مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (6) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (6) 2018

الدوال المطردة تمامًا وعلاقتها بالدوال الخاصة

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور عبد الباسط يونسو**
الدكتور أحمد بكداش***
نبيل خضير سلمان****

(تاريخ الإيداع 17 / 10 / 2018. قُبِل للنشر في 6 / 12 /2018)

☐ ملخّص ☐

ناقشنا في هذا البحث مفهوم الدوال المطردة تمامًا وعلاقتها ببعض الدوال الخاصة الشهيرة، كدوال (غاما، كيو ميرز، المقطع الاسطواني، غوص الهندسي، ماكدونالد، ويتكر، ميتاك ـ لفلور المعممة). أوجدنا علاقة الاطراد التام بالتحويلات التكاملية المطردة تمامًا تحت شروط التقارب، وأيا كانت الدالة غير السالبة كتحويلات (هانكل، لامبيرت، ستيلتجس، لابلاس). كما يتم دراسة انماط أخرى من حالة الدوال المركبة التي تعطى بدلالة سلاسل القوى ذات عوامل غير سالبة وتحويلات تكاملية لدوال غير سالبة مطردة تمامًا ودوال التحويلات التكاملية مع نواة متجانسة من الدرجة الاولى وايضا دوال لوغاريتميه مطردة تمامًا. في النهاية ناقشنا صف الدوال المطردة تمامًا التي ترتبط بتحويل ستيلتجس المعرف كصف من الدوال المحققة لمتراجحات بعض الدوال الخاصة، وبعض المتراجحات لأجل هذه الدوال الناتجة من الاطراد التام غير المتناقصة او محدبة، لكن أغلبها مطردة تمامًا.

الكلمات المفتاحية: الدوال الخاصة، الدوال المطردة تمامًا، تحويلات متكاملة، توزيعات احتمالية قابلة للقسمة، الدالة اللوغاريتمية المطردة تمامًا.

---

*أستاذ- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.
** مدرس- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.
***أستاذ مساعد- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.
**** طالب دراسات عليا (دكتوراه)- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (6) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (6) 2018

Completely monotonic functions related to the special functions

Dr. Mohammad Soueycatt*
Dr. Abedalbaset Yonsoo**
Dr. Ahmad Bekdash***
Nabil Khuder Salman****

(Received 17 / 10 / 2018. Accepted 6 / 12 /2018)

☐ ABSTRACT ☐

In this paper, we discuss the completely monotonic functions and their relation to some of the famous special functions such as (Gamma, Kumar, Parabolic cylinder, Gauss hypergeometric, MacDonald, Whittaker and Generalized Mittag-Leffler) function. In addition, the relationship of the completely monotonic integrations with absolute progress under conditions of convergence such as transformations (Hankel, Lambert, Stieltjes and Laplace).

We will found other modes of composite functions given in terms of non-negative power chains and integrative transformations of completely monotonic non-negative functions, the state of integrative transform functions with a homogeneous nucleus of the first order, and the logarithmically completely monotonic functions.

The importance of the row of completely monotonic functions that are associated with the transformation of the Stieltjes defined as a class of special functions regression functions. Some of the oscillations of these functions resulting from completely monotonic functions are not decreasing or convex, but most of them are completely monotonic functions.

Key words: special functions, completely monotonic functions, integral transforms, infinitely divisible probability distributions, logarithmically completely monotonic function.

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
******Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

في هذا البحث نناقش مفهوم الاطراد التام وبعض خصائص الدوال المطردة تمامًا، وإعطاء أمثلة مختلفة، بما في ذلك بعض الدوال الأسية والدوال الخاصة الشهيرة وعلاقتها بالدوال المطردة تمامًا، ومثل هذه الدوال مفيدة ومهمه في التحليل الرياضي ولها تطبيقات فيزيائية مختلفة كدوال (غاما، كيو ميرز، المقطع الاسطواني، غوص الهندسي، ماكدونالد، ويتكر، ميتاك–لفلور)، وعلاقة الاطراد التام بالتحويلات التكاملية المطردة تمامًا تحت شروط التقارب، وأيا كانت الدالة غير السالبة كتحويلات (هانكل، لامبيرت، ستيلتجس، لابلاس).

أهمية البحث وأهدافه:

إن أهمية البحث هو دراسة مفهوم الدوال المطردة تمامًا وعلاقتها بالدوال الاسية وبعض الدوال الخاصة ودراسة انماط أخرى من حالة الدوال المركبة التي تعطى بدلالة سلاسل القوى ذات عوامل غير سالبة، والتحويلات التكاملية للدوال غير السالبة المطردة تمامًا، وحالة دوال التحويلات التكاملية مع نواة متجانسة ذات الدرجة -1، والدوال اللوغارتميه المطردة تمامًا.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث في مجال الرياضيات البحتة، وتعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم الدوال المطردة تمامًا وبعض الدوال الخاصة الشهيرة وتحويلات التكامل كدوال مطردة تمامًا وتمثيلها التكاملي.

النتائج والمناقشة:

1. تعاريف وبعض القواعد الأساسية.

تعريف: الدالة المطردة (Monotone function): [1]

إذا كانت الدالة $f \in C^{\infty}[(0,\infty)]$، $f:(0,\infty)\to R$ ، تمتلك المشتقات من كل الرتب على المجال المفتوح $(0,\infty)$ من أجل جميع القيم $n=0,1,2,...$ بحيث تحقق المتراجحة الاتية:

$(-1)^n f^{(n)}(x) > 0$ من أجل كل $x>0$. عندها يقال ان الدالة f هي دالة مطردة.

وتسمى بالدالة المطردة تمامًا(Completely monotone function) إذا حققت المتراجحة الأتية:

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \qquad (1.1)$$

والشرط اللازم والكافي لتكون $f(x)$ مطردة تمامًا، هو أن يكون: $f(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}\,d\alpha(t)$

حيث $\alpha(t)$ غير متناقص، والتكامل متقارب من أجل كل $0<x<\infty$. ومنه نستنتج أن دالة $f(x)$مطردة تمامًا غير صفرية لا يمكن اخفاؤها لأي x موجب، والنهاية $f^{(n)}(0)=\lim_{x\xrightarrow[n]{}\infty} f^{(n)}(x)$ تكون موجودة سواء كانت منتهية أو غير منتهية.

إذا كانت $f(x)$ مطردة تمامًا وكان $f^{(n_0)}(x_0)=0$ في نقطة $x_0\in(0,\infty)$ من أجل $n_0=0,1,2,...$

فإن مشتقاتها من مراتب عليا تكون أيضا مساوية للصفر في هذه النقطة: $f^{(n)}(x_0) = 0 , n > n_0$

مثال: الدالة $f(x) = e^{-x} \geq 0$ هي دالة مضطردة تماماً، حيث $f \in C^{\infty}(\,]0,\infty[\,)$

والدوال الآتية أمثلة مباشرة لدوال مطردة تمامًا:

$$e^{-\alpha x} \quad , \quad \frac{1}{(\lambda+\mu x)^{\nu}} \quad , \quad \ln\left(b+\frac{c}{x}\right) \tag{1.2}$$

حيث $\nu \geq 0 , \alpha \geq 0 , \lambda \geq 0 , \mu \geq 0$ مع λ , μ كلاهما مختلفين عن الصفر حيث $c > 0, b \geq 1$.

وهذه أمثلة أخرى من الدوال مثل:

$$e^{\frac{\alpha}{x}} \quad \alpha > 0 \quad , \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{1.3}$$

ملاحظة:1 إذا كانت $f(x)$ دالة مطردة تمامًا، عندئذ الدوال الآتية:

$$f^{(2m)}(x) \text{ ،} -f^{(2m+1)}(x)$$

ايضا مطردة تمامًا، ومن هذه النتيجة يتولد مباشرة أمثلة اخرى، مثال على ذلك ينتج من العلاقة (1.3) أن:

$$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$ مطردة تمامًا.

نظرية 1: [2]

إذا كانت الدالتان $f(x) , g(x)$ مطردتين تمامًا، عندئذ الدالة $af(x)+bg(x)$ مطردة تمامًا، حيث a,b ثابتان موجبان، والدالة $f(x).g(x)$ تكون أيضا دالة مطردة تمامًا.

البرهان: الأولى واضحة، أما الثانية هي ايضا سهلة وتنتج من علاقة ليبنيز (Leibniz formula) الآتية:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x).g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \tag{1.4}$$

نظرية 2:

لتكن الدالة $f(x)$ مطردة تمامًا ولتكن $h(x)$ دالة غير سالبة ومشتقتها مطردة تمامًا. عندئذ $f\left[h(x)\right]$ تكون أيضا مطردة تمامًا.

البرهان: يكفي الاشارة إلى أن علاقة المشتق من المرتبة n لدالة مركبة هي:

$$\frac{d^n}{dx^n} f\left[h(x)\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} f^{(k)}\left[h(x)\right] U_k(x) \tag{1.5}$$

حيث

$$U_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{k}{j}\left[h(x)\right]^j \frac{d^n}{dx^n}\left[h(x)\right]^{k-j}$$

نتيجة1 : لتكن الدالتان $f(x), g(x)$ مطردتين تمامًا عندئذ: $f\left(a + b\int_0^x g(t)\,dt\right)$

حيث a, b ثوابت إيجابية كيفية، بشكل خاص الدوال الآتية مطردة تمامًا:

$$f\left(ax^{\alpha}+b\right),\ a \geq 0,\ b \geq 0,\quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{1.6}$$

$$f\left[a+b\ln(1+x)\right],\ a \geq 0,\ b \geq 0 \tag{1.7}$$

$$f\left(1-e^{-x}\right) \tag{1.8}$$

$$f\left(Arctg\sqrt{x}\right) \tag{1.9}$$

نتيجة 2: لتكن الدالة $f(x)$ مطردة تمامًا و $f(0)<\infty$ عندئذ الدوال الآتية :

$$\frac{1}{\left[A-f(x)\right]^{\mu}},\quad A \geq f(0),\ \mu \geq 0 \tag{1.10}$$

$$-\ln\left[1-\frac{f(x)}{A}\right],\ A \geq f(0) \tag{1.11}$$

مطردة تمامًا، وينتج أيضا من العلاقة (1.11) أن:

$$\frac{f'(x)}{A-f(x)},\quad A \geq f(0) \tag{1.12}$$

مطردة تمامًا لأن العلاقة (1.12) تختزل إلى المشتق السالب في العلاقة (1.11) .

نلاحظ بعض الحالات الخاصة من الدوال المطردة تمامًا من نفس نمط العلاقات (1.6)، (1.11) :

$$e^{-ax^{\alpha}},\qquad a \geq 0,\qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{\left[a+b\ln(1+x)\right]^{\mu}},\quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ \mu \geq 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{\left[a-be^{-x}\right]^{\mu}},\quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ \mu \geq 0, \tag{1.15}$$

$$\ln\left[1-\frac{x}{x-\ln(1+x)}\right]. \tag{1.16}$$

نمط آخر من حالة الدوال المركبة تعطى بدلالة سلاسل القوى ذات عوامل غير سالبة في النظرية الآتية.

نظرية 3: لتكن الدالة $f(x)=y$ مطردة تمامًا، ولتكن سلاسل القوى: $\varphi(y)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ تتغير من أجل كل y في مجال الدالة $(0,\infty)$. إذا كان $a_k \geq 0$ حيث $k=0,1,2,\ldots$

عندئذ $\varphi\left[f(x)\right]$ مطردة تمامًا.

نتيجة: [3] إذا كانت $f(x)$ مطردة تمامًا، عندئذ $e^{f(x)}$ مطردة تمامًا، والدوال:

$$e^{ax^{\alpha}}, \quad a \geq 0, \quad \alpha \leq 0 \tag{1.17}$$

$$(1+x)^{\frac{a}{x}} = e^{a\frac{\ln(1+x)}{x}}, \qquad a \geq 0 \tag{1.18}$$

$$\left(a+\frac{b}{x}\right)^{\mu} = e^{\mu \ln\left(a+\frac{b}{x}\right)}, \qquad a \geq 1, b > 0, \quad \mu \geq 0 \tag{1.19}$$

جميعها دوال مطردة تمامًا.

لاحقا، سنعمم التمهيدية1، حالة الاطراد التام للدالة $\left(a+\frac{b}{x}\right)^{\mu}$ من أجل $a \geq 0$.

<u>ملاحظة 2:</u> نلاحظ واعتمادا على الدالة الاسية e^{x}، على سبيل المثال، الدوال:

$$\sinh x, \ \cosh x, L_n^{(\alpha)}(-x), \ I_n(x), \ E_{\alpha,\beta}(x) \tag{1.20}$$

تملك عوامل غير سالبة في نشر سلاسل القوى الخاصة بها، $L_n^{(\alpha)}(-x)$ تمثل كثيرات حدود لأكير، $I_n(x)$ تمثل دالة بيسيل المعدلة من النوع الأول و $E_{\alpha,\beta}(x)$ هي دالة ميتاك – لفلور المعممة (Generalized Mittag–Leffler function).

2. بعض الدوال الخاصة وتحويلات التكامل كدوال مطردة تمامًا.

(Some special functions and integral transforms as completely monotone functions)

1. 2 نظرية عن الدوال المطردة تمامًا ممثلة بالتكاملات

لتكن:

$$F(x) = \int_c^d k(x,t) f(t) dt, \qquad 0 \leq c < d \leq \infty. \tag{2.21}$$

إذا كانت $K(x,t)$ مطردة تمامًا في x من أجل كل $t \in (0,\infty)$ و $f(t)$ غير سالبة، عندئذ الشكل التفاضلي يبرهن أن $F(t)$ مطردة تمامًا أيضا، لأن التفاضل تحت إشارة التكامل يمكن أن يكون متقارب بانتظام من تكامل التفاضل، ونتوصل إلى الحالة الآتية:

<u>نظرية 4: [5]</u>

لتكن $K(x,t)$ دالة مطردة تمامًا في النقطة x من أجل كل $t \in (0,\infty)$، ولتكن الدالة التكاملية موضعيا غير السالبة $f(t)$، بحيث يكون كل التكاملات:

$$\int_c^d \frac{\partial^n}{\partial x^n} K(x,t) f(t) dt, \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{2..22}$$

تتقارب بانتظام في جوار أي نقطة $x \in (0,\infty)$. عندئذ $F(x)$ تكون مطردة تمامًا.

<u>تمهيدية:1</u> الدالة:

$$\left(a+\frac{b}{x}\right)^{\mu} \qquad ; \qquad a \geq 0, b > 0, \quad \mu \geq 0, \tag{2.23}$$

مطردة تمامًا.

البرهان: الدالة $a+\frac{b}{x}$ مطردة تمامًا، ومنه حسب النظرية 1، فإن $\left(a+\frac{b}{x}\right)^m$ تكون مطردة تمامًا في حال كان m عددا صحيحا. وهذا يقود إلى برهان التمهيدية في حال $0<\mu<1$،

التمثيل:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mu}=1+\frac{\mu}{x^{\mu}}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^{\mu+1}(xt+1)^{1-\mu}},$$

يكون صحيحا الأمر الذي يمكن التحقق مباشرة بطريقة تغيير المتحول $t=\frac{1}{xs}$. بما أن $\mu\le 1$، فإن الدالة $\frac{1}{(xt+1)^{1-\mu}}$ تكون مطردة تمامًا، عندئذ النتيجة تنتج من النظرية 4.

نتيجة: الدالة

$$\left(a+\frac{b}{x^{\alpha}}\right)^{\mu}\ ;\ a\ge 0,\ b\ge 0,\quad \mu\ge 0\qquad 0\le\alpha\le 1 \qquad (2.24)$$

مطردة تمامًا.

2-الاطراد التام لبعض الدوال الخاصة. (Complete monotonicity of some special functions)

باستخدام النظرية 4، نحصل على الحالات الآتية للاطراد التام لبعض الدوال الخاصة.

نظرية 5: الدوال الخاصة الآتية:

1.الدالة الموجية الهندسية (دالة كيومر) (Kumar's function): ${}_1F_1(a,c;-x),\ c>a>0$

2.دالة غوص الهندسي (Gauss hypergeometric function): ${}_2F_1(a,c;-x),\ c>b>0,\ a>0$

3.الدالة $x^{\min\left\{\nu,\frac{1}{2}\right\}}e^{x}K_{\nu}(x)$ حيث $K_{\nu}(x)$ دالة بيسيل المعدلة (دالة ماكدونالد) (MacDonald function).

4.الدالة $J_{\nu}^2(x)+Y_{\nu}^2(x)$، حيث $J_{\nu}(x)$ و $Y_{\nu}(x)$ دوال بيسيل (Bessel functions) من النوع الأول والثاني.

5.الدالة $e^{\frac{x^2}{4}}D_{\mu}(x)$، $\mu<0$، حيث $D_{\mu}(x)$ دالة المقطع الاسطواني (Parabolic cylinder function).

6.الدالة $x^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{2}}W_{\alpha,\beta(x)}$ و $\alpha<\beta+\frac{1}{2}$، حيث $W_{\alpha,\beta(x)}$ دالة ويتكر (Whittaker function).

جميعها دوال مطردة تمامًا.

البرهان: مضمون نظرية5 يستنتج من النظرية4 ومن التكامل المعروف الممثل بالدوال الخاصة الآتية:[4]

$${}_1F_1(a,c;-x),\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt,\ c>a>0 \qquad (2.25)$$

$$ {}_2F_1(a,b;c;-x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-t}(1-t)^{c-b-1}(1+tx)^{-a}dt,\ c>b>0 \quad (2.26)$$

$$J_V^{\,2}(x)+Y_v^{\,2}(x)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty K_0(2x\sinh t)\cosh(2vt)dt \quad (2.27)$$

$$D_\mu(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(-\mu)}\int_0^8 e^{-xt}e^{-\frac{t^2}{2}}t^{-\mu-1}dt,\quad \mu\langle 0, \quad (2.28)$$

$$W_{\alpha,\beta}(x)=\frac{x^{\beta+\frac{1}{2}}e^{\frac{-x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\alpha\right)}\int_0^8 e^{-xt}t^{\beta-\alpha-\frac{1}{2}}(1+t)^{\beta+\alpha-\frac{1}{2}}dt,\quad \beta>\alpha-\frac{1}{2} \quad (2.29)$$

فيما يتعلق بدالة ماكدونالد، من خلال تمثيلها التكاملي:

$$e^xK_v(x)=\int_0^\infty e^{-x(\cosh t-1)}\cosh(vt)dt\ ;\ x>0 \quad (2.30)$$

نستنتج أن $e^xK_v(x)$ مطردة تمامًا. لنعمم أكثر، أن $x^{\min\left\{v,\frac{1}{2}\right\}}e^xK_v(x)$ مطردة تمامًا، نستخدم تمثيل آخر:

$$e^xK_v(x)=\frac{\sqrt{\frac{\Pi}{2x}}}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-t}t^{v-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{v-\frac{1}{2}}dt \quad , \quad x>0 \quad (2.31)$$

حيث أنه صحيح عند $v>-\frac{1}{2}$.من خلال التمهيدية1 ، المتجه $\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{v-\frac{1}{2}}$ في (2.31) مطرد تمامًا بالنسبة لـ x إذا كان $v\ge\frac{1}{2}$.

ليكن $v\le\frac{1}{2}$، نقوم بتغيير المتحولات $t=xs$ في التكامل في (2.31) و $K_v(x)=K_{-v}(x)$ ، نحصل الاتي:

$$e^xK_v(x)=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(-v+\frac{1}{2}\right)}x^{-v}\int_0^\infty e^{-xs}s^{-v-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s}{2}\right)^{-v-\frac{1}{2}}ds,\qquad 0\le v\le\frac{1}{2}, \quad (2.32)$$

بما أن e^{-xs} مطردة تمامًا بالنسبة لـ x، نستنتج أن $x^{v}e^{x}K_{v}(x)$ مطردة تمامًا، $0\le v\le\frac{1}{2}$.

<u>ملاحظة 3</u>. نستطيع الحصول على الاطراد التام للدوال الموجودة في النظرية 5، دون الإشارة إلى النظرية 4، بشكل مباشر من خلال الاستفادة من صيغ مشتقاتها من الدرجة n.

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1F_1(a,c;-x)=\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)}\,{}_1F_1(a+n,c+n;-x)\ge 0$$

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\,{}_2F_1(a,b;c;-x)=\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)\Gamma(a)}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;-x)\ge 0$$

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\frac{x^2}{4}}D_{\mu}(x)\right]=2\frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(-\mu)}e^{\frac{x^2}{4}}D_{\mu-n}(x)\ge 0$$

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\frac{x}{2}}x^{-\beta-\frac{1}{2}}W_{\alpha,\beta}(x)\right]=\frac{\Gamma\left(\beta-\alpha+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{x}{2}}x^{-\beta-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}W_{\alpha-\frac{n}{n},\beta+\frac{n}{2}}(x)\ge 0$$

في النتيجة التالية للنظرية 5، نستخدم دالة الخطأ (Error function) $Erfx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

ودالة غاما غير المعدلة بشكل غير تام (The modified incomplete Gamma function)

$$\gamma^*(\lambda,x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)x^{\lambda}}\int_0^x t^{\lambda-1}e^{-t}dt,\ \ \lambda>0.$$

وينتج من النظرية5. إن الدوال

$$\frac{Erf\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ ,\ \gamma^*(\lambda,x),\lambda>0\ \ ,\ \ \frac{\ln(1+x)}{x}$$

مطردة تمامًا.

<u>البرهان:</u>

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-x\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}Erf\sqrt{x},$$

$${}_1F_1(\lambda,\lambda+1;-x)=\Gamma(\lambda+1)\gamma^*(\lambda,x),\ \ \lambda\rangle 0$$

$${}_2F_1(1,1;2;-x)=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

<u>ملاحظة4:</u> بالعودة إلى استخدام صيغ دالة ماكدونالد $K_v(x)$. [4]

$$K'_V(x) = -K_{v-1}(x) - \frac{v}{x}K_v(x) \qquad (2.33)$$

$$x\left[K_{v+1}(x) - K_{v-1}(x)\right] = 2vK_v(x) \qquad (2.34)$$

يمكن استنتاج بعض النتائج انطلاقا من حقيقة $k_v(x)$وحتى $e^x k_v(x)$ مطردة تمامًا. لذلك من العلاقة (2.34)نستنتج أن: $xe^x\left[K_{v+1}(x) - K_{v-1}(x)\right]$ مطردة تمامًا.

وبتفاضل الجداء $e^x k_v(x)$، واستخدام (2.33) نتوصل الى أن:

$$e^x\left[K_{v-1}(x) + \left(\frac{v}{x} - 1\right)K_v(x)\right]$$ مطردة تمامًا.

نلاحظ أننا نستطيع الحصول على نتيجة للاطراد التام لمعادلة أخرى مميزة، دالة ريمان زيتا (Riemann zeta function)، كما هو معروض في النظرية الآتية.

نظرية:6 دالة ريمان زيتا العامة (The generalized Riemann zeta function)

$$\zeta(x+1, v+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+1+k)^{x+1}} \qquad (2.35)$$

مطردة تمامًا بالنسبة لــ X و V. يتم الحصول على البرهان من خلال التفاضل المباشر تحت السلاسل الفردية.

2.3التحويلات التكاملية للدوال غير السالبة المطردة تمامًا

نظرية 7: التحويلات التكاملية الآتية مطردة تمامًا تحت شروط التقارب، وأيا كانت الدالة غير السالبة $f(t)$ تكون:

1-تحويلات لابلاس (The Laplace transforms):

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)\,dt; \qquad (2.36)$$

2-تحويلات ستيلتجسس (The Stieltjes-type transforms):

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(x+t)^{\rho}} \qquad (2.37)$$

وأيضا التحويل المغلق:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{\left(x^{\alpha} + t^{\alpha}\right)^{\alpha}} f(t)\,dt \;;\quad (a > 0, 0 < \partial \le 1, \gamma > 0);$$

3-تحويلات لامبيرت (The Lambert transforms):

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{e^{xt} - 1} \qquad (2.38)$$

أو أكثر عمومية الدالة:

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{f(t)dt}{(e^{xt}-1)^m}, \quad m=1,2,3,4,\ldots$$

4ـ تحويلات هانكل (The Hankel−type transforms):

$$F(x)=\int_0^\infty \sqrt{xt}\,K_v\, f(t)dt, \qquad v \geq \frac{1}{2} \tag{2.39}$$

2.4 حالة دوال التحويلات التكاملية مع نواة متجانسة من الدرجة الاولى

توضح النظرية الآتية بعض المعايير الجيدة حول التحويلات التكاملية، والتي هي نتيجة من النظرية 4.

لتكن:

$$Kf(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt \quad t \qquad \text{أو} \quad Kf(x)=\frac{1}{x}\int_0^x k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt \tag{2.40}$$

<u>نظرية 8:</u> التحويل التكاملي لدالة مطردة تمامًا $f(t)$ في العلاقة (2.40) مع نواة $k(t)$ غير سالبة هو أيضا دالة مطردة تمامًا، تحت شروط التقارب الموافقة.

<u>البرهان:</u> لدينا

$$Kf(x)=\int_0^\infty k\left(\frac{1}{t}\right) f(xt)dt \tag{2.41}$$

من أجل الصيغة الأولى في (2.40) مع اخذ النهاية العليا ∞ في (2.41)، استبدال بالعدد 1 في حالة العلاقة الثانية من (2.40). بما أن $f(xt)$ في العلاقة (2.41) مطردة تمامًا بالنسبة للمتحول x والدالة $k\left(\frac{1}{t}\right)$ غير سالبة.

<u>نتيجة:</u> التكاملي الكسري المعدل (The modified fractional integral):

$$f_\alpha^* = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.42}$$

وتحويل لوف المعدل (Love transformation):[6]

$$\frac{1}{\Gamma(c)x^c}\int_0^x (x-t)^{c-1}\, {}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \quad c>b>0, \tag{2.43}$$

من أجل أي دالة $f(t)$ مطردة تمامًا، هي أيضا دوال مطردة تمامًا.

3. نسب دوال بيسيل:

<u>نظرية 9:</u> النسب الآتية لدوال ماكدونالد:

$$y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{K_v(\sqrt{x})}{K_{v+1}(\sqrt{x})}, \qquad y_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{K_{v+1}(\sqrt{x})}{K_v(\sqrt{x})} \tag{3.1}$$

$$y_3(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I_\nu(\sqrt{x})}{I_{\nu+1}(\sqrt{x})+I_\nu(\sqrt{x})}\,,\qquad y_4(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I_{\nu+1}(\sqrt{x})}{I_{\nu+1}(\sqrt{x})+I_\nu(\sqrt{x})}\qquad(3.2)$$

جميعها مطردة تمامًا.

البرهان: لتكن

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{t\left[J_{\nu+1}^2(\sqrt{t})+Y_{\nu+1}^2(\sqrt{t})\right]}\;,\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{t\left[J_\nu^2(\sqrt{t})+Y_\nu^2(\sqrt{t})\right]}\;,$$

$$\varphi_3(t)=\frac{J_\nu^2(\sqrt{t})}{\sqrt{t}\left[J_{\nu+1}^2(\sqrt{t})+J_\nu^2(\sqrt{t})\right]}\quad,\quad \varphi_4(t)=\frac{J_{\nu+1}^2(\sqrt{t})}{\sqrt{t}\left[J_{\nu+1}^2(\sqrt{t})+J_\nu^2(\sqrt{t})\right]}$$

ولتكن:

$$\Phi_k(x)=\int_0^\infty\frac{\varphi_k(t)dt}{x+t}\,,\quad k=1,2,3,4$$

عندئذ من $[5]$،$[6]$ يكون لدينا:

$$y_1(x)=\frac{2}{\pi^2}\Phi_1(x)\;,\quad y_2(x)=\frac{2\nu}{x}+\frac{2}{\pi^2}\Phi_2(x)\qquad(3.3)$$

$$y_3(x)=\frac{2}{\pi}\Phi_3(x)\;,\quad y_4(x)=\frac{2}{\pi}\Phi_4(x)$$

نظرية 10: تكون النسبة

$$F(x)=\frac{K_\nu(b\sqrt{x})}{K_\nu(a\sqrt{x})}\qquad(3.4)$$

مطردة تمامًا مع $b\geq a>0$.

البرهان: بما أن $F(x)=e^{-h(x)}$ مع $h(x)=-\ln F(x)$، وبالعودة للنظرية 2 يكفي البرهان أن $h(x)\geq 0$ وأن المشتق $h'(x)$ مطرد تمامًا. العلاقة السابقة واضحة لأن دالة ماكدونالد $k_\nu(t)$ متناقصة و $b\geq a$، ومن جهة أخرى وبحسابات مباشرة للمشتقة $h'(x)$، وبالعودة للصيغة (2.34) التي تعطى:

$$2\sqrt{x}\,h'(x)=b\,\frac{K_{\nu-1}(b\sqrt{x})}{K_\nu(b\sqrt{x})}-a\,\frac{K_{\nu-1}(a\sqrt{x})}{K_\nu(a\sqrt{x})}\qquad(3.4)$$

وباستخدام الصيغة الأولى في العلاقة (3.3) نحصل على:

$$h'(x)=\frac{b^2-a^2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{1}{(a^2x+t)(b^2x+t)}\frac{dt}{J_\mu^2(\sqrt{t})+Y_\mu^2(\sqrt{t})}$$

التي هي مطردة تمامًا باستخدام النظرية 4، ولأن $\frac{1}{(a^2x+t)(b^2x+t)}$ مطردة تمامًا وأن $\frac{1}{J_\mu^2(\sqrt{t})+Y_\mu^2(\sqrt{t})}$ غير سالبة.

<u>نتيجة:</u> الجداء

$$\frac{K_\nu(b\sqrt{x})}{K_\nu(a\sqrt{x})}\cdot\frac{K_\mu(b\sqrt{x})}{K_\mu(a\sqrt{x})}\ ,\ \ b\ge a>0$$

مطرد تمامًا من أجل كل ν و μ ، بالمقارنة هذا مع العبارة:

$$\frac{K_\nu(b\sqrt{x})}{K_\nu(a\sqrt{x})}\cdot\frac{K_\mu(b\sqrt{x})}{K_\mu(a\sqrt{x})}\ ,\ \ b\ge a>0,\quad \mu\ge\nu .$$

التي تم برهانها انها مطردة تمامًا في[5].

4.دالة ميتاك – لفلور وتعميمها (Mittag–Leffler function and its generalizations).

دالة ميتاك – لفلور

$$E_{\alpha,}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\ ,\quad \alpha>0 \qquad (4.1)$$

وتعميمها

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ ,\quad \alpha>0\ ,\ \beta>0 \qquad (4.2)$$

معروفة في تطبيقات مختلفة في التحليل، بشكل خاص في الحسابات الكسرية وفي نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية.

في[4]، تم البرهان أن $E_\alpha(-x)$ مطردة تمامًا من أجل كل $0<\alpha\le 1$.وهذا تم تعميمه في كل من[6] و [2] إلى $E_{\alpha,\beta}(-x)$ بأنها مطردة تمامًا من أجل كل $0<\alpha\le 1$ ، ومن أجل $\alpha\ge\beta$.

حالة أخرى للاطراد التام يكون في النظرية الآتية:

<u>نظرية 11:</u> تعميم دالة ميتاك – لفلور $E_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{x}\right)$ مطردة تمامًا من أجل كل $\beta>0,\ \alpha>0$.

بالحقيقة، هذا ينتج مباشرة من النظرية 3، لأن الدالة $\frac{1}{x}$ مطردة تمامًا.

بما أن بعض الدوال الخاصة يمكن نشرها بدلالة تعميم دالة ميتاك – لفلور، فهي مطردة تمامًا بشكل مباشر وذلك باختيار عوامل متغيرة مناسبة. لنعتبر الأمثلة الآتية:

إذا كان $0<M$ عددا صحيحا أو نصف صحيح $M=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots$

$$E_{\frac{1}{2},M}(-x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-x)^{j-2M}}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}-\sum_{j=0}^{2M-1}\frac{(-x)^{j-2M}}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}$$

$$=\frac{(-1)^{2M+1}}{x^{2M}}\left[xE_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x)+\sum_{k=0}^{2M-1}\frac{(-1)^k x^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\right] \quad (4.3)$$

فيما يتعلق بالدالة $E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x)$، انه من الممكن التعبير عنها بدلالة دالة الخطأ

$$Erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$$

سوف نبرهن أن الصيغة:

$$E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}-xe^{x^2}Erfc(x) \quad (4.4)$$

صحيحة. البرهان مباشر. بالفعل من طرفي العلاقة (4.2) ومن أجل k الزوجية والفردية نحصل على:

$$E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x)=-xe^{x^2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(1,\frac{1}{2},x^2\right)$$

عندئذ من التمثيل:

$$e^{-z}\,{}_1F_1\left(1,\frac{1}{2};z\right)={}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-z\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{(2k-1)k!}$$

ومن سلسلة النشر لدالة الخطأ[7]

$$e^{-x^2}+\sqrt{\pi}xErf(x)=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)(k+1)!}$$

نحصل على (4.4).

نلاحظ أيضا أن $E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x)$ تحويل لابلاس للدالة $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}te^{\frac{-t^2}{4}}$.

لنأخذ $M=1$ في العلاقة (4.3) وبالتعويض في (4.4)، نحصل على:

$$E_{\frac{1}{2},1}(-x)=e^{x^2}Erfc(x) \quad (4.5)$$

أيضا من أجل $\beta=n+1$ عدد صحيح موجب، نحصل على:

$$E_{1,n+1}(-x)=(-1)^n\frac{e^{-x}-e_{n-1}(-x)}{x^n} \quad (4.6)$$

حيث: $e_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

هو المجموع الجزئي لمنشور سلسلة الدالة e^x، لذلك نفرض أن $e_{-1}(x)\equiv 0$.

<u>نتيجة</u>: الدوال الاتية مطردة تمامًا.

$$e^{x^2}Erfc(x)=E_{\frac{1}{2},1}(-x) \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}-xe^{x^2}Erfc(x)=E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x) \tag{4.8}$$

$$(-1)^n\frac{e^{-x}-e_{n-1}(-x)}{x^n}=E_{1,n+1}(-x) \tag{4.9}$$

نشير هنا إلى أن الاطراد التام للدالة $e^{x^2}Erfc(x)$ ينتج أيضا مباشرة من التمثيل التكاملي للنظرية 4 :

$$e^{x^2}Erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-2xt-t^2}dt \tag{4.10}$$

ليكن α,β عددين موجبين، وليكن: $E_{\alpha,\beta,\lambda}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(\alpha,\beta,\lambda)$

حيث $C_0(\alpha,\beta,\lambda)=1\ ,C_m(\alpha,\beta,\lambda)=\prod_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma[\alpha(k\beta+\lambda)+1]}{\Gamma[\alpha(k\beta+\lambda+1)+1]}\ ,m\ge 1$

حيث α,β و λ أعداد تحقق العلاقة:

$$\alpha(k\beta+\lambda)\neq -1,-2,-3,... \tag{4.11}$$

في حالة $\beta=1$، تؤول دالة ميتاك – لفلور: $E_{\alpha,1,\lambda}(x)=\Gamma(\alpha\lambda+1)E_{\alpha,\alpha\lambda+1}$

والعلاقة (4.11) صحيحة. إذا كان $\alpha\le 1$ وكان $\lambda\ge 0$، عندئذ الدالة $E_{\alpha,1,\lambda}(-x)$ تكون مطردة تمامًا إذا كان $\alpha=1$ عندئذ إذا كان $\lambda>-1$: $E_{1,\beta,\lambda}(x)=\Gamma(\mu+1)E_{1,\mu+1}\left(\frac{x}{\beta}\right)$

حيث $\mu=\frac{x+1-\beta}{\beta}$. ومنه $E_{1,\beta,\lambda}(-x)$ تكون مطردة تمامًا إذا كانت $\lambda\ge\beta-1$.

إذا كان $\lambda>-\frac{1}{\alpha}$، العوامل C_m غير سالبه وباستخدام النظرية 3، نحصل على أن الدالة $E_{\alpha,\beta,\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)$ مطردة تمامًا.

5.الدالة اللوغاريتمية المطردة تمامًا (Logarithmically completely monotonic function).[7]

يقال إن الدالة الموجبة f لوغاريتميه مطردة تمامًا على المجال $(0,\infty)$ إذا كان لوغاريتم الدالة يحقق المتراجحة

الآتية، ومن أجل كل $x > 0$:

$$(-1)^n \left[\ln f(x)\right]^{(n)} \geq 0 , \quad n \in N \qquad (5.1)$$

ان الدالة اللوغاريتمية المطردة تمامًا لها علاقة بدوال غاما، والدوال الآتيه هي دوال لوغاريتمية مطردة تمامًا على المجال $(0,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\left[\Gamma(x+1)\right]^{\frac{1}{x}}} \qquad (5.2)$$

$$f(x) = \frac{\left[\Gamma(x+1)\right]^{\frac{1}{x}}}{x} \qquad (5.3)$$

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تمت دراسة انماط أخرى من حالة الدوال المركبة التي تعطى بدلالة سلاسل القوى ذات عوامل غير سالبة، والتحويلات التكاملية للدوال غير السالبة المطردة تمامًا، أهمية صف الدوال المطردة تماما التي ترتبط بتحويل ستيلتجس المعرف كصف من الدوال لمتراجحات الدوال الخاصة وبعض المتراجحات لأجل هذه الدوال الناتجة من الاطراد من الدوال المتناقصة او المحدبة، لكن أغلبها مطردة تمامًا.

ونوصي بدراسة امكانية وجود صفوف جديدة ومتنوعة من الدوال المطردة تمامًا، وهذه الدوال تشترك بصفة معينة بأنها معرفة بدلالة دوال غاما الكلاسيكية، ثنائية غاما وكثيرات حدود غاما. والبحث عن دالة تشيبيشيف المعرفة بالعلاقة الآتية: .

$$\theta(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \log P_k$$

وكذلك دوال بيك (Pick functions) وبرهنتها بانها من الدوال المطردة تمامًا.

المراجع:

[1] MILLER, K.S. ; SAMKO, S.G.. *A note on the complete monotonicity of the generalized Mittag-Leffler function.* Real Anal. Exchange, 23:753–755, 2011.

[2] SAIGON, M. ; KILBAS, A.A. *Integral representations and complete monotonicity of various quotients of Bessel functions*. Canada. J. Math., 29:1198–1207, 2009.

[3] ISMAIL. M.E.H. *Complete monotonicity of modified Bessel functions*. Proc. Amer. Math. Soc, 108, 2013:353–361.

[4] SCHNEIDER. W.R. MILLER. *An infinitely divisible distribution involving modified Bessel functions.* Proc. Amer. Math. Soc, 85, 2003:233–238.

[5] ISMAIL. M.E.H. *On Mittag- Leffler, type function and applications*. Integer. Transf. and Special Functions, 7, 2004:97–112.

[6] SCHNEIDER. W.R. C*ompletely monotone generalized Mittag-Leffler functions*. Expo. Math., 14, 2009:3–16, 201.

[7] Andrews,G.E. Askey, R. Roy, R. *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.