

تعيين الاهتزازات العرضانية اللاخطية لقضيب من مادة مرنة فعالة

الدكتور حسن محمد خليفة*

(تاريخ الإيداع 18 / 8 / 2013. قُبل للنشر في 21 / 1 / 2014)

□ ملخص □

إن الهدف من البحث المقدم في هذا العمل هو إيجاد طريقة موحدة لحل مسائل الاهتزازات العرضانية في الأوساط المرنة اللاخطية بوجود العامل البيولوجي. حصلنا على معادلات الاهتزازات العرضانية للمنظومات المرنة وذلك بالاعتماد على نماذج رياضية معروفة ثم حلينا مسألة الاهتزازات التوافقية العرضانية لقضيب فعال مرن لاخطي منتهي الطول.

الكلمات المفتاحية: مرونة، لاخطية، اهتزاز، رد فعل، بيولوجي، توافقي.

* مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Specification of cross nonlinear vibration of an elastic effective bar.

Dr. Hasan Mohammad Khalifeh *

(Received 18 / 8 / 2013. Accepted 21 / 1 / 2014)

□ ABSTRACT □

The goal of the presented research in this paper is finding a unified way to solve cross vibration problems in nonlinear elastic fields with a biological factor. We obtained the equations of cross vibration for elastic systems by using known mathematical models, and then we solved the nonlinear cross harmonic vibration problem for a finite length of effective bar.

Key Words: Elastic, Nonlinear, vibration, Reaction, Biological, harmonic.

* Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of science, University of Tishreen, Lattakia, Syria.

مقدمة:

يعدّ تأثير الاهتزازات على جسم الإنسان من أهم التأثيرات الميكانيكية التي تأخذ حيزاً واسعاً من الدراسة والاهتمام في يومنا هذا. وخصوصاً أن هذه الاهتزازات تظهر في وسائل النقل الأرضية منها والفضائية. كذلك تعدّ مسألة الحماية من الاهتزازات في المؤسسات الصناعية من أهم المسائل المطروحة في عصر التقدم العلمي والتقني. حيث يمكن التعرف على بعض وجهات النظر حول هذه المسألة في الأعمال [1, 2, 3]

أهمية البحث وأهدافه:

إنّ عملية تنظيم التحريضات الاهتزازية وحماية الجسم البشري تملك الدرجة الأولى من الاهتمام من أجل تحسين ظروف العمل والحماية من أضرار الاهتزازات. الهدف الرئيسي لهذه الدراسة هو توضيح العمليات الاهتزازية في وسط مرن بيولوجي. نعتبر عن هذه الاهتزازات المعقدة غير التوافقية، بوضعها على شكل مجموع اهتزازات توافقية بسيطة، تشكل ما يسمى طيف الاهتزاز.

طرائق البحث ومواده:

بالاعتماد على النموذج الموجود في العمل [4] وعلى المعادلة اللاخطية للأوساط المرنة الوراثة (عند الكائنات الحية) [5] واستخدام طريقة نشر تابع الإزاحة العرضانية في سلسلة قوى وطريقة تحليل فورييه، تم إيجاد طريقة لحل المسألة المدروسة.

تعتمد الدراسة النظرية لهذه المسائل على النماذج الميكانيكية لأعضاء الجسم البشري، حيث أدخل مفهوم العامل البيولوجي لأول مرة في العمل [4] كمتغير يؤثر إلى جانب التأثيرات الميكانيكية على التشوه والإزاحة في المادة. تم في العمل [6] وضع نموذج لجسم صلب قابل للتشوه مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي. وتم في الأعمال [7, 8, 9] حل مسائل مختلفة لانتشار الأمواج الطولانية الأحادية البعد في الأوساط اللاخطية المرنة والمرنة اللزجة بوجود العامل البيولوجي.

سندرس في هذا العمل مسألة الاهتزازات العرضانية لقضيب منتهي الطول من مادة مرنة فعالة بيولوجياً. تعتمد هذه الدراسة على النماذج الرياضية التي تأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي [3,7]. كما نلاحظ هذه الدراسة أن النسيج البيولوجية - عضلية أو عظمية - تملك وبشكل صريح خصائص مرنة وعلاقة غير خطية بين القوى المؤثرة (الإجهاد المطبق) والتشوه [10,11].

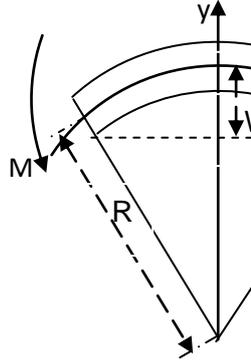
1- تملك معادلة توازن العزوم، بإهمال عطالة الدوران لعناصر القضيب حول محور عمودي على مستوي النقوس [7] ، الشكل الآتي:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + F = 0 \quad (1)$$

حيث F قوى القص و M عزم النقوس و x الإحداثي المستقيم، الموجه على امتداد محور القضيب، كما في الشكل. كذلك:

$$M = \int_{-h}^h y \sigma_x dy \quad (2)$$

حيث σ_x هو الإجهاد.



تدفق موجة التقوس في جزء من القضيب عند إخضاعه لاهتزاز عرضاني
 R - نصف قطر تقوس القضيب، W - تقوس القضيب، M - عزم التقوس

نأخذ قانون رابوتنف [5] من أجل الأوساط التي تملك خصائص وراثية:

$$\sigma = \frac{1}{1+K^*} \varphi(\varepsilon) = (1-\Gamma^*)\varphi(\varepsilon) \quad (3)$$

K^* هو معامل التسلق للأنواع الوراثةية و $\Gamma^* = \int_0^t \Gamma(t-s)f(s)ds$ هو معامل الحل له. $\varphi(\varepsilon)$ تابع

لاخطي يصف منحنى التشوه اللحظي نأخذه بالشكل الآتي [12]:

$$\varphi(\varepsilon) = a \ln(1 + \lambda \varepsilon) \quad (4)$$

حيث $\varepsilon = \frac{y}{R}$ - التشوه و R - نصف قطر التقوس و λ, a أعداد ثابتة بالإضافة إلى أن λ هو بارامتر

لاخطية منحنى التشوه اللحظي $0 < \lambda \ll 1$.

نأخذ منشور (3) في سلسلة بقوى λ وذلك بدقة حتى λ^2 في (2) فنحصل على:

$$M = E \int_{-h}^h \left(\frac{y^2}{R} - \frac{\lambda y^3}{2R^2} + \frac{\lambda^2 y^4}{3R^3} \right) dy + \dots \quad (5)$$

أو:

$$M = EJ \left(\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial^2 x} \Gamma(t-s) ds \right) + \lambda^2 EJ_1 \left[\left(\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right)^3 - \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial^2 x} \right)^3 \Gamma(t-s) ds \right] + \dots \quad (6)$$

حيث $\lambda = E$ ، E - معامل المرونة اللحظي ليونغ. $J = \frac{2}{3} h^3$ عزم عطالة المقطع العرضي للقضيب

بالنسبة لمحور عرضي. W - تقوس القضيب. كذلك $J_1 = \frac{2}{15} h^5$ و $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{R^2}$.

تملك دراسة انتشار الاهتزازات العرضانية في قضيب ميزات مرتبطة بخواص معادلة الحركة للقضيب عند الثني

[13, 14] وتأخذ هذه المعادلة الشكل الآتي:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S^* \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (7)$$

حيث S^* - مساحة المقطع العرضي للقضيب و ρ - الكثافة.

ندخل في المعادلة (7) حد يعبر عن رد فعل المادة [6] فنحصل على:

$$(1-A) \frac{\partial F}{\partial x} + A \tau \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \rho S^* \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (8)$$

هنا A و τ ثوابت بالإضافة إلى أن τ - بارامتر يصف تأخر رد فعل الوسط ($0 \leq \tau < 1$).

نعوض عبارة F التي نحصل عليها من تعويض (5) في (1) في المعادلة (8) آخذين بعين الاعتبار المقادير

الديلونية (مقادير مجردة من وحدات القياس) التالية:

$$\tilde{x}l = x, \quad \tilde{W}l = W, \quad \tilde{t}t_0 = \tau, \quad \tilde{t}t_0 = t, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \tilde{h}l = h \quad (9)$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية القابلة للحل بالنسبة لتابع النقرس والتي أهملنا فيها الإشارة فوق المقادير

الديلونية للسهولة:

$$\begin{aligned} (1-A) \left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Gamma(t-s) ds \right] + A \tau \left[\frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Gamma(t-s) ds \right] + \\ \lambda^2 r^2 \left\{ (1-A) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^3 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^3 \Gamma(t-s) ds \right] + \right. \\ \left. A \tau \left[\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^3 \Gamma(t-s) ds \right] \right\} + \eta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{حيث } \eta = \frac{\ell^4}{c_o^2 r_o^2 t_o^2}, \quad r^2 = \frac{h^2}{5}, \quad r_o = \sqrt{\frac{J}{S^*}}, \quad c_o = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{و } -r_o \text{ نصف قطر عطالة المقطع العرضي.}$$

تحتوي المعادلات (10) على بارامترين صغيرين غير مقاسين هما λ - بارامتر لاختية منحنى التشوه اللحظي،

τ - بارامتر تأخر رد الفعل (العامل البيولوجي)

ننشر التابع المراد تعيينه $W(x, t)$ في سلسلة بقوى البارامترين λ و τ على الشكل:

$$W(x, t) = \sum_{m,n} \lambda^m \tau^n W_{m,n}(x, t) \quad (11)$$

نأخذ بعين الاعتبار أن معادلة النموذج البيولوجي [6] التي اعتمدنا عليها قد تم الحصول عليها بدقة حتى

الدرجة الأولى للبارامتر τ . ومن أجل دقة النشر (11) نأخذ العلاقة بين البارامترين λ و τ على الشكل: $\lambda \sim \tau^{\frac{1}{2}}$

عندئذٍ نقتصر فيها على الحدود التي توافق الأزواج $(m, n) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$.

نعوض النشر (11) في المعادلة (10) بعد تعويض نواة معامل التسلق بالصفر ($\Gamma(t-S)=0$) (الحالة

المرنة لمادة القضيب) ونقارن الحدود المتساوية المراتب في الصغر فنحصل على جملة معادلات تفاضلية مترابطة

$$\text{تسمح بتعيين الدوال } W_{0,0}(x, t), W_{0,1}(x, t), W_{1,0}(x, t), W_{2,0}(x, t)$$

$$(1-A)\frac{\partial^4 W_{0,0}}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

$$(1-A)\frac{\partial^4 W_{0,1}}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial t^2} = -A \frac{\partial^5 W_{0,0}}{\partial x^4 \partial t} \quad (13)$$

$$(1-A)\frac{\partial^4 W_{1,0}}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^2 W_{1,0}}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

$$(1-A)\frac{\partial^4 W_{2,0}}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial t^2} = -(1-A)r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial t^2} \right)^3 \quad (15)$$

والتي تعين بدورها الحل العام (11).

سندرس اعتماداً على هذه المعادلات الاهتزازات العرضانية لقضيب منتهي الطول من مادة مرنة. لنفرض أن أحد طرفي القضيب ذي الطول غير المقاس $\ell = 1$ يخضع لاهتزاز مطاله W_0 وتردده ω والطرف الآخر حر من أي تأثير. فتأخذ الشروط الحدية الشكل الآتي:

$$W(x,t) = W_0 \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0; \quad x = 1 \quad (17)$$

تسمح هذه الشروط بصياغة الشروط الحدية للدوال $W_{m,n}(x,t)$ وتحديد المنحنيات الموافقة للمسألة وتبيان أثر الاهتزازات الصغيرة [15] في هذه الحالة.

سنبحث بحسب [16] عن حل المعادلة (12) في شكل سلسلة:

$$W_{0,0}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x, \gamma_k) e^{-i\gamma_k t} \quad (18)$$

هنا γ_k - ثوابت غير معلومة البارامترات حالياً.

إذا عوضنا (18) في (12) نحصل من أجل $W_k(x, \gamma_k)$ على معادلة تفاضلية [17] من الشكل:

$$W_k^{(4)} - \frac{\eta \gamma_k^2}{1-A} W_k = 0 \quad (19)$$

حيث الاشتقاق يتم بالنسبة للإحداثي x . المعادلة المميزة للمعادلة (19) لها الشكل:

$$\lambda_k^4 - b_k = 0 \quad ; \quad b_k = \frac{\eta \gamma_k^2}{1-A} \quad (20)$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (19) له الشكل:

$$W_k(x, \gamma_k) = C_{1k} ch \lambda_k^{(1)} x + C_{2k} sh \lambda_k^{(1)} x + C_{3k} ch \lambda_k^{(3)} x + C_{4k} sh \lambda_k^{(3)} x \quad (21)$$

حيث:

$$\lambda_k^{(1)} = -\lambda_k^{(2)} = \sqrt{a_k} \quad (22)$$

$$\lambda_k^{(3)} = -\lambda_k^{(4)} = i\lambda_k^{(1)}; \quad a_k = \sqrt{b_k}$$

عند تحقيق الحل (21) للشروط الحدية:

$$W_k(x) = \frac{W_0}{2}, \quad \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad x = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^3} = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad (23)$$

التي تنتج من الشروط (16) و (17)، فإننا نحصل من أجل المعاملات C_{jk} على سلسلة من المعادلات الجبرية حلها له الشكل الآتي:

$$C_{1k} = C_{3k} = \frac{W_0}{4}$$

$$C_{2k} = \frac{W_0}{4} \frac{-1 + \cos \lambda_k^{(1)} ch \lambda_k^{(1)} - \sin \lambda_k^{(1)} sh \lambda_k^{(1)}}{\sin \lambda_k^{(1)} ch \lambda_k^{(1)} - \cos \lambda_k^{(1)} sh \lambda_k^{(1)}}$$

$$C_{4k} = \frac{-iW_0}{4} \frac{1 - \cos \lambda_k^{(1)} ch \lambda_k^{(1)} - \sin \lambda_k^{(1)} sh \lambda_k^{(1)}}{\sin \lambda_k^{(1)} ch \lambda_k^{(1)} - \cos \lambda_k^{(1)} sh \lambda_k^{(1)}} \quad (24)$$

إن تحقق الشروط الحدية (23) يؤدي بدوره إلى تحقق الشروط (16) والشروط الثاني من (17). ومن أجل تحقق الشرط الأول من (17) يكفي أن نضع في (18) $\gamma_1 = -\gamma_2 = \omega$. بهذا الشكل فإن الحل (18) للمسألة المطروحة (12)، (16)، (17) يأخذ الشكل:

$$W_{0,0}(x,t) = R_{0,0}(x,\omega) \cos \omega t \quad (25)$$

حيث:

$$R_{0,0}(x,\omega) = \frac{W_0}{2} [ch \sqrt{a_1} x + D sh \sqrt{a_1} x + \cos \sqrt{a_1} x + D_1 \sin \sqrt{a_1} x]$$

$$D = \frac{-1 + ch \sqrt{a_1} \cos \sqrt{a_1} - sh \sqrt{a_1} \sin \sqrt{a_1}}{ch \sqrt{a_1} \sin \sqrt{a_1} - sh \sqrt{a_1} \cos \sqrt{a_1}}$$

$$D_1 = \frac{1 - ch \sqrt{a_1} \cos \sqrt{a_1} - sh \sqrt{a_1} \sin \sqrt{a_1}}{ch \sqrt{a_1} \sin \sqrt{a_1} - sh \sqrt{a_1} \cos \sqrt{a_1}} \quad (26)$$

- نعوض العبارة التي حصلنا عليها (25) للتابع $W_{0,0}(x,t)$ في المعادلة (13) فنحصل من أجل تعيين التابع $W_{1,0}(x,t)$ على المعادلة الآتية:

$$\frac{\partial^4 W_{0,1}}{\partial x^4} + \frac{\eta}{1-A} \frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial t^2} = \frac{a_1^2 A \omega W_0}{2(1-A)} R_{0,0}(x,\omega) \sin \omega t \quad (27)$$

سنبحث عن حل المعادلة (27) بالشكل:

$$W_{0,1}(x) = R_{0,1}(x) \sin \omega t \quad (28)$$

نعوض (28) في (27) فنجد:

$$R_{0,1}^{(4)}(x) - \frac{\eta \omega^2}{1-A} R_{0,1}(x) = \frac{a_1^2 A \omega W_0}{2(1-A)} R_{0,0}(x) \quad (29)$$

تأخذ الشروط الحدية الموافقة انطلاقاً من (16) و (17) و (23) الشكل الآتي:

$$W_{0,1}(x) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad x = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_{0,1}}{\partial x^3} = 0 ; \quad x = 1 \quad (30)$$

وهذا يعطي بدوره الشروط:

$$R_{0,1}(0) = 0 , \quad \frac{\partial^2 R_{0,1}(0)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 R_{0,1}(1)}{\partial x^2} = 0 , \quad \frac{\partial^3 R_{0,1}(1)}{\partial x^3} = 0 \quad (31)$$

عندئذٍ حل المعادلة (29) الذي يستوفي الشروط (31) سيأخذ الشكل الآتي:

$$R_{0,1}(x) = D_2 sh\sqrt{a_1}x + D_3 \sin\sqrt{a_1}x + R_{0,1}^*(x) \quad (32)$$

حيث $R_{0,1}^*(x)$ - الحل الخاص للمعادلة (29) وله الشكل:

$$R_{0,1}^*(x) = \frac{A\omega W_0 \sqrt{a_1}}{8(1-A)} x \left[Dch\sqrt{a_1}x + sh\sqrt{a_1}x + D_1 \cos\sqrt{a_1}x - \sin\sqrt{a_1}x \right] \quad (33)$$

من ناحية أخرى:

$$D_2 = \frac{\sqrt{a_1} R_{0,1}^{*''}(1) \cos\sqrt{a_1} - R_{0,1}^{*(3)}(1) \sin\sqrt{a_1}}{a_1^{3/2} (sh\sqrt{a_1} \cos\sqrt{a_1} - ch\sqrt{a_1} \sin\sqrt{a_1})}$$

$$D_3 = \frac{1}{a_1 \sin\sqrt{a_1}} \left(a_1 D_2 sh\sqrt{a_1} + R_{0,1}^{*''}(1) \right) \quad (34)$$

بهذا الشكل فإن حل المسألة (13) , (30) سيأخذ الصيغة الآتية:

$$W_{0,1}(x) = \left[D_2 sh\sqrt{a_1}x + D_3 \sin\sqrt{a_1}x + R_{0,1}^*(x) \right] \sin\omega t \quad (35)$$

تملك المعادلة (14) الحل الصفري من أجل الشروط الحدية المتجانسة الآتية:

$$W_{1,0}(x) = 0 , \quad \frac{\partial^2 W_{1,0}}{\partial x^2} = 0 ; \quad x = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_{1,0}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_{1,0}}{\partial x^3} = 0 ; \quad x = 1 \quad (36)$$

والتي تنتج من الشروط الحدية (16) , (17) و (23).

- ننتقل لحل المعادلة (15) من أجل تعيين الدالة $W_{2,0}(x,t)$.

نعوض عبارة $W_{0,0}(x,t)$ من (25) في (15) فنحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial^4 W_{2,0}}{\partial x^4} + \frac{\eta}{(1-A)} \frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{-r^2 W_0 a_1^3}{8} [r_1 ch\sqrt{a_1}x + r_2 ch3\sqrt{a_1}x + r_3 sh\sqrt{a_1}x + r_4 sh3\sqrt{a_1}x$$

$$+ r_5 \cos\sqrt{a_1}x + r_6 \cos3\sqrt{a_1}x + r_7 \sin\sqrt{a_1}x + r_8 \sin3\sqrt{a_1}x$$

$$s_1 \cos px + s_2 \cos p_1x + s_3 \sin px + s_4 \sin p_1x +$$

$$s_5 \cos qx + s_6 \cos q_1x + s_7 \sin qx + s_8 \sin q_1x] \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) \quad (37)$$

حيث:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{3a_1}{4}(3+2D_1^2-D^2), & r_2 &= \frac{9a_1}{4}(1+3D^2), & r_3 &= Dr_1, & r_4 &= \frac{9Da_1}{4}(3+D^2) \\ r_5 &= \frac{3a_1}{4}(3+D_1^2-2D^2), & r_6 &= \frac{9a_1}{4}(1-3D_1^2), & r_7 &= D_1r_5, & r_8 &= \frac{9D_1a_1}{4}(3-D_1^2) \\ s_1 &= \frac{3p^2}{4}(1+D^2+2iDD_1), & s_2 &= \bar{s}_1, & s_3 &= D_1s_1, & s_4 &= \bar{s}_3 \\ s_5 &= \frac{-3q^2}{4}(1-D_1^2+2iDD_1), & s_6 &= \bar{s}_5, & s_7 &= \frac{-3q^2}{4}(2D_1+iD(D_1^2-1)), & s_8 &= \bar{s}_7 \end{aligned}$$

$$p = \sqrt{a_1} + 2i\sqrt{a_1}, \quad p_1 = \bar{p}, \quad q = 2\sqrt{a_1} + i\sqrt{a_1}, \quad q_1 = \bar{q}$$

هنا D, D_1 تعين من العلاقة (26).

سنبحث عن حل المعادلة (37) على الشكل:

$$W_{2,0}(x,t) = f_{2,0}(x)\cos \omega t + g_{2,0}(x)\cos 3\omega t \quad (38)$$

حيث: $f_{2,0}(x), g_{2,0}(x)$ توابع تحدد لاحقاً.

انطلاقاً من الشروط الحدية (16) و (17) لدينا:

$$\frac{\partial^2 W_{2,0}(1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_{2,0}(1)}{\partial x^3} = 0 \quad \text{و} \quad W_{2,0}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{2,0}(0)}{\partial x^2} = 0 \quad (39)$$

وهذا بدوره يحدد من أجل التوابع $f_{2,0}(x), g_{2,0}(x)$ الشروط الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2 f_{2,0}(1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f_{2,0}(1)}{\partial x^3} = 0 \quad \text{و} \quad f_{2,0}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_{2,0}(0)}{\partial x^2} = 0 \quad (40)$$

كذلك:

$$\frac{\partial^2 g_{2,0}(1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 g_{2,0}(1)}{\partial x^3} = 0 \quad \text{و} \quad g_{2,0}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{2,0}(0)}{\partial x^2} = 0 \quad (41)$$

نعوض (38) في (37) آخذين بعين الاعتبار (40) فنحصل من أجل التابع $f_{2,0}(x)$ على:

$$f_{2,0}(x) = \alpha_1 ch\sqrt{a_1}x + \alpha_2 sh\sqrt{a_1}x + \alpha_3 \cos\sqrt{a_1}x + \alpha_4 \sin\sqrt{a_1}x + f_{2,0}^*(x) \quad (42)$$

حيث: $f_{2,0}^*(x)$ حل خاص له الشكل:

$$\begin{aligned} f_{2,0}^*(x) &= \frac{-3r^2 a_1^3 W_0^3}{32} \left\{ \frac{x}{4a_1^{3/2}} (r_3 ch\sqrt{a_1}x + r_7 \cos\sqrt{a_1}x + r_1 sh\sqrt{a_1}x - r_5 \sin\sqrt{a_1}x) \right. \\ &+ \frac{1}{80a_1^2} (r_2 ch3\sqrt{a_1}x + r_6 \cos3\sqrt{a_1}x + r_4 sh3\sqrt{a_1}x + r_8 \sin3\sqrt{a_1}x) \\ &+ \frac{1}{p^4 - a_1^2} (s_1 \cos px + s_3 \sin px) + \frac{1}{p_1^4 - a_1^2} (s_2 \cos p_1x + s_4 \sin p_1x) \\ &\left. + \frac{1}{q^4 - a_1^2} (s_5 \cos qx + s_7 \sin qx) + \frac{1}{q_1^4 - a_1^2} (s_6 \cos q_1x + s_8 \sin q_1x) \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

هنا:

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2a_1} \left[a_1 f_{2,0}^*(0) + f_{2,0}^{*''}(0) \right], \quad \alpha_3 = \frac{1}{2a_1} \left[a_1 f_{2,0}^*(0) + f_{2,0}^{*''}(0) \right] - f_{2,0}^*(0)$$

$$\alpha_2 = \frac{-1}{sh\sqrt{a_1}} \left[\alpha_4 \sin \sqrt{a_1} - \alpha_1 ch\sqrt{a_1} + \alpha_3 \cos \sqrt{a_1} - \frac{f_{2,0}^{*''}(1)}{a_1} \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{-1}{\cos \sqrt{a_1} - cth\sqrt{a_1} \sin \sqrt{a_1}} \left\{ \alpha_1 sh\sqrt{a_1} + \alpha_3 \sin \sqrt{a_1} + \frac{f_{2,0}^{*(3)}(1)}{a_1} + \right. \\ \left. + cth\sqrt{a_1} \left(\alpha_3 \cos \sqrt{a_1} - \alpha_1 ch\sqrt{a_1} - \frac{f_{2,0}^{*''}(1)}{a_1} \right) \right\}$$

نحصل بطريقة مشابهة من أجل التابع $g_{2,0}(x)$ آخذين بعين الاعتبار (41) على:

$$g_{2,0}(x) = \alpha_5 ch\sqrt{3a_1}x + \alpha_6 sh\sqrt{3a_1}x + \alpha_7 \cos \sqrt{3a_1}x + \alpha_8 \sin \sqrt{3a_1}x + g_{2,0}^*(x) \quad (44)$$

حيث: $g_{2,0}^*(x)$ حل خاص له الشكل:

$$g_{2,0}^*(x) = \frac{-r^2 a_1^3 W_0^3}{32} \left\{ \frac{1}{8a_1^2} \left[\frac{1}{9} (r_2 ch 3\sqrt{a_1}x + r_6 \cos 3\sqrt{a_1}x + r_4 sh 3\sqrt{a_1}x + r_8 \sin 3\sqrt{a_1}x) \right. \right. \\ \left. \left. - (r_1 ch \sqrt{a_1}x + r_5 \cos \sqrt{a_1}x + r_3 sh \sqrt{a_1}x + r_7 \sin \sqrt{a_1}x) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{p^4 - 9a_1^2} (s_1 \cos px + s_3 \sin px) + \frac{1}{p_1^4 - 9a_1^2} (s_2 \cos p_1x + s_4 \sin p_1x) \right. \\ \left. + \frac{1}{q^4 - 9a_1^2} (s_5 \cos qx + s_7 \sin qx) + \frac{1}{q_1^4 - 9a_1^2} (s_6 \cos q_1x + s_8 \sin q_1x) \right\} \quad (45)$$

هنا:

$$\alpha_5 = \frac{-1}{6a_1} \left[3a_1 g_{2,0}^*(0) + g_{2,0}^{*''}(0) \right], \quad \alpha_7 = \frac{1}{6a_1} \left[3a_1 g_{2,0}^*(0) + g_{2,0}^{*''}(0) \right] - g_{2,0}^*(0)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{sh\sqrt{3a_1}} \left[\alpha_8 \sin \sqrt{3a_1} + \alpha_7 \cos \sqrt{3a_1} - \alpha_5 ch\sqrt{3a_1} - \frac{g_{2,0}^{*''}(1)}{3a_1} \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\cos \sqrt{3a_1} - cth\sqrt{3a_1} \sin \sqrt{3a_1}} \left\{ \alpha_5 sh\sqrt{3a_1} + \alpha_7 \sin \sqrt{3a_1} + \frac{g_{2,0}^{*(3)}(1)}{(3a_1)^{3/2}} + \right. \\ \left. + cth\sqrt{3a_1} \left(\alpha_7 \cos \sqrt{3a_1} - \alpha_5 ch\sqrt{3a_1} - \frac{g_{2,0}^{*''}(1)}{3a_1} \right) \right\}$$

بناءً على ما سبق فإن حل المسألة (15)، (39) سيأخذ الصيغة (38). حيث التوابع $f_{2,0}(x)$ و $g_{2,0}(x)$

محددة بالعلاقات (42) و (43) على الترتيب.

وهكذا فإن مجموع العبارات التحليلية التي حصلنا عليها للتتابع $W_{m,n}(x,t)$ تعين تابع التقوس للقضيب المدروس.

$$W(x,t) = W_{0,0}(x,t) + \tau W_{0,1}(x,t) + \lambda W_{1,0}(x,t) + \lambda^2 W_{2,0}(x,t)$$

حيث: $0 < \lambda < 1$ و $0 \leq \tau < 1$.

النتائج والمناقشة:

- تم بالاعتماد على معادلات الحركة لقضيب عند الثني، حيث مادة مرنة لاخطية، حل مسائل الاهتزازات العرضانية مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي
- تم بناء الحل بالاعتماد على طريقة البارامترات الصغيرة. حيث قاد مجرى المسألة إلى حل المعادلات التفاضلية الناتجة، بحيث تم البحث عن تلك الحلول على شكل سلسلة توافقية.
- وتم الحصول من أجل بعض التقريبات الأولى من السلسلة على مجموعة مترابطة من المعادلات التفاضلية، كتبت حلولها في عبارات تحليلية لها صيغ موحدة. وهذا يعتبر مهماً جداً عند وضع برنامج على الحاسوب وإجراء الحسابات العددية.

الاستنتاجات والتوصيات:

إن وضع برنامج على الحاسوب وإجراء الحساب العددي وتحليل المعطيات يسمح ببناء المنحنيات المطالية - الترددية وتبيان دور وتأثير لاخطية الوسط والعامل البيولوجي على انتشار الأمواج في الأوساط المدروسة.

المراجع:

1. Cnetc I. V., Barafrod G. O., Sawlgazes U. J. Deformed and collapse biologic callous tissue. Peka: Zenatne 1980, 320p.
2. Brankov G. Biomechanics principles , Mer, Moscow, 1981, 254p
3. Biomechanics principles and applications. Edited by Donald R. Peterson, Joseph D. Bronzino , 2008 by Taylor and Francis Group, LLC, London
4. Nikitine L. V. An elastic biological body model, IZV .AH CCCP, MTT- 1971. N°3 P, 145-15
5. Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanic in solid media. Moscow. Since, 1977. 382P.
6. Akuhundov M. B., Rabotnov Yu. N., Suvorova Yu. V. A deformable body model with reaction and application in dynamic problems of biological mechanic, IZV .AH CCCP, MTT- 1985. N°6 P, 96-100
7. Hasan Khalifeh,. One-dimensional wave propagation in viscoelastic media with reaction. CCCP, Baku 1993. 164 P
8. Propagation of longitudinal waves in biological media. . Hasan khalifeh. Journal of Tishreen university, to appear.
9. Specification of longitudinal nonlinear vibration Of viscoelastic affective bar. . Hasan khalifeh. Journal of Tishreen university, to appear

10. Golikov C. H., Linear and nonlinear problems solution of viscoelastic theory. Moscow. Since, 2009. 21 P
11. Archinov G. A. longitudinal nonlinear waves in viscoelastic bars, tabulars and cylindrical incrustation . Since, KUBGAU, N81 , 2012. 15 P
12. Suvorova Yu. V. "Nonlinear effects in hereditary deformed media". Mechanic polymers - 1977. N°6 P, 976-980.
13. Cross vibration for elastic bar loading on its free end vessel of liquid . B.A. Trotsenko. U.B. Trotsenko . Institute mathematics NAN . Ykrania . Keff .2010, Tom 13, N° 3, p 51-67.
14. The accurate solution for differential equation for free cross vibration for line with changing section. Kruotie U. C. Construction mechanic. 2011, N°5,p 47 – 53.
15. G.A.Koloweski., A.P. Chokanova Modern Problems in Mathematics "Nonlinear Small Amplitude Waves in Elastic Media" P, 19-32 , MIAN, Moscow 2007.
16. Vibration systems of elastic and viscoelastic Elements with reaction. Mamemov C. A. CCCP, Baku 1989. 133 P
17. Functions theory method for complex variables. Lavrintel M. V., Chbat V. V. Moscow. Since, 1973. 736 P