابتدائية من المتجهات المترافقة، ثم تحديثها تكرارياً بإدخال متجهات تدرج مترافقة جديدة بحيث يتحقق شرط الانحدار الأشد وشروط وولف-باول وهذا سيجعل الحل العددي يتقارب من الحل الدقيق من أجل كل تكرار. تم إعداد برامج بلغة باسكال للحصول على النتائج. لقد اقترح الباحثون طرائق وتقنيات عددية كثيرة لحل المسألة المطروحة (1.1).

قدم **LI** وآخرون في [2] طريقة تدرج مترافقة باستنتاج شروط جديدة للتدرج بالاعتماد على معلومات تتعلق بقيم الدالة وقيم تدرجها معاً. قدم **ANDREI** في الأعمال [3,4,5] ثلاث طرائق تدرج مترافقة على التوالي، الطريقة الأولى تستخدم الفروق المنتهية لحساب تقريبات جداءات مصفوفة هيسيان بمتجهات البحث، والطريقة الثانية تعد تسريع لطريقة التدرج المترافقة الأولى استخدم بها أطوال خطوات مختلفة تم حسابها بحيث تتحقق شروط وولف-باول للبحث الخطي، والطريقة الثالثة تعتمد على قياس التدرج الطيفي باستخدام خطوات ذات أطوال مختلفة. في [6] قدم **YUAN** وآخرون

طريقة تدرج مترافقة استخدم متجهات بحيث تحقق شروط وولف- باول للبحث الخطي وشروط الانحدار الأشد. قدمت أيضا في الأعمال [7-11] مجموعة من الطرائق العددية تدعى بطرائق المنطقة الآمنة، تستخدم هذه الطرائق في تحليلها النموذج المخروطي بدلا من النموذج التربيعي حيث تعتمد معظم طرائق المنطقة الآمنة على قاعدة نيوتن المشابهة.

تعريف ومفاهيم أساسية.

تعريف (1) (شعاع التدرج) Gradient Vector

إذا كانت الدالة $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لمتغيراتها، يُعرّف تدرج الدالة $f(X)$ الذي يُرمز له بـ $\nabla f(X)$ بأنه الشعاع:

$$\nabla f(X) = g(X) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

إذ $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، هي المشتقات الجزئية للدالة $f(X)$.

وهكذا وفقا للتعريف (1) ستؤول المسألة (1.1) إلى إيجاد النقاط X^* التي ستحقق المعادلة:

$$\nabla f(X^*) \equiv g(X^*) = 0 \quad (4.1)$$

تعريف (2) (الدالة الخطية): Linear Function

نقول عن الدالة $f(X)$ إنها خطية في X إذا كان شعاع التدرج لها ثابت، يعني إذا كان $g(X) = C$ ، ويمكن التعبير عن الدالة الخطية بالعلاقة:

$$f(X) = C^T X + d \quad (4.2)$$

حيث C شعاع ثابت و d عدد ثابت. ويمكن إيجاد شعاع التدرج بملاحظة أن:

$$C^T X = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

ومنه نحصل على مركبات شعاع التدرج بوضوح كالتالي: $g_i = \partial f / \partial x_i = c_i$ ، $i = 1, \dots, n$.

تعريف (3) (مصفوفة هيسيان): Hessian Matrix [1]

إذا كانت الدالة $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لمتغيراتها، فإننا

نعرف مصفوفة هيسيان لـ $f(X)$ التي نرمز لها بـ $H(X)$ بالشكل:

$$H(X) = \nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

تعريف (4) : الدالة التربيعية: (Quadratic Function)

نقول عن الدالة $f(X)$ إنها تربيعية في X إذا كانت مصفوفة هيسيان $H(X)$ لهذه الدالة ثابتة، ويمكن التعبير عنها بالعلاقة:

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T H X + C^T X + d \quad (4.3)$$

حيث H مصفوفة ثابتة و C شعاع ثابت و d عدد ثابت.

ويمكن تعيين شعاع التدرج ومصفوفة هيسيان للدالة التربيعية بملاحظ الآتي:

$$X^T H X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} x_i x_j ,$$

$$H \cdot X = \left[\sum_{j=1}^n H_{1j} x_j \quad \sum_{j=1}^n H_{2j} x_j \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^n H_{nj} x_j \right]^T ,$$

وباشتقاق العلاقة (4.3) نجد شعاع التدرج ومركباته:

$$g(X) = H X + C , \quad (4.4)$$

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n H_{ij} x_j + c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

كما ونحصل بسهولة على عناصر مصفوفة هيسيان باشتقاق العلاقة (4.3) مرتين متتاليتين:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n ,$$

ملاحظة(1): تكون عناصر مصفوفة هيسيان H_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) ثابتة إذا كانت الدالة $f(X)$ تربيعية،

وفي حال كانت مصفوفة هيسيان فوق تربيعية، فإن عناصرها لن تكون جميعها ثابتة.

تعريف (5) (المصفوفة محددة موجبة) [1]:

بفرض A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، و δ شعاع غير صفري من الدرجة n ، نقول إن المصفوفة A

محددة موجبة إذا تحققت المتراجحة:

$$\delta^T A \delta > 0, \quad \forall \delta \neq 0$$

ونقول إن هذه المصفوفة A محددة شبه موجبة إذا كان $\delta^T A \delta \geq 0, \quad \forall \delta \neq 0$.

تعريف (6) : النهاية الصغرى الموضعية (Local Minimum)

نقول إن النقطة $X^* \in \mathcal{R}^n$ نهاية صغرى موضعية للدالة $f(X)$ إذا كانت f معرفة في جوار X^* ،

ويوجد عدد صغير موجب $\epsilon > 0$ بحيث يكون:

$$f(X^*) \leq f(X), \quad (4.5)$$

وذلك من أجل جميع النقاط X التي تحقق $\|X^* - X\| < \epsilon$ ، حيث $X \neq X^*$.

تعريف (7) : النهاية الصغرى الشاملة (Global Minimum)

نقول إن X^* نقطة نهاية صغرى شاملة للدالة $f(X)$ المستمرة على متحولاتها إذا تحقق الشرط

$$f(X^*) \leq f(X) \text{ وذلك مهما تكن } X \text{ تنتمي إلى الفضاء الاقليدي } E^n .$$

تعريف (8) : نقطة الاستقرار (Stationary Point) [1]

نقول إن X^* نقطة استقرار للدالة $f(X)$ إذا تحقق الشرط $g(X^*) = 0$.

ملاحظة(2): إن الشرط الضروري لتكون X^* نقطة نهاية صغرى موضعية للدالة $f(X)$ ، إذا كانت

$$f(X) \in C^1, \text{ وكانت } X^* \text{ نقطة استقرار لـ } f(X).$$

تعريف (9) : النقطة السرجية (Saddle Point) [1]

نقول إن X^* نقطة سرجية للدالة $f(X)$ إذا كانت X^* نقطة استقرار للدالة $f(X)$ ، ولكنها ليست نقطة

نهاية صغرى و ليست نقطة نهاية عظمى موضعية لـ $f(X)$.

تعريف (10) : ترافق شعاعين بالنسبة لمصفوفة [1]

نقول عن شعاعين $X, Y \in \mathcal{R}^n$ غير صفريين إنهما مترافقان بالنسبة للمصفوفة المحددة الموجبة A

$$\text{من الدرجة } n \times n \text{ إذا كان } X^T A Y = 0.$$

تعريف(11) : الحل العددي (The Numerical Solution)

إن الحل العددي هو عملية تقريب للحل الأمثل، إذ نفترض معظم الطرائق العددية حلاً ابتدائياً $X^{(0)}$ ثم تعمل

وفق تقنية تكرارية متقاربة إلى إيجاد حل تقريبي $X^{(1)}$ ، ثم $X^{(2)}$ ، ...، وهكذا تتشكل متتالية متقاربة $\{X^{(k)}\}$ يكون فيها

الحل العددي في كل تكرار أقرب إلى الحل الأمثل من التكرار السابق له، وعندئذ يمكننا أن نكتب نظرياً:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^*$$

ولكن في الخوارزميات العددية يمكن القول إن $X^{(n)}$ هو الحل العددي الأمثل وفق دقة مفروضة حيث n هو

رقم آخر تكرار، وغالباً الخوارزمية تنتقف عند التكرار n الذي يحقق إحدى المعيارين $\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\| < \varepsilon$

أو $\varepsilon < \|\nabla f(X^{(n)})\|$ ، حيث $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي صغير بقدر كافٍ.

النتائج والمناقشة:

نقدم طريقة عددية تعتمد على إنشاء قاعدة من متجهات البحث المترافقة، ثم تحديثها تكرارياً بإدخال متجهات

تدرج مترافقة. يتم إثبات تقارب الطريقة من خلال تحقيق شرط الانحدار الأشد وشروط وولف-باول. نختبر الطريقة

بحل مجموعة من مسائل الاختبار القياسية الموجودة في دراسات سابقة.

❖ طريقة التدرج المترافقة:

إن التعريف(10) للترافق يمكننا من القول إن الشعاعين غير الصفريين $X, Y \in \mathcal{R}^n$ يكونا مترافقين

إذا كانا متعامدين وفق الجداء الداخلي المعرف بالشكل:

$$(X, Y)_A = X^T A Y$$

والمرتبط بالنظيم:

$$\|X\|_A^2 = (X, X)_A = X^T A X$$

لتكن d_0, d_1, \dots, d_{n-1} متجهات مترافقة بالنسبة لمصفوفة A محددة موجبة، عندئذ فإن هذه المتجهات تشكل

قاعدة للفضاء \mathcal{R}^n ، وإذا كان $X \in \mathcal{R}^n$ ، فإن X يعطى بدلالة هذه القاعدة بالشكل:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^T A d_i}{(d_i)^T A d_i} d_i \quad (5.1a)$$

يمكن إثبات العلاقة (5.1a) بملاحظة أنه إذا كان $X \in \mathfrak{R}^n$ ، فإنه يكتب بدلالة القاعدة d_0, d_1, \dots, d_{n-1} بالشكل:

$$(5.1b) X = \lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_{n-1} d_{n-1}$$

من جهة أخرى وبسبب ترافق هذه المتجهات نجد أن:

$$X^T A d_i = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (d_k)^T \right] A d_i = \lambda_i (d_i)^T A d_i$$

ومن هنا نحصل على $\lambda_i = \frac{X^T A d_i}{(d_i)^T A d_i}$ ، وبالتعويض في (5.1b) ينتج المطلوب.

سنرى أهمية الترافق في إيجاد النهاية الصغرى. لهذا نفرض أن لدينا n من المتجهات المترافقة لـ A ولتكن d_0, d_1, \dots, d_{n-1} ، عندئذ لأجل نقطة معطاة $X^{(0)}$ ، نعرف متتالية منتهية كالتالي:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \alpha_i d_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5.2)$$

حيث أن أطول الخطوات α_i هي النهايات الصغرى للدوال:

$$\Phi_i(\alpha) = f(X^{(i)} + \alpha d_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5.3)$$

ولتعيين α_i نشتق الدوال $\Phi_i(\alpha)$ بالنسبة لـ α :

$$\Phi_i'(\alpha) = (d_i)^T g(X^{(i)} + \alpha d_i) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5.4)$$

ونستخدم طريقة نيوتن رافسون: $\alpha_i^k = \alpha_i^{k-1} - \frac{\Phi_i'(\alpha_i^{k-1})}{\Phi_i''(\alpha_i^{k-1})}$, $(k = 1, 2, \dots)$

وعندئذ يكون $\alpha_i = \alpha_i^m$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ تقريباً.

مبرهنة 1: إذا كانت $f(X)$ دالة تربيعية ومصفوفة هيسيان H لها محددة موجبة فإن النقطة $X^{(n)}$ الناتجة عن التكرار n في العلاقة (5.2) هي نقطة نهاية صغرى دقيقة لـ $f(X)$.

البرهان: سنثبت أن $X^{(n)} = X^*$ ، من أجل ذلك نكتب العلاقة (5.2) بالشكل:

$$X^{(k+1)} = X^{(0)} + \sum_{i=0}^k \alpha_i d_i, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5.5)$$

بحساب شعاع التدرج للدالة التربيعية المعرفة في (4.3) نجد أن:

$$g^{(k+1)} = g(X^{(k+1)}) = C + H X^{(k+1)}$$

$$g^{(0)} = C + H X^{(0)}, \quad g(X^*) = C + H X^* = 0$$

و باستخدام شروط الترافق والعلاقة (5.4)، نحصل على:

$$\begin{aligned}
0 &= (d_k)^T g^{(k+1)} = (d_k)^T (C + H X^{(k+1)}) \\
&= (d_k)^T (C + H X^{(0)} + \sum_{i=0}^k \alpha_i H d_i) \\
&= (d_k)^T g^{(0)} + \sum_{i=0}^k \alpha_i (d_k)^T H d_i \\
&= (d_k)^T g^{(0)} + \alpha_k (d_k)^T H d_k
\end{aligned} \tag{5.6}$$

ومن العلاقة (5.6) نحصل على:

$$\alpha_k = -\frac{(g^{(0)})^T d_k}{(d_k)^T H d_k} \tag{5.7}$$

حيث $(d_k)^T H d_k > 0$ لأن H مصفوفة محددة موجبة بالفرض.

بتعويض العلاقة (5.7) في العلاقة (5.5) وجعل $k=n-1$ ، نحصل على العلاقة:

$$X^{(n)} = X^{(0)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(g^{(0)})^T d_i}{(d_i)^T H d_i} d_i \tag{5.8}$$

وبمقارنة (5.8) مع العلاقة (5.1a) بعد أخذ العلم أن $H \equiv A$ لأن الدالة تربيعية، نجد أن:

$$X^{(n)} = X^{(0)} - H^{-1} g^{(0)} = X^{(0)} - H^{-1} (C + H X^{(0)}) = -H^{-1} C = -H^{-1} (-H X^*) = X^*$$

مما تقدم نستنتج أن $X^{(n)}$ هي نقطة نهاية صغرى للدالة f وهو المطلوب.

نستخلص مما سبق النتيجة التالية.

نتيجة (1): لتكن f دالة تربيعية محددة موجبة من الشكل المعطى بالعلاقة (4.3)، وبفرض أن

d_0, d_1, \dots, d_{n-1} متجهات مترافقة مع مصفوفة هيسيان H ، عندئذ من أجل كل نقطة $X^{(0)} \in \mathfrak{R}^n$ ، فإن

$$X^{(n)} = X^{(0)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(g^{(0)})^T d_i}{(d_i)^T H d_i} d_i \tag{5.9}$$

هي نقطة نهاية صغرى وحيدة للدالة f ، باستخدام متجهات البحث في كل مرتبة.

وهكذا إذا استطعنا إيجاد جملة من المتجهات المترافقة لـ H فإن الدالة التربيعية المحددة الموجبة يمكن

أن تكون أصغر بعد n تكرار على الأكثر. وهذا ما يسمى بخاصة النهاية المحدودة

لطرئق الاتجاه المترافق. الواضح أن النقطة الأساسية في هذا العمل أصبحت تتجلى في إمكانية توليد متجهات

مترافقة بصورة تكرارية خلال استخدام طريقة البحث عن نقطة النهاية الصغرى.

الطريقة تحتاج في التكرار الأول لـ n عملية بحث خطي وجملة مؤلفة من n من المتجهات المترافقة، و عند كل

انتقال إلى تكرار جديد فإن الجملة تحتاج إلى تحديث، وهذا التحديث يكون بحذف متجهة من بداية الجملة السابقة يعني

بقاء $n-1$ من المتجهات المترافقة من التكرار السابق في الجملة الجديدة ثم توليد متجهة مترافقة جديدة وإضافتها إلى

نهاية الجملة بدلا من المتجهة المحذوفة.

❖ خوارزمية (1): توصيف طريقة التدرج المترافقة

نلخص خوارزمية طريقة التدرج المترافقة في الخطوات التالية:

شروط البدء: نبحث من نقطة ابتدائية مفروضة $X^{(0)} \in \mathfrak{R}^n$ ، حيث f دالة هدف، $\varepsilon > 0$ صغير وفقاً للحاجة، عداد التكرارات $i=0$.

الخطوة 1: نضع قاعدة الأشعة الابتدائية

$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, d_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2: ننفذ العمليتين التاليتين من أجل $k=0,1,\dots,n-1$:

أ- نجد α_k نقطة نهاية صغرى للدالة $\Phi_k(\alpha) = f(X^{(k)} + \alpha d_k)$

ب- نحسب $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k$

الخطوة 3: نحسب متجهة مترافقة جديدة $d_n = -H_n^{-1} g(X^{(n)})$

الخطوة 4: نجد α_n نقطة نهاية صغرى للدالة $\Phi_n(\alpha) = f(X^{(n)} + \alpha d_n)$

الخطوة 5: نحسب نقطة التكرار الجديدة $X^{(n+1)} = X^{(n)} + \alpha_n d_n$ ، ونضع $i=i+1$.

الخطوة 6: نختبر المعيار $\|g(X^{(n+1)})\| < \varepsilon$ ، فإذا كان محقق نتوقف وإلا نضع

$$d_0 = d_1, d_1 = d_2, \dots, d_{n-1} = d_n, X^{(0)} = X^{(n+1)}$$

ونعود للتكرار بدءاً من الخطوة 2.

ملاحظة (3): نجد من الخوارزمية (1) أن الطريقة في التكرار الأول تستخدم أشعة الواحدة كمتجهات بحث:

$$d_0 = e_1, d_1 = e_2, \dots, d_{n-1} = e_n$$

$$d_n = -H_n^{-1} g(X^{(n)})$$

في التكرار الثاني تستخدم جملة متجهات البحث التالية:

$$d_0 = e_2, d_1 = e_3, \dots, d_{n-2} = e_n, d_{n-1} = d_n$$

$$d_n = -H_n^{-1} g(X^{(n)})$$

وهكذا في كل تكرار تحذف متجهة بحث من بداية الجملة وتضاف متجهة جديدة إلى نهايتها. من المعلوم أن أشعة الواحدة مترافقة مع المصفوفة H_n لأنها متعامدة. والسؤال المطروح الآن والذي يحتاج إلى جواب، هل المتجهات المولدة الجديدة مترافقة بالنسبة لـ H_n ؟

فرضية: لتكن f دالة تربيعية محددة موجبة معرفة بالعلاقة (4.3)، نعرف من أجل

$$X^{(0)}, X^{(1)}, d \in \mathfrak{R}^n$$

$$\psi_k(\alpha) = f(X^{(k)} + \alpha d), \quad k = 0, 1$$

نرمز لنقطتي النهاية الصغرى لهاتين الدالتين بـ α_0, α_1 على الترتيب. ليكن:

$$U_k = X^{(k)} + \alpha_k d, \quad k = 0,1$$

$$W = U_1 - U_0$$

عندئذ فإن المتجهتين W, d يكونا مترافقتين بالنسبة للمصفوفة H_n .

البرهان: بما أن α_k نهاية صغرى للدالة $\psi_k(\alpha)$ ، باشتقاق $\psi_k(\alpha)$ بالنسبة لـ α نجد أن:

$$\psi'_k(\alpha_k) = d^T g(U_k) = 0, \quad k = 0,1$$

وهكذا يكون لدينا:

$$d^T H_n W = d^T H_n (U_1 - U_0) = d^T (H_n U_1 - H_n U_0)$$

$$= d^T (H_n U_1 + C - H_n U_0 - C) = d^T [g(U_1) - g(U_0)] = 0$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 2: إذا كانت الدالة f تربيعية محددة موجبة معرفة بالعلاقة (4.3) فإن الخوارزمية (1) لطريقة التدرج

المترافقة تولد متجهات بحث مترافقة بالنسبة للمصفوفة H_n في كل تكرار.

البرهان: تستخدم خوارزمية الطريقة في التكرار الأول أشعة الواحدة كمتجهات بحث وتولد متجهة بحث جديدة

فقط هي d_n وبالتالي:

$$(d_i)^T H_n d_j = (e_{i+1})^T H_n e_{j+1} = 0$$

إذن المتجهات d_0, d_1, \dots, d_{n-1} مترافقة تبادلياً بالنسبة للمصفوفة H_n مها تكن $i \neq j$ ، حيث i و j تأخذ

القيم من 0 وحتى $n-1$. و بفرض أن الخوارزمية أنتجت في التكرارين الأول والثاني المتجهتين الجديدتين d_n, d_{n+1} ، عندئذ نجد أن:

$$(d_n)^T H_n d_{n+1} = -(d_n)^T H_n (H_n^{-1} g^{(n+1)}) = -(d_n)^T g^{(n+1)} = 0$$

والسبب في ذلك ينتج من أنه يتم إيجاد α_n في الخطوة الرابعة من الخوارزمية بحل المعادلة $\Phi'_n(\alpha) = 0$

بشكل دقيق، ويؤدي ذلك إلى أن:

$$0 = \Phi'_n(\alpha) = f'(X^{(n)} + \alpha d_n) = (d_n)^T g^{(n+1)}$$

حالياً، نفرض أنه في مرحلة ما من التكرارات أنتجت الخوارزمية (1) جملة متجهات البحث التالية:

$$d_k, d_{k+1}, \dots, d_n \quad (5.10)$$

نفرض أن جملة المتجهات (5.10) مترافقة مع المصفوفة H_n ، ولنثبت أن الجملة التالية مترافقة:

$$d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{n+1} \quad (5.11)$$

لإثبات ترافق الجملة (5.11) مع H_n يكفي فقط إثبات ترافق المتجهتين d_n, d_{n+1} ، وهذا يكون محققاً عند

كل تكرارين متتاليين للسبب السابق نفسه في التكرارين الأول والثاني، أي أن:

$$(d_n)^T H_n d_{n+1} = -(d_n)^T g^{(n+1)} = 0$$

وهو المطلوب.

نتيجة (2): إن طريقة التدرج المترافقة الموصوفة في الخوارزمية (1) تحقق الشروط التالية:

a - شرط الانحدار الأشد [2]:

$$(g^{(k)})^T d_k < 0, \quad \forall k > 0 \quad (5.12)$$

b - شرط الانحدار الكافي [2]، نقول إن هذا الشرط محقق إذا وجد $c > 0$ ، بحيث يكون:

$$(g^{(k)})^T d_k < -c \|g^{(k)}\|, \quad \forall k > 0 \quad (5.13)$$

c - شروط Wolfe-Powell الضعيفة [6]:

$$f(X^{(k)} + \alpha_k d_k) - f_k \leq \delta \alpha_k (g^{(k)})^T d_k \quad (5.14)$$

$$g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma (g^{(k)})^T d_k \quad (5.15)$$

d - شروط Wolfe-Powell القوية [6]:

$$f(X^{(k)} + \alpha_k d_k) - f_k \leq \delta \alpha_k (g^{(k)})^T d_k \quad (5.16)$$

$$|g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k| \leq -\sigma (g^{(k)})^T d_k \quad (5.17)$$

حيث $\sigma \in (\delta, 1)$ ، $\delta \in (0, 1/2)$.

البرهان: إثبات (a) يكون محققاً بملاحظة أن المصفوفة H_k^{-1} محددة موجبة وبالتالي:

$$(d_k)^T g^{(k)} = -(H_k^{-1} g^{(k)})^T g^{(k)} = -(g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} < 0$$

إثبات (b) ينتج من الشرط (a)، حيث لدينا:

$$(d_k)^T g^{(k)} = -(g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} \leq -c (g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} = -c \|g^{(k)}\|, \quad \forall c \in (0, 1)$$

لإثبات (c): ننشر الدالة $f(X)$ حول $X^{(k)}$ ، حيث يمكن أن نكتب تقريباً:

$$f(X) = f_k + (g^{(k)})^T (X - X^{(k)}) + \frac{1}{2} (X - X^{(k)})^T H_k (X - X^{(k)})$$

وبتعبير $X = X^{(k+1)}$ ، وملاحظة أن $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k$ ، $d_k = -H_k^{-1} g^{(k)}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} f(X^{(k)} + \alpha_k d_k) &= f_k + \alpha_k (g^{(k)})^T d_k + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (d_k)^T H_k d_k \\ &= f_k - \alpha_k (g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (H_k^{-1} g^{(k)})^T H_k (H_k^{-1} g^{(k)}) \\ &= f_k - \alpha_k (g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} \\ &= f_k + \left(\frac{1}{2} \alpha_k - 1\right) \alpha_k (g^{(k)})^T H_k^{-1} g^{(k)} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(X^{(k)} + \alpha_k d_k) = f_k + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_k\right) \alpha_k (g^{(k)})^T d_k \quad (5.18)$$

عندئذ يوجد $\alpha_k \in (0, 1)$ و $\delta \in (0, 1/2)$ ، بحيث يكون $0 < \delta \leq \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_k\right) < 1$ وبالتالي:

$$f(X^{(k)} + \alpha_k d_k) - f_k \leq \delta \alpha_k (g^{(k)})^T d_k$$

وهو الشرط (5.14). ولإثبات الشرط (5.15) نشق العلاقة (5.18) بالنسبة لـ α_k نجد أن:

$$g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k = (1 - \alpha_k) (g^{(k)})^T d_k \quad (5.19)$$

عندئذ يوجد $\alpha_k \in (0, 1)$ و $\sigma \in (\delta, 1)$ ، بحيث يكون $0 < (1 - \alpha_k) \leq \sigma < 1$ وبالتالي:

$$g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma (g^{(k)})^T d_k$$

وهو الشرط (5.15)، وبما أن الشرط (5.16) هو تكرار للشرط (5.14) نفسه. ولإثبات الشرط المتبقي (5.17) من العلاقة (5.19) و شرط الانحدار (5.12) نستطيع أن نكتب:

$$|g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k| = -(1 - \alpha_k)(g^{(k)})^T d_k, \quad \alpha_k \in (0,1)$$

وبالتالي يوجد $\alpha_k \in (0,1)$ و $\sigma \in (\delta, 1)$ ، بحيث يكون $0 < (1 - \alpha_k) \leq \sigma < 1$ عندئذ:

$$|g(X^{(k)} + \alpha_k d_k)^T d_k| = -(1 - \alpha_k)(g^{(k)})^T d_k \leq -\sigma (g^{(k)})^T d_k,$$

وهو المطلوب.

برنامج بلغة **TPW 1.5** لتنفيذ خوارزمية طريقة التدرج المترافقة:

```
PROGRAM Rosenbroch_Function ;
Uses WinCRT; Type term=extended;
  M= Array [1..3,1..3] of extended;
VAR X,Y: Array [0..50] of extended;   si1,si2: Array [0..3] of extended;
  Det, norm,normg, S1,S2,e :extended;  i,j ,n,k,kf,kg:integer; IM:M ;   fil:text;
FUNCTION f(x,y:extended):extended;
Begin
  f:=100*sqr(y-x*x)+sqr(1-x);
End;
FUNCTION g1(x,y:extended):extended;
Begin
  g1:=400*x*(-y+x*x)+2*(x-1);
End;
FUNCTION g2(x,y:extended):extended;
Begin
  g2:=-200*(-y+x*x);
End;
FUNCTION H11(x,y:extended):extended;
Begin
  H11:=400*(-y+3*x*x)+2
End;
FUNCTION H12(x,y:extended):extended;
Begin
  H12:=-400*x
end;
FUNCTION H21(x,y:extended):extended;
Begin
  H21:=-400*x
End;
FUNCTION H22(x,y:extended):extended;
Begin
  H22:=200
End;
Procedure invr(var IM:M);
begin
  Det:=H11(x[2],y[2])*H22(x[2],y[2])-H21(x[2],y[2])*H12(x[2],y[2]);
  IM[1,1]:= H22(x[2],y[2])/Det;  IM[1,2]:= -H12(x[2],y[2])/Det;
  IM[2,1]:= -H21(x[2],y[2])/Det;  IM[2,2]:= H11(x[2],y[2])/Det;
```

```

end;
FUNCTION hf1(x,y:extended):extended;
Begin
  hf1:=-2*s1*(1-e*s1-x)+200*(s2-2*s1*(e*s1+x))*(e*s2-Sqr(e*s1+x)+y)
End;
FUNCTION hf2(x,y:extended):extended;
Begin
  hf2:=2*s1*s1+100*(2*Sqr(s2-2*s1*(e*s1+x))-4*s1*s1*(e*s2-Sqr(e*s1+x)+y))
End;
BEGIN {main}
writeln('Rosenbroch Powell new method to solve mini');
writeln('=====');
assign(fil,'E:\rosenb.dat'); rewrite(fil);
x[0]:=1.5 ;y[0]:=1.5; i:=0; x[3]:=x[0];y[3]:=y[0];
si1[1]:=1;si1[2]:=0; si2[1]:=0;si2[2]:=1; kf:=0; kg:=0;
REPEAT x[0]:=x[3]; y[0]:=y[3];
for k:=0 to 1 do
begin
  si1[k]:=si1[k+1];si2[k]:=si2[k+1]; s1:=si1[k];s2:=si2[k]; e:=0;
repeat
  e:=e-hf1(x[k],y[k])/hf2(x[k],y[k]); kf:=kf+1
until Abs(hf1(x[k],y[k]))<0.0001; writeln('alfa',k, '=',e:2:5);
  X[k+1]:=X[k]+ e*S1; Y[k+1]:=Y[k]+e*S2;
end;
INVR(IM);
si1[2]:=-(iM[1,1]*g1(x[2],y[2])+iM[1,2]*g2(x[2],y[2]));
Si2[2]:=-(iM[2,1]*g1(x[2],y[2])+iM[2,2]*g2(x[2],y[2]));
writeln(' Det('i,')=' ,det:2:5);
writeln('=====');
writeln(' Mi 11('i,')=' ,iM[1,1]:2:5,' Mi12('i,')=' ,iM[1,2]:2:5);
writeln(' Mi 21('i,')=' ,iM[2,1]:2:5,' Mi22('i,')=' ,iM[2,2]:2:5);
s1:=si1[2]; s2:=si2[2] ; e:=1;
Repeat
  e:=e-hf1(x[2],y[2])/hf2(x[2],y[2]); kf:=kf+1
  until Abs(hf1(x[2],y[2]))<0.0001; writeln('alfa',i, '=',e:2:5,' kf=' ,kf);
  X[3]:=X[2]+ e*S1; Y[3]:=Y[2]+e*S2; i:=i+1;
normg:=Sqrt(Sqr(g1(x[3],y[3]))+sqr(g2(x[3],y[3])));
writeln(' X',i, '=',X[3]:2:8,' Y',i, '=',Y[3]:2:8,' f=' ,f(x[3],y[3]),' |g|=' ,normg:2);
writeln('***** Iteration ',i,' *****'); readln ;
until (normg<1.E-18 ); close(fil)
END.

```

نتائج عددية: ❖

في هذه الفقرة نختبر خوارزمية طريقة التدرج المترافقة بحل مجموعة من مسائل الاختبار المعيارية الموجودة في دراسات سابقة. للتوضيح نحتاج إلى استخدام الترميزات التالية:

Kf عدد تقييمات الدالة f , Kg عدد تقييمات شعاع التدرج g , f_k قيمة الدالة عند $X^{(k)}$, SD عدد متجهات البحث المترافقة، N مجموع تقييمات الدالة مع شعاع التدرج، يعني $N=Kg+Kf$ ، ltr تشير لعدد التكرارات

الكلي. تم إنجاز النتائج العددية بإعداد برامج بلغة $TPW 1.5$ باستخدام الدقة المضاعفة نفسها المعتمدة في الأبحاث الأخرى، وكذلك تم استخدام برنامج $Math 5$ لإنجاز الأشكال والمخططات الرسومية.

ندرج في الجدول (1) حسابات نظم شعاع التدرج $\|g_k\|$ وعدد التكرارات اللازمة itr . ثم نقارن النتائج مع طرائق المنطقة الآمنة في [7,8]، للمسائل (2)...(4).

نضع في الجدول (2) حسابات نظم شعاع التدرج $\|g_k\|$ وقيم الدالة f_k وعدد التكرارات اللازمة itr . ثم نقارن النتائج مع طريقة المنطقة الآمنة في [9]، للمسائل (2),(5),(6),(7).

نسجل في الجدول (3) حسابات قيم الدالة f_k وعدد تقييمات شعاع التدرج Kg وعدد تقييمات الدالة Kf ثم نقارن النتائج مع طريقة المنطقة الآمنة في [10]، وذلك بحل المسائل (2),(3),(5),(8),(9) في الأبعاد $n=2,2,3,3,4$ على الترتيب.

في الجدول (4) نسجل حسابات عدد تقييمات الدالة Kf وعدد تقييمات شعاع التدرج Kg وعدد التكرارات itr وعدد متجهات البحث المترافقة SD ثم مقارنة النتائج مع طريقة نيوتن المشابهة الجديدة في [11]، وذلك بحل المسائل (2),(3),(6),(7),(8),(9) في الأبعاد $n=2,2,2,2,3,4$ على الترتيب.

نسجل في الجدول (5) حسابات قيم الدالة f_k وعدد تقييمات الدالة Kf وعدد التكرارات itr . ثم مقارنة النتائج مع الطرائق في [12]، حيث تم حل المسألة (2) في الأبعاد $n=2,3,4$ ، وحل المسائل (3),(8),(9) في الأبعاد $n=2,3,4$ على الترتيب.

في الجدول (6) نسجل حسابات عدد تقييمات الدالة Kf وعدد تقييمات شعاع التدرج Kg وعدد التكرارات itr . ثم مقارنة النتائج مع الطرائق في [13]، وذلك بحل المسائل (2),(3),(8),(9) في الأبعاد $n=2,2,3,4$ على الترتيب.

تم في الجدول (7) تسجيل حسابات عدد تقييمات الدالة Kf وعدد تقييمات شعاع التدرج Kg وعدد التكرارات itr . ثم مقارنة النتائج مع طريقة التدرج المترافقة في [6]، وذلك بحل المسائل (2),(3),(6),(8),(9) في الأبعاد $n=2,2,2,3,4$ على الترتيب.

ندرج في الجدول (8) حسابات قيم الدالة f_k وعدد تقييمات الدالة Kf وعدد تقييمات شعاع التدرج Kg ثم مقارنة النتائج مع الطريقة في [14]، وذلك بحل المسائل (2),(3),(5),(7),(8),(9) في الأبعاد $n=3,2,3,2,3,4$ على الترتيب.

نعرض في الأشكال (1),(2),(3) مخططات بيانية لتمثيل سرعة التقارب للطريقة المقترحة مطبقة للمسائل (2),(8),(9) في الأبعاد $n=4,3,4$ على الترتيب.

المسألة (1) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Conic** [8] التالية:

$$f(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)^2},$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (0,0)$ ، و $f(X^*) = 0$

المسألة (2) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Rosenbrock** [9]:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{[n/2]} [100(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_{2i-1})^2],$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (1, \dots, 1)$ ، و $f(X^*) = 0$.

ملاحظة (4): تدعى دالة المسألة (2) بدالة **Extended Rosenbrock** إذا كان $n > 2$.

المسألة (3) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Beale** ($n=2, m=3$) [8]:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m [f_i(X)]^2 ,$$

$$f_i(X) = y_i - x_1(1 - x_2^i) , \quad i=1, \dots, m ,$$

$$y_1 = 1.5, y_2 = 2.25, y_3 = 2.625$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (3, 0.5)$ ، و $f(X^*) = 0$.

المسألة (4) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Trigonometric** [8] :

$$f(X) = \sum_{i=1}^n [f_i(X)]^2 ,$$

$$f_i(X) = n - \sum_{j=1}^n \cos x_j + i(1 - \cos x_i) - \sin x_i , \quad i=1, \dots, n$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (0, \dots, 0)$ ، و $f(X^*) = 0$.

المسألة (5) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Cube** [9] :

$$f(X) = \sum_{i=1}^{[n/2]} [100(x_{2i} - x_{2i-1}^3)^2 + (1 - x_{2i-1})^2] ,$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (1, \dots, 1)$ ، و $f(X^*) = 0$.

المسألة (6) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Freudenstein and Roth** [9] :

$$f(X) = \{-13 + x_1 + [(5 - x_2)x_2 - 2]x_2\}^2 + \{-29 + x_1 + [(x_2 + 1)x_2 - 14]x_2\}^2 ,$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (5, 4)$ ، و $f(X^*) = 0$.

المسألة (7) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Brown Badly Scaled** [9] ($m=3, n=2$) :

$$f(X) = \sum_{i=1}^m [f_i(X)]^2 ,$$

$$f_2(X) = (x_2 - 2 * 10^{-6}) , f_3(X) = (x_1 x_2 - 2) f_1(X) = (x_1 - 10^6)$$

$$f(X) = (x_1 - 10^6)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_1 x_2 + 2)^2 ,$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (10^6, 2 * 10^{-6})$ ، وقيمة الدالة $f(X^*) = 0$.

المسألة (8) [15]: أوجد النهاية الصغرى لدالة **Box Three-Dimensional** [15] ($n=3$) :

$$f(X) = [\exp(-0.1x_1) - \exp(-0.1x_2) - x_3(\exp(-0.1) - \exp(-1))]^2 +$$

$$[\exp(-0.2x_1) - \exp(-0.2x_2) - x_3(\exp(-0.2) - \exp(-2))]^2 +$$

$$[\exp(-0.3x_1) - \exp(-0.3x_2) - x_3(\exp(-0.3) - \exp(-3))]^2$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (1, 10, 1)$ ، وقيمة الدالة $f(X^*) = 0$.

المسألة (9): أوجد النهاية الصغرى لدالة **Wood** [15] ($n=4$):

$$f(X) = [10(x_2 - x_1^2)]^2 + (1 - x_1)^2 + [\sqrt{90}(x_4 - x_3^2)]^2 + (1 - x_3)^2 + [\sqrt{10}(x_2 + x_4 - 2)]^2 + [(1/\sqrt{10})(x_2 - x_4)]^2$$

حيث الحل الدقيق $X^* = (1, 1, 1, 1)$ ، وقيمة الدالة $f(X^*) = 0$.

الجدول(1):مقارنات للطريقة المقترحة مع طرائق المنطقة الآمنة المشابهة للنيوتن في [7,8]

Quasi-Newton Trust Region Method [8]		Quasi-Newton Trust Region Methods [7]		الطريقة المقدمه		نقطة البدء $X^{(0)}$	المسألة المطروحة
$\ g_k\ $	Itr.	$\ g_k\ $	Itr.	$\ g_k\ $	Itr.		
1.3509E-6	12	5.4378E-6	19	4.6355E-19	2	(-1,10)	المسألة 1
2.9327E-6	9	7.0235E-6	13	7.4731E-20	2	(2, 2)	
5.2471E-7	18	3.3117E-5	26	0	8	(2,-2)	المسألة 2
3.0584E-6	31	2.1580E-6	42	0	13	(-3.6,5.6)	
4.8572E-5	15	8.2256E-7	9	5.9237E-18	8	(2, -2)	المسألة 3
8.3233E-7	26	1.6309E-7	14	1.0403E-18	5	(1, 1)	
1.8134E-7	59	1.2943E-7	48	5.8483E-14	7	(1/2,1/2)	المسألة 4
6.3030E-6	47	1.8631E-6	33	1.0287E-14	8	(1/5,1/5)	

الجدول(2): مقارنات للطريقة المقترحة مع طرائق المنطقة الآمنة في [9].

Trust Region Methods[9]			الطريقة المقدمه			نقطة البدء $X^{(0)}$	المسألة المطروحة
f_k	$\ g_k\ $	Itr.	f_k	$\ g_k\ $	Itr.		
1.8642E-21	1.9104E-10	36	5.3849E-34	7.8630E-16	9	(-1.2,1)	المسألة 2
9.5047E-26	1.5822E-11	43	0	0	6	(-1.2,1)	المسألة 5
6.9925E-27	7.2195E-12	15	7.8761E-32	3.2379E-21	4	(-0.5,2)	المسألة 6
1.0000E-12	1.7780E-10	20	4.6521E-33	2.6208E-11	4	(1, 1)	المسألة 7

الجدول(3): مقارنات للطريقة المقترحة مع طرائق المنطقة الآمنة في [10].

Trust Region Methods[10]				الطريقة المقدمه				المسألة المطروحة
f_k	Kg	Kf	N	f_k	Kg	Kf	N	
1.0990E-22	22	37	59	3.3087E-24	5	34	39	المسألة 2
2.0004E-20	9	28	37	1.3558E-37	7	33	40	المسألة 3
7.1552E-16	28	52	80	0	7	41	48	المسألة 5
2.0993E-14	15	35	46	9.6617E-19	16	20	36	المسألة 8
7.2788E-21	39	109	158	9.6617E-23	10	103	113	المسألة 9

ملاحظة(5): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (3) باختيار نقاط البدء التالية (1.5, 1.5)، (2,3)، (2, -1.5)، (0, 3, 1)، (-1,2,-1,2) على الترتيب.

الجدول(4): مقارنات للطريقة المقترحة مع طرائق نيوتن المشابهة الجديدة في [11]

$$\|g_k\| \leq 10^{-6} \text{ حيث يتم التكرار حتى يتحقق الشرط}$$

New quasi-Newton methods[11]					الطريقة المقدمه					المسألة
<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	<i>Kg</i>	<i>SD</i>	<i>N</i>	<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	<i>Kg</i>	<i>SD</i>	<i>N</i>	المطروحة
29	51	30	0	81	5	31	5	20	56	المسألة 2
15	25	16	0	41	4	20	4	16	40	المسألة 3
10	22	11	0	33	3	18	3	12	33	المسألة 6
13	138	14	2	158	2	8	2	8	18	المسألة 7
30	40	31	0	71	5	24	5	20	49	المسألة 8
53	93	54	0	147	8	93	8	36	147	المسألة 9

ملاحظة(6): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (4) باختيار نقاط البدء التالية (1.5, 2) ، (3,2) ، (2, 2) ، (100, 2) ، (-1, 5,1) ، (-1,0,1,2) على الترتيب.

الجدول(5): مقارنات للطريقة المقترحة مع الطرائق في [12].

Algorithm QNP Methods[12]				الطريقة المقدمه				المسألة
f_k	<i>n</i>	<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	f_k	<i>n</i>	<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	المطروحة
1.49E-20	2	31	117	0	2	8	71	المسألة 2
-----	---	---	---	0	3	21	273	
1.32E-20	4	77	365	3.727E-29	4	13	168	المسألة 3
0	2	27	97	2.1197E-35	2	8	41	
7. 25E-11	3	53	261	1.0172E-23	3	22	120	المسألة 8
2. 25-04	4	81	382	9.6617E-23	4	10	125	المسألة 9

ملاحظة(7): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (5) باختيار نقاط البدء التالية (2,1.5) ، (4,3) ، (1,0,1) ، (1,3,4,3) على الترتيب.

الجدول(6): مقارنات للطريقة المقترحة مع الطرائق في [13] والتكرار حتى يتحقق الشرط $\|g_k\| < 10^{-5}$

Nonmonotone Trust Region [13]					الطريقة المقدمه					المسألة
<i>n/m</i>	<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	<i>Kg</i>	<i>N</i>	<i>n/m</i>	<i>ltr.</i>	<i>Kf</i>	<i>Kg</i>	<i>N</i>	المطروحة
2/2	39	40	38	78	2/2	7	68	7	75	المسألة 2
2/3	14	15	15	30	2/3	5	24	5	29	المسألة 3
3/10	82	83	83	166	3/10	13	84	13	97	المسألة 8
4/6	41	42	42	84	4/6	6	42	6	48	المسألة 9

ملاحظة(8): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (6) باختيار نقاط البدء التالية (3, 0) ، (2,2) ، (1,-1,1) ، (2,3,2,3) على الترتيب.

الجدول(7): مقارنات للطريقة المقترحة مع طريقة التدرج المترافقة في [6]

حيث يتم التكرار حتى يتحقق الشرط $\|g_k\| < 10^{-5}$

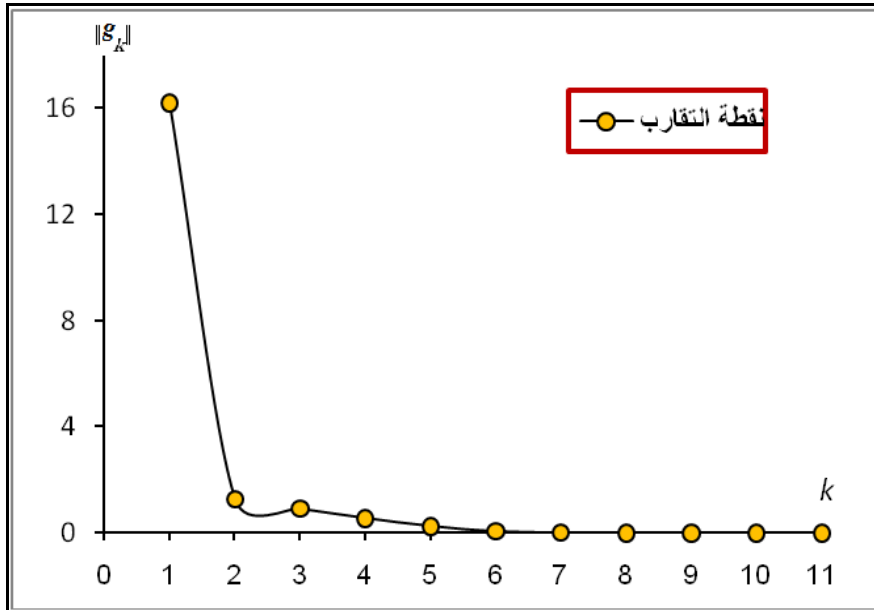
A Conjugate Gradient Method [6]					الطريقة المقدمة					المسألة
n	$ltr.$	Kf	Kg	N	n	$ltr.$	Kf	Kg	N	المطروحة
2	23	157	68	225	2	7	61	7	68	المسألة 2
2	17	36	21	57	2	3	17	3	20	المسألة 3
2	22	55	34	89	2	3	19	3	22	المسألة 6
3	2	17	3	20	3	5	39	5	44	المسألة 8
4	23	60	38	98	4	6	44	6	50	المسألة 9

ملاحظة(9): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (7) باختيار نقاط البدء التالية (2,0) ، (2.5, 0) ، (5, 6) ، (1,1,1) ، (2,2,2,2) على الترتيب.

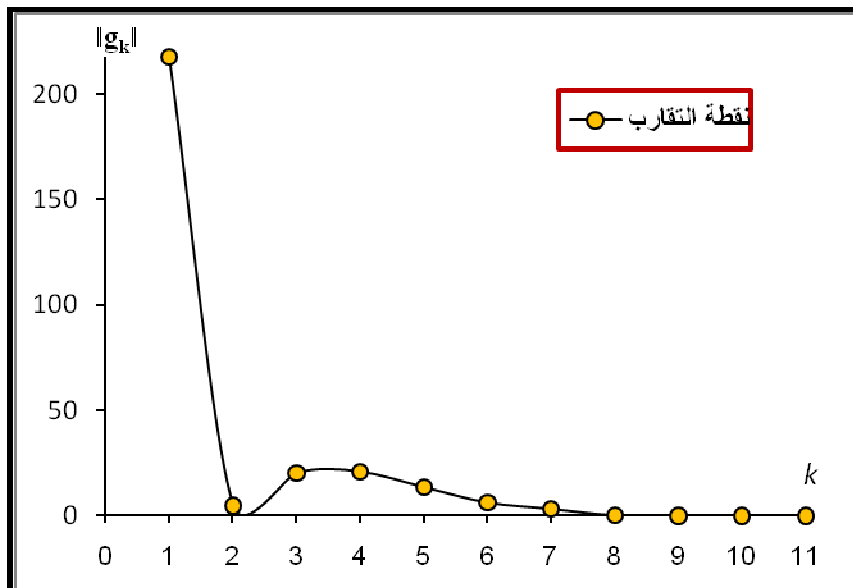
الجدول(8): مقارنات للطريقة المقترحة مع الطريقة في [14]

Nonmonotone Globalization Method [14]				الطريقة المقدمة				المسألة
f_k	n	Kf	Kg	f_k	n	Kf	Kg	المطروحة
7.6258E-16	2	18	12	2.9387E-37	2	31	5	المسألة 2
8.4023E-15	2	10	10	9.9039E-38	2	23	5	المسألة 3
9. 6635-23	3	17	13	0	3	40	6	المسألة 5
0	2	28	6	0	2	7	2	المسألة 7
2. 3734E-16	3	14	11	1.0172E-23	3	43	6	المسألة 8
1.2360-13	4	33	30	1.0983E-23	4	52	8	المسألة 9

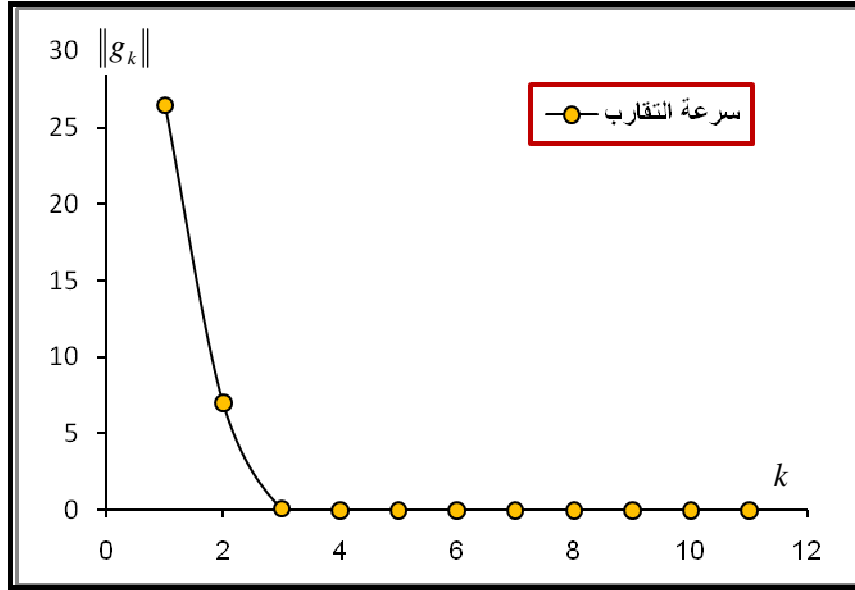
ملاحظة(10): تم حل المسائل المطروحة في الجدول (8) باختيار نقاط البدء التالية (1.5, 0.5) ، (2, 1) ، (1.5,0.5) ، (1000, 1) ، (-1,2,0) ، (3,3,3,3) على الترتيب.



الشكل(1):مخطط سرعة التقارب للطريقة مطبقة للمسألة(2) من أجل $X^{(0)} = (2, 2, 2, 2)$ والبعد $n=4$.



الشكل(2):مخطط سرعة التقارب للطريقة مطبقة للمسألة(8) من أجل $X^{(0)} = (-1, 2, 0)$ والبعد $n=3$.



الشكل(3): مخطط سرعة التقارب للطريقة مطبقة للمسألة(9) من أجل $X^{(0)} = (3,3,3,3)$ والبعد $n=4$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث طريقة تدرج مترافقة استخدمت لحل بعض المسائل في الأمثليات غير المقيدة. تبين الدراسة أن الطريقة عندما طُبِّقَتْ لحل تسع مسائل معيارية كانت فعالة وتقاربت إلى الحل الأمثل كما هو موضح في الأشكال(1)،(2)،(3). كما أن الطريقة تستطيع إيجاد الحل الأمثل الدقيق من أجل الدوال التربيعية، وتستطيع إيجاد حلول فعالة جدا من أجل دوال فوق تربيعية.

كما أشارت النتائج العددية المدرجة في الجداول (1)،....، (8) والمقارنات العددية مع نتائج الطرائق الأخرى إلى فعالية وكفاءة الطريقة المقدمة . لهذا نوصي باستخدام طرائق التدرج المترافقة لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة ذات أبعاد عالية.

المراجع:

1. MURRAY, W., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*, Academic Press. London and New York, (1972).
2. Li G., Tang C., Wei Z., *New Conjugacy Condition and Related New Conjugate Gradient Methods For Unconstrained Optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics 202 (2007) 523 – 539.
3. ANDREI N., *Accelerated Conjugate Gradient Algorithm with Finite Difference Hessian/Vector Product Approximation for Unconstrained Optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics 230 (2009) 570-582.
4. ANDREI N., *Acceleration of Conjugate Gradient Algorithms for Unconstrained Optimization*, Applied Mathematics and Computation 213 (2009) 361–369.
5. ANDREI N., *Accelerated Scaled Memoryless BFGS Preconditioned Conjugate Gradient Algorithm for Unconstrained Optimization*, European Journal of Operational Research 204 (2010) 410–420.

6. YUAN G., Lu X., Wei Z., *A Conjugate Gradient Method with Descent Direction For Unconstrained Optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2009) 519-530.
7. Xu C., Yang Y., *Convergence Of Conic Quasi-Newton Trust Region Methods For Unconstrained Minimization*, Math. Appl. 11 (2) (1998) 71–76.
8. Wang F., Zhang K. and Tan X., *A Fractional Programming Algorithm Based On Conic Quasi-Newton Trust Region Method For Unconstrained Minimization*, Applied Mathematics and Computation 181 (2006) 1061–1067.
9. ZHANG J., ZHANG K., QU S., *A Nonmonotone Adaptive Trust Region Method For Unconstrained Optimization Based On Conic Model*, Applied Mathematics and Computation 217 (2010) 4265–4273.
10. FU J., SUN W., *Nonmonotone adaptive trust-region method for unconstrained optimization problems*, Applied Mathematics and Computation 163 (2005) 489-504.
11. WEI Z., LI G., QI L., *New Quasi-Newton Methods for Unconstrained Optimization Problems*, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 1156-1188.
12. Wu T., Sun L., *A Quasi-Newton Based Pattern Search Algorithm for Unconstrained Optimization*, Applied Mathematics and Computation 183 (2006) 685–694.
13. QING-JUN W., *Nonmonotone trust region algorithm for unconstrained optimization problems*, Applied Mathematics and Computation 217 (2010) 4274-4281.
14. ZHOU Q., SUN W., QI L., *A Nonmonotone Globalization Algorithm With Preconditioned Gradient Path For Unconstrained Optimization*, Applied Mathematics and Computation 217 (2010) 4257-4264.
15. FAN S.-K. S., ZAHARA E., *A hybrid simplex search and particle swarm optimization for unconstrained optimization*, European Journal of Operational Research 181 (2007) 527-548.