مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

تقريب النقط الثابتة للتطبيقات شبه المقلصة بوساطة قانون تدريجي جديد

الدكتور عدنان متيلج*

(تاريخ الإيداع 12 / 11 / 2013. قُبِل للنشر في 26 / 3 /2014)

□ ملخّص □

في هذا البحث نقترح صيغة تدريجية جديدة لإيجاد النقط الثابتة لصنف محدد من التطبيقات شبه المقلصة معرفة على مجموعة جزئية محدبة، مغلقة من فضاء Banach، ونبرهن أن تقاربهايكافئ تقارب كل منالصيغ Mann ((5) ,Noor, Ishikaw,) نحو نقطة ثابتة للمؤثر شبه المقلص (contractive–Like operator) .

نبرهن أيضاً أن تقارب الصيغة الجديدةأسرع من تقاربNoor(،Ishikawa، Mann)،ولكن تقارب(5) أسرع من تقارب الصيغة الجديدةلهذا النوع من المؤثرات .

الكلمات المفتاحية : المؤثرات شبه المقلصة ، النقط الثابتة ،القوانين التدريجية .

* أستاذ مساعد– كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية–قسم العلوم الأساسية –جامعة تشرين –اللاذقية –سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

Approximation of fixed points of quasi-contractive operators by newiterationmethod .

Dr. Adnan Mtelej*

(Received 12 / 11 / 2013. Accepted 26 / 3 /2014)

□ ABSTRACT □

In this paper, we suggest anew iterative method for finding fixed points of a certain class ofquasi-contractive operators defined in a closed, convexsubset of a Banach space.

Weprove that the convergence of this new iteration is equivalent to the convergence of (Mann,Ishikawa, Noor, (5)) iteration when we use the mapping(contractive-Like operator).

Also We prove that the new iteration, is faster than the(Noor , Ishikawa ,Mann) iteration method but the process (5) is faster than the new process for this class of operators .

Key words: Contractive-Like operators, fixed points, Iteration process.

***Associate professor, Basic Science Department, Faculty of Mechanical and Electrical engineering, Tishreen University , Lattakia ,Syria**

مقدمة :

ليكن X فضاء Banach و $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة و مغلقة في X وليكن التطبيق $T : K \to K$ نسمي $F_T = \{\ p \in K\ :\ Tp = p\ \}$ مجموعة النقط الثابتة لـ T.

حتى عام 2000 كانت تكراريات Ishikawa, Mann, Picard من أهم الصيغ التدريجية المستخدمة في عمليات التقريب المرتبطة بمسائل النقط الثابتة المولدة بمؤثرات لها صفات تقليص محددة والتي تعرف قوانينها التدريجية كما نعلم بالصيغ الآتية :

تكرارية بيكارد تعرف بـ :

$$\begin{aligned} & x_o \in K \\ & x_{n+1} = Tx_n \qquad , n \in N \end{aligned} \qquad (1)$$

وتكرارية Mann تعرف بـ :

$$\begin{aligned} & x_o \in K \\ & x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \qquad , \quad n \in N \end{aligned} \qquad (2)$$

وتكرارية Ishikawa تعرف بـ :

$$\begin{aligned} & x_o \in K \\ & x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ & y_n \quad = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \qquad , \quad n \in N \end{aligned} \qquad (3)$$

طبقت القوانين السابقة بنجاح في الفضاءات المنظمة، وفضاءات هيلبرت، بهدف حل المعادلات غير الخطية وطيف واسع من المسائل التطبيقية،كما استمر البحث عن صيغ أكثر شمولية، في هذا المجال فتحققت نتائج جيدة لدى العديد من الباحثين تحسنت من خلالها الصيغ السابقة ، وجرى تعميم لبعض المؤثرات المستخدمة أيضاً .

ففي عام 2000 يعرّف M.A.Noor [1] القانون التدريجي :

$$\begin{aligned} & x_o \in K \\ & x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ & y_n \quad = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n \\ & z_n \quad = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \qquad , \quad n \in N \end{aligned} \qquad (4)$$

علماً أن $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$.

بعد ذلك تتالت التكراريات الجديدة أمثال تكرارية Agarwal [2] ، وتكرارية SP [3] ،تكرارية [4] CR.

حديثاً يعرف M.R . Yadav وآخرون في [5] القانون التدريجي الآتي :

$$\begin{aligned} & x_o \in K \\ & x_{n+1} = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n Tz_n \\ & y_n \quad = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \\ & z_n \quad = (1-\gamma_n)y_n + \gamma_n Ty_n \qquad , \quad n \in N \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$ مع $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$

في هذا البحث سنقترح قانوناً تدريجياً جديداً على النحو:

بفرض $K \neq \phi$ مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة في فضاء باناخ X وليكن المؤثر $T : K \to K$

نعرف التكرارية $\{x_n\}$ بـ :

$$
\begin{aligned}
x_o &\in K \\
x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T z_n \\
y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \\
z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T y_n \quad , \quad n \in N
\end{aligned}
\tag{6}
$$

حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$.

وسندرس تقارب هذا القانون نحو نقطة ثابتة لبعض المؤثرات الهامة، ونبرهن أنه يكافئ كل من القوانين (2),(3),(4),(5)عند استخدامنوع معين من المؤثرات شبه المقلصة، وضمن شروط محددة.

كما نقارن بين سرعة تقاربه وسرعة تقارب تكرارية Noor وتكرارية Yadavعند تطبيق المؤثر (7) .

في عام 1920أثبتBanachالنظرية الآتية:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً تاماً والتطبيق $T:(X,d)\to(X,d)$ حيث T مقلص تام أي إن:

$$\|Tx - Ty\| \le k\|x-y\| \quad , \ 0<k<1$$

عندئذٍ للمعادلة $x = Tx$ حل وحيد يمثل نهاية للمتتالية $x_{n+1} = Tx_n$

تسمى هذه النظرية بـ(مبدا التطبيق المقلص) لـ Banach أما $\{x_n\}$ فتسمى تكرارية Picard.

تجدر الملاحظة إلى أن نظرية Banach تبقى صحيحة عندما $T:U\to U$ حيث $U\neq\phi$ مغلقة ، محدبة من X . أما الحالة التي يكون فيها $T:U\to X$ فإن الأمر يتطلب تعريف تطبيقات إضافية جديدة $P_u : X \to U$ ، وعندئذٍ تأخذ تكرارية Picard الشكل الآتي $x_{n+1} = P_u T x_n$ حيث إن :

$$\underbrace{U \xrightarrow{T} X \xrightarrow{P_u} U}_{P_u T}$$

نجح Zamfirescu عام 1972 بتعميم نظرية النقطة الثابتة لـ باناخ من خلال دمج نتائج سابقة، وبشكل مبدع ضمن نظرية عرفت باسمه وصاغها على النحو :

نظرية(1)انظر[6]: بفرض (X,d) فضاءً مترياً تاماً وليكن $T:X\to X$ تطبيقاً توجد لأجله الأعداد a , b , c حيث : $0\le a<1$, $0\le b, c<\frac{1}{2}$ وانه مهما يكن $x,y\in X$ فإن واحد أعلى الأقل من الشروط الآتية محقق :

$$
\begin{aligned}
&z_1 : d(Tx,Ty) \le a\, d(x,y) \\
&z_2 : d(Tx,Ty) \le b\{\, d(x,Tx) + d(y,Ty) \,\} \\
&z_3 : d(Tx,Ty) \le c\{\, d(x,Ty) + d(y,Tx) \,\}
\end{aligned}
$$

عندئذٍ T له نقطة ثابتة وحيدة p تكرارية بيكارد تتقارب نحو p من أجل آية نقطة بدء $x_0\in X$.

يسمى المؤثر المحقق لشروط التقليص السابقة بمؤثر Zamfirescu ويصنف ضمن المؤثرات الضعيفة التقليص أو شبيهة المقلصة، كما يعد من أشهر المؤثرات استخداماً في تكراريات النقط الثابتة، ويرمز له اختصاراً بـ Z.

علماً أن المؤثر المحقق للشرط z_1 يدعى مؤثر بيكارد ،والمؤثر المحقق للشرط z_2 يدعى مؤثرKannan، بينما المؤثر المحقق للشرط z_3 يدعى مؤثر Chatterjea .

في [7] يمدد Berinde مؤثر Zamfirescu إلىفضاءاتBanach، ويبرهن أن الشروط السابقة z_1 , z_2 , z_3 تقود إلى ما يأتي:

عند استخدام z_2 ينتج لدينا $\|Tx-Ty\| \le \delta\|x-y\| + 2\delta\|x-Tx\|$

وعند استخدام z_3 ينتج لدينا $\|Tx-Ty\| \le \delta\|x-y\| + 2\delta\|x-Ty\|$

وذلكمن أجل كل زوج $x, y \in X$ ،علماً أن : $\delta \in [0,1)$, $\delta = \max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$

وفي [8] ImoruandOlatinwo يعرفان مؤثراً أكثر شمولية من مؤثر Zamfirescu ، وذلك على النحو :

بفرض X فضاء منظَم نقول عن $T: X \to X$ أنه مؤثر شبه مقلص (contractive –Like operator)

إذا وجد العدد $\delta \in [0,1)$ والتابع المتزايد $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ بحيث $\varphi(0)=0$ ، وأنه من أجل كل زوج $x, y \in X$ تتحقق المتراجحة:

$$\|Tx-Ty\| \le \delta\|x-y\| + \varphi\|x-Tx\| \qquad (7)$$

وفي[5] Yadav. M.R وآخرونيعرفون مقلصاً معمما جديداًكما يلي :

لتكن $K \ne \phi$ مجموعة جزئية مغلقة ،محدبة من فضاء باناخ X وليكن المؤثر $T: K \to K$ بحيث $k_n \in [0,1)$, $\forall\ x, y \in K$ لدينا :

$$\|Tx-Ty\| \le e^{M\|x-Tx\|}(k_n\|x-y\|) \quad , \quad M \ge 0 \qquad (8)$$

يدعى(M –Contraction)، وأثبتوا أيضاً أن القانون التدريجي (5) يتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة للمؤثر(8) ضمن شروط محددة .

في هذا البحث نبرهن أن القانون التدريجي الجديد(6) يتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة لكل من المؤثرين : (Contractive –Like operator) ، (M –Contraction).

كما أنه يكافئ كل منالقوانين التدريجية لـ(Noor،Ishikawa, Mann) والقانون (5) في حال تم استخدام المؤثر (Contractive –Like operator)، لكنه في تقاربه نحو النقطة الثابتة لهذا المؤثر أسرع من (Noor،Ishikawa , Mann) وأبطأ من القانون (5).

نحتاج في هذا العمل إلى ما يلي:

تعريف (1) [9] : المتتاليتان $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ متكافئتان إذا تحقق الشرط $n \to \infty$: $d(x_n, y_n) \to 0$

تعريف(2)[10]: لتكن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين نحو a و b على الترتيب ولنفرض أنه يوجد $l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|}$ إذا كان $l = 0$ عندئذٍ نقول أن تقارب $\{a_n\}$ نحو a أسرع من تقارب $\{b_n\}$ نحو b

تعريف(3)[10]: بفرض $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ قانونين تدريجيين متقاربين نحو نقطة ثابتة مشتركة p في فضاء منظم X وبأخطاء مقدرة بـ :

$$|u_n - p| \le a_n \quad , \quad n = 0,1,2,.,.,$$

$$|v_n - p| \le b_n \quad , \quad n = 0,1,2,.,.,$$

حيث $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتان من الأعداد الموجبة والمتقاربة نحو الصفر .

إذا كان تقارب $\{a_n\}$ أسرع من تقارب $\{b_n\}$ عندئذٍ تقارب $\{u_n\}$ نحو p أسرع من تقارب $\{v_n\}$ نحو p .

قضية[11](1): لتكن $\{\rho_n\}$ متتالية من الأعداد الموجبة والمحققة للمتراجحة الآتية :

$$\rho_{n+1} \le (1-\lambda_n)\rho_n \quad , \quad n \ge 0$$

حيث: $\lambda_n \in [0,1)$ و $\sum_n \lambda_n = \infty$ عندئذٍ: $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$

قضية$(2)[12]$: لتكن $\{\rho_n\}$ متتالية من الأعداد الموجبة والمحققةللمتراجحةالآتية :

$$\rho_{n+1} \le (1-t_n)\rho_n + \sigma_n$$

حيث : $t_n \in [0,1)$ و $\sum_n t_n = \infty$ و $\sigma_n = 0(t_n)$

عندئذ: $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$

أهمية البحث وأهدافه :

يهدف البحث للعمل على تحسين الصيغ التدريجية المستخدمة في تقريب مسائل النقط الثابتة .

وتنبع أهميته من التعرف إلى قانون تدريجي جديد يتقارب نحو نقطة ثابتة لمؤثرات مشهورة معرفة في فضاءات Banach. ومن ميزاته أنه يكافئ كل من التكراريات (Noor , Ishikaw , Mann) والتكرارية(5) في حال استخدمت أنواع محددة من هذه المؤثرات، إنما يتقارب بسرعة أفضل من التكراريات :

(Noor , Ishikaw , Mann).

طرائق البحث ومواده :

تم الاعتماد على تعاريف ونتائج سابقةمرتبطة بنظريات النقطة الثابتة ،ثم استخدمت الطرق التحليلية والإستنتاجية لإثبات النتائج التي توصلنا إليها .

النتائج والمناقشة :

نظرية (2) : بفرض X فضاء Banachو $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من Xولنفرض $T : K \to K$مؤثراً يحقق الشرط (7)حيث $F_T \neq \phi$ ، ولتكن $\{x_n\}$تكرارية معرفة بالقانون (6)حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$متتاليات عددية في $[0,1)$مع $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$متقاربة بقوة نحو نقطة ثابتة ووحيدة للمؤثر T.

البرهان :بفرض $p \in F_T$ عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)\| y_n - p \| + \alpha_n \| Tz_n - p \| \le (1-\alpha_n)\| y_n - p \| + \alpha_n \delta \| z_n - p \| \tag{9}$$

نحسب كل من $\| y_n - p \|$ و $\| z_n - p \|$ فنجد:

$$\|y_n - p\| \le (1-\beta_n)\| x_n - p \| + \beta_n \| Tx_n - p \| \le (1-\beta_n(1-\delta))\| x_n - p \| \tag{10}$$

أيضاً :

$$\|z_n - p\| \le (1-\gamma_n)\| x_n - p\| + \gamma_n \| Ty_n - p\| \le (1-\gamma_n)\| x_n - p\| + \gamma_n\delta \| y_n - p\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n)\| x_n - p\| + \gamma_n\delta(1-\beta_n(1-\delta))\| x_n - p\| \le \quad (11)$$
$$\le (1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))\| x_n - p\|$$

نعوض (10)،(11) في (9)فنجد :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p\| +$$
$$+ \alpha_n\delta[(1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))\| x_n - p\| \le (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\delta\|x_n - p\| =$$
$$= (1-\alpha_n(1-\delta))\| x_n - p\| \quad (12)$$

لكن $0 \le \delta < 1$, $\alpha_n \in [0,1)$, $\sum_n \alpha_n = \infty$

إذا وضعنا $\rho_n = \|x_n - p\|$, $\lambda_n = \alpha_n(1-\delta)$ عندئذٍ وبالاعتماد على القضية (1)ينتج :

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$$

هذه النقطة وحيدة لأنه إذا فرضنا وجود نقطتين ثابتتين $p_1, p_2 \in F_T$ حيث $p_1 \ne p_2$ عندئذٍ سيكون :

$$\|p_1 - p_2\| = \|Tp_1 - Tp_2\| \le \delta\|p_1 - p_2\| + \varphi\|p_1 - Tp_1\| = \delta\|p_1 - p_2\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|p_1 - p_2\|(1-\delta) \le 0 \Rightarrow \|p_1 - p_2\| = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$$

وهذا يتناقض مع الفرض ومنه p النقطة الثابتة الوحيدة لـ T .

نظرية (3) : بفرض X فضاء Banach و $K \ne \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من X ولنفرض $T: K \to K$ مؤثراً يحقق الشرط (8)حيث $F_T \ne \phi$ ولتكن $\{x_n\}$ تكرارية معرفة بالقانون (6)حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في [0,1) مع $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو نقطة ثابتة ووحيدة للمؤثر T .

البرهان : بفرض $p \in F_T$ و $M \ge 0$ عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)\| y_n - p\| + \alpha_n \| Tz_n - p\| \le (1-\alpha_n)\| y_n - p\| +$$
$$+ \alpha_n e^{M\|P-TP\|}(k_n\| z_n - p\|) \le 1-\alpha_n)\| y_n - p\| + \alpha_n k_n \| z_n - p\| \quad (13)$$

لكن :

$$\|y_n - p\| \le (1-\beta_n)\| x_n - p\| + \beta_n\|T x_n - p\| \le (1-\beta_n(1-k_n))\|x_n - p\| \quad (14)$$

أيضاً :

$$\|z_n - p\| \le (1-\gamma_n)\| x_n - p\| + \gamma_n k_n\| y_n - p\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n)\| x_n - p\| + \gamma_n k_n((1-\beta_n(1-k_n))\|x_n - p\| = \quad (15)$$
$$= (1-\gamma_n(1-k_n(1-\beta_n(1-k_n))))\|x_n - p\|$$

نعوض (15),(14) في (13) فنجد :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-k_n))\|x_n - p\| +$$
$$+ \alpha_n k_n(1-\gamma_n(1-k_n(1-\beta_n(1-k_n))))\|x_n - p\| \le$$
$$\le (1-\alpha_n + \alpha_n k_n)\|x_n - p\| = (1-\alpha_n(1-k_n))\|x_n - p\| \le \quad (16)$$

لكن لدينا : $k_n \in [0,1)$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$ و $\alpha_n \in [0,1)$ وبالتالي :

إذا وضعنا $\rho_n = \|x_n - p\|$, $\lambda_n = \alpha_n(1-k_n)$ عندئذٍ وبالاعتماد على القضية (1) ينتج :

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$$

أي أن $\{x_n\}$ تتقارب بقوة إلى p .

النقطة p وحيدة لأنه إذا فرضنا وجود نقطتين ثابتتين $p_1, p_2 \in F_T$ حيث $p_1 \neq p_2$ عندئذٍ سيكون

$$\|p_1 - p_2\| = \|Tp_1 - Tp_2\| \le e^{M\|p_1 - Tp_1\|}(k_n\|p_1 - p_2\|) = k_n\|p_1 - p_2\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|p_1 - p_2\|(1-k_n) \le 0 \Rightarrow \|p_1 - p_2\| = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$$

وهذا يتناقض مع الفرض .

نظرية (4) : بفرض X فضاء Banach و $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محددة ، مغلقة من X ولنفرض $T: K \to K$ مؤثراً يحقق الشرط (7) حيث $F_T \neq \phi$ ولتكن $\{x_n\}$ تكرارية Noor حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ مع $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو نقطة ثابتة ووحيدة للمؤثر T .

البرهان : بفرض $p \in F_T$ عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\| Ty_n - p \| \le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\delta\| y_n - p \| \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\delta\left[(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - p\|\right] \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\delta\left[(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta\|z_n - p\|\right] \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\delta\left[(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta\{(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n - p\|\}\right] \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\| x_n - p \| + \alpha_n\delta\| x_n - p \| = (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n - p\|$$

حيث $0 \le \delta < 1$, $\alpha_n \in [0,1)$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$

ينتج استناداً للقضية (1) أن : $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$

أي أن $\{x_n\}$ تتقارب بقوة الى p .

نظرية(5): بفرض X فضاء Banach و $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محددة ، مغلقة من X وليكن $T: K \to K$ مؤثراً يحقق الشرط (7) حيث $F_T \neq \phi$ وان $\{x_n\}$ تكرارية معرفة بالقانون (5) و $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ بحيث : $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\sum_n \alpha_n = \infty$

عندئذٍ $\{x_n\}$ متقاربة بقوةنحو نقطة ثابتة للمؤثر T .

البرهان : بفرض $p \in F_T$ عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n)\| z_n - p \| + \alpha_n\| Tz_n - p \| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|z_n - p \| \qquad (17)$$

لكن :

$$\|z_n - p \| \le (1-\gamma_n)\| y_n - p \| + \gamma_n\|T\ y_n - p \| \le (1-\gamma_n(1-\delta))\|y_n - p \|$$
$$\le (1-\gamma_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p \| \qquad (18)$$

من(17),(18)نجد :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\gamma_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p \| \le \qquad (18,a)$$
$$\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n - p \|$$

حيث $0 \le \delta < 1$, $\alpha_n \in [0,1)$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$

ينتج استناداً للقضية (1)أن : $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$

بعد إثبات أن كلاً من التكراريتين(6) ، (4) تتقاربان نحو نقطة ثابتة للمؤثر (7) نبرهن في النظرية الآتية أن هاتين التكراريتين المولدتين بالمؤثر ذاته متكافئتان .

نظرية(6) : بفرض X فضاء Banachو $K \ne \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من X وليكن التطبيق $T : K \to K$ مؤثر يحقق الشرط (7) حيث $F_T \ne \phi$ وأن $\{u_n\}$ ، $\{x_n\}$ تمثلان التكراريتين (4) و(6)على الترتيب و $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ بحيث $\sum_n \alpha_n = \infty$ وأن $\alpha_n \ge \frac{1}{2}$ عندئذٍ :

$\{u_n\}$, $\{x_n\}$ متكافئتان.

البرهان : من الفرض لدينا :

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T z_n , & u_{n+1} &= (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n \\
y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n , & v_n &= (1-\beta_n)u_n + \beta_n T w_n \\
z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T y_n , & w_n &= (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n
\end{aligned}
$$

لإثبات التكافؤ بين $\{x_n\}$ ، $\{u_n\}$علينا أن نبرهن : $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0$أي للمتتاليتين نهاية واحدة . بمعنى إذا كانت $x_n \to p$ فإن $u_n \to p$ والعكس صحيح .

الحالة الأولى : نفرض أن $x_n \to p$ ونبرهن أن $u_n \to p$

في الواقع لدينا :

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|y_n - u_n\| + \alpha_n\|Tz_n - Tv_n\| \le \\
&\le (1-\alpha_n)\|y_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - v_n\| + \alpha_n\varphi(\|z_n - Tz_n\|) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

عندئذٍ:

$$
\|y_n - u_n\| \le \|y_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| \le \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - u_n\| \qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
\|z_n - v_n\| \le\ & \|z_n - x_n\| + \|x_n - y_n\| + \|y_n - v_n\| \le \\
&\le \gamma_n\|x_n - Ty_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tw_n\| \le \\
&\le \gamma_n\|Ty_n - Tx_n\| + \gamma_n\|Tx_n - x_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \\
&+ (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\delta\|x_n - w_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) \le \\
&\le \gamma_n\delta\|y_n - x_n\| + \gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \\
&+ (1-\beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\delta\|w_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

لكن :

$$
\begin{aligned}
\|w_n - x_n\| &\le \|w_n - z_n\| + \|z_n - x_n\| \le (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \\
&+ \gamma_n\|Tu_n - Ty_n\| + \gamma_n\|x_n - Ty_n\| \le (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\delta\|y_n - u_n\| + \\
&+ \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\|Tx_n - Ty_n\| \le
\end{aligned}
$$

$$\le (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\delta\|y_n - x_n\| + \gamma_n\delta\|u_n - x_n\| + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\| +$$
$$+\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\delta\|y_n - x_n\| + \gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|) +$$
$$\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) \tag{22}$$

نعوض(22)في(21)نجد :

$$\|z_n - v_n\| \le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| +$$
$$+\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|y_n - Ty_n\| + \beta_n\gamma_n\delta(\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\delta\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \tag{23}$$
$$+\gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|)$$

نعوض (20)و(23) في(19)وبعد إجراء الترتيب المناسب نجد :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)\|u_n - x_n\| + \alpha_n\delta[(1-\beta_n(1-\delta(1-\gamma_n(1-\delta))))]\|u_n - x_n\| +$$
$$+\alpha_n\delta[\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \beta_n\gamma_n\delta(\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\ \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n\delta\gamma_n\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|)] +$$
$$+(1-\alpha_n)\beta_n\|x_n - Tx_n\| + \alpha_n\varphi(\|z_n - Tz_n\|)$$

ومن أجل $\alpha_n \ge \frac{1}{2}$ نستنتج أن :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta(1-\gamma_n(1-\delta))))]\|u_n - x_n\| +$$
$$+\alpha_n\delta[\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \beta_n\gamma_n\delta(\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n\delta\gamma_n\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|)] +$$
$$+\alpha_n\beta_n\|x_n - Tx_n\| + \alpha_n\varphi(\|z_n - Tz_n\|)$$

نفرضإن :

$$\varepsilon_n = \delta[\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|y_n - Ty_n\|) +$$
$$+\beta_n\gamma_n\delta(\|x_n - Tx_n\| + +\beta_n^2\delta^2\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) +$$
$$+\beta_n\delta\gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+\beta_n\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|)] + \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \varphi(\|z_n - Tz_n\|)$$

إذا فرضنا أن $\sigma_n = \alpha_n\varepsilon_n$ عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \sigma_n$$

لكن :

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = p - Tp = 0$$

أيضاً :

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - Ty_n\| = \lim_{n\to\infty}\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - T[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]\right] = p - Tp = 0$$

بالمثل: $\lim_{n\to\infty}\|z_n - Tz_n\| = p - Tp = 0$

ومن استمرارية φ نستنتج أن:

$$\varphi(\|x_n - Tx_n\|) \to 0 \;,\; \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \to 0 \;,\varphi(\|z_n - Tz_n\|) \to 0$$

عندئذٍ من: $\sigma_n = \alpha_n \varepsilon_n$ نستنتج إن : $\dfrac{\sigma_n}{\alpha_n} = \varepsilon_n \to 0$ ومنه: $\sigma_n = (0)\alpha_n$

واستناداً للقضية (2)ينتج إن:

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - x_n\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n = p$$

الحالة الثانية: نفرض أن $u_n \to p$ ونبرهن أن $x_n \to p$

في الحقيقة لدينا :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|y_n - u_n\| + \alpha_n\|Tz_n - Tv_n\| \le \\
&\le (1-\alpha_n)\|y_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - v_n\| + \alpha_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \le \\
&\le (1-\alpha_n)\|y_n - v_n\| + (1-\alpha_n)\|v_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - v_n\| + \alpha_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \le \\
&\le (1-\alpha_n)[(1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tw_n\|] + \\
&+ (1-\alpha_n)\beta_n\|u_n - Tw_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - v_n\| + \alpha_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \le \\
&\le (1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + (1-\alpha_n)\beta_n\delta\|x_n - w_n\| + (1-\alpha_n)\beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) + \\
&+ (1-\alpha_n)\beta_n\|u_n - Tw_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - v_n\| + \alpha_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \qquad (24)
\end{aligned}$$

لكن :

$$\|w_n - x_n\| \le \|w_n - u_n\| + \|u_n - x_n\| \le \gamma_n\|u_n - Tu_n\| + \|u_n - x_n\| \qquad (25)$$

أيضاً:

$$\begin{aligned}
\|u_n - Tw_n\| &\le \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tw_n\| \le \\
&\le \|u_n - Tu_n\| + \delta\|u_n - w_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|) \le \qquad (26) \\
&\le \|u_n - Tu_n\| + \delta\gamma_n\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned}$$

وأيضاً :

$$\begin{aligned}
\|z_n - v_n\| &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Ty_n - (1-\gamma_n+\gamma_n)v_n\| \le \\
&\le (1-\gamma_n)\|v_n - x_n\| + \gamma_n\|Ty_n - v_n\| \le \\
&\le (1-\gamma_n)\|v_n - u_n\| + (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\|Ty_n - Tv_n\| + \gamma_n\|Tv_n - v_n\| \le \\
&\le (1-\gamma_n)\beta_n\|u_n - Tw_n\| + (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\delta\|y_n - v_n\| + \\
&+ \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \gamma_n\|v_n - Tv_n\| \qquad (27)
\end{aligned}$$

كما إن :

$$\|y_n - v_n\| \le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tw_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\delta\|w_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\delta\|w_n - u_n\| + \beta_n\delta\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) \Rightarrow$$
$$\|y_n - v_n\| \le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\delta\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) \le$$
$$\le (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) \qquad (28)$$

نعوض(26),(28)في (27):

$$\|z_n - v_n\| \le (1-\gamma_n)\beta_n[\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\delta\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)] +$$
$$+ (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\delta[(1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|)] + \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \gamma_n\|v_n - Tv_n\| \le$$
$$\Rightarrow \|z_n - v_n\| \le (1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))))\|u_n - x_n\| + \beta_n(1-\gamma_n)(1+\gamma_n\delta)\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \gamma_n\beta_n\delta\|u_n - Tu_n\| + \beta_n(1-\gamma_n)\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|w_n - Tw_n\|) +$$
$$+ \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \gamma_n\|v_n - Tv_n\| \qquad (29)$$

نعوض (25),(26),(29)في (24)ينتج:

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le [(1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta)) + \alpha_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))))]\|u_n - x_n\| +$$
$$+ \beta_n(1-\alpha_n)\varphi(\|w_n - Tw_n\|) + \beta_n(1-\alpha_n)\varphi\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\gamma_n\delta(1-\alpha_n)\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \beta_n(1-\alpha_n)\varphi(\|u_n - Tu_n\| + \alpha_n[\beta_n\delta(1-\gamma_n)(1+\gamma_n\delta)\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \gamma_n^2\beta_n\delta^3\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\delta(1-\gamma_n)\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n\gamma_n\delta^2\varphi(\|w_n - Tw_n\|) +$$
$$+ \gamma_n\delta\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \gamma_n\delta\|v_n - Tv_n\|]$$

ومن أجل $\alpha_n \ge \frac{1}{2}$ نستنتج إن :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \sigma_n \qquad (30)$$

وضعنا هنا $\sigma_n = \alpha_n\varepsilon_n$ حيث إن :

$$\varepsilon_n = \beta_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) + \beta_n\varphi\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \beta_n\varphi(\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\delta(1-\gamma_n)(1+\gamma_n\delta)\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \gamma_n^2\beta_n\delta^3\|u_n - Tu_n\| + \beta_n\delta(1-\gamma_n)\varphi(\|u_n - Tu_n\|) +$$
$$+ \beta_n\gamma_n\delta^2\varphi(\|w_n - Tw_n\|) + \gamma_n\delta\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \gamma_n\delta\|v_n - Tv_n\|$$

لكن : $\lim_{n\to\infty}\|u_n - Tu_n\| = p - Tp = 0$

أيضاً : $\lim_{n\to\infty}\|v_n - Tv_n\| = p - Tp = 0$ ، $\lim_{n\to\infty}\|w_n - Tw_n\| = p - Tp = 0$

وبما أن φتابع مستمر إذاً:

$$\varphi(\|u_n - Tu_n\|) \to 0 \ , \varphi(\|v_n - Tv_n\|) \to 0 \ , \varphi(\|w_n - Tw_n\|) \to 0$$

ومنه: $\sigma_n = 0(\alpha_n)$ عندئذٍ واستناداً للقضية (2) ينتج إن : $\lim_{n\to\infty}\|u_n - x_n\| = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = p$$

نتيجة (1): إذا استبدلنا في النظرية (6) تكرارية Noor بإحدى التكراريتين Ishikaw, Mann فإن التكافؤ بين النموذج الجديد وهاتين التكراريتين يبقى قائماً لأن كل من هاتين التكراريتين تمثل حالة خاصة من تكرارية Noor .

فمثلاً اذا وضعنا $\gamma_n = 0$ في تكرارية Noor نحصل على تكرارية Ishikaw . وإذا وضعنا $\beta_n = \gamma_n = 0$ نحصل على Mann .

نتيجة(2) : إذا استبدلنا في النظرية (6) المؤثر (7) بمؤثر Zamfirescu فإن النظرية تبقى صحيحة، كما تبقى النتيجة (1) صحيحة أيضاً لأن المؤثر (7) أعم من المؤثر Z .

نظرية(7): بفرض X فضاء Banach و $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من X وليكن التطبيق $T: K \to K$ مؤثراً يحقق الشرط (7) حيث $F_T \neq \phi$ ولتكن $\{x_n\}$،$\{u_n\}$ تمثلان التكراريتين (6) و(5) على الترتيب و $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ بحيث $\sum_n \alpha_n = \infty$ و $\alpha_n \geq \frac{1}{2}$ عندئذٍ :

$\{x_n\}$ ، $\{u_n\}$ متكافئتان.

البرهان : من الفرض لدينا :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T z_n \quad , \quad & u_{n+1} &= (1-\alpha_n)w_n + \alpha_n T w_n \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \quad , \quad & v_n &= (1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n \\ z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T y_n \quad , \quad & w_n &= (1-\gamma_n)v_n + \gamma_n T v_n \end{aligned}$$

الحالة الأولى :نفرض أن $\|x_n - p\| \to 0$ ونبرهن أن : $\|u_n - p\| \to 0$

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1-\alpha_n)\|y_n - w_n\| + \alpha_n \|Tz_n - Tw_n\| \leq \\ &\leq (1-\alpha_n)\|y_n - w_n\| + \alpha_n \delta \|z_n - w_n\| + \alpha_n \varphi(\|z_n - Tz_n\|) \qquad (30,a) \end{aligned}$$

لدينا :

$$\|z_n - w_n\| \leq (1-\gamma_n)\|v_n - x_n\| + \gamma_n \delta \|y_n - v_n\| + \gamma_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \qquad (31)$$

أيضاً :

$$\begin{aligned} \|v_n - x_n\| &\leq \|v_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| \leq (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \\ &+ \beta_n \delta \|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n \|x_n - Tx_n\| \leq \qquad (32) \\ &\leq (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n \|x_n - Tx_n\| \end{aligned}$$

كما أن :

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n \delta \|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi \|x_n - Tx_n\| \leq \\ &\leq (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi \|x_n - Tx_n\| \qquad (33) \end{aligned}$$

نعوض (32),(33) في (31) فنجد :

$$\begin{aligned} \|z_n - w_n\| &\leq (1-\gamma_n)[\ (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi \|x_n - Tx_n\| + \beta_n \|x_n - Tx_n\|\ ] + \\ &+ \gamma_n \delta [\ (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|)\ ] + \gamma_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \leq \\ &\leq (1-\gamma_n\|u_n - x_n\| + \gamma_n \delta \|u_n - x_n\| + (1-\gamma_n)\beta_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \\ &+ (1-\gamma_n)\beta_n \|x_n - Tx_n\| + \gamma_n \beta_n \delta \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \leq \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|z_n - w_n\| \le (1-\gamma_n(1-\delta)\|u_n - x_n\| + (1-\gamma_n)\beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) +$$
$$+ (1-\gamma_n)\beta_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|) \qquad (34)$$

أيضاً :

$$\|y_n - w_n\| \le \|y_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| + \|z_n - w_n\| \le$$
$$\le \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\|x_n - Ty_n\| + (1-\gamma_n(1-\delta)\|u_n - x_n\| + (1-\gamma_n)\beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) +$$
$$+ (1-\gamma_n)\beta_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|)$$

$$\Rightarrow \quad \|y_n - w_n\| \le (1-\gamma_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + L_n \qquad (35)$$

حيث إن :

$$L_n = \beta_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) +$$
$$+ \beta_n(1-\gamma_n)\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n(1-\gamma_n)\|x_n - Tx_n\| + \beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|$$

نعوض بـ $(30,a)$:

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)[(1-\gamma_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + L_n] +$$
$$+ \alpha_n\delta[(1-\gamma_n(1-\delta)\|u_n - x_n\| + R_n] + \alpha_n\varphi(\|z_n - Tz_n\|) \qquad (36)$$

حيث إن :

$$R_n = (1-\gamma_n)\beta_n\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + (1-\gamma_n)\beta_n\|x_n - Tx_n\| +$$
$$+ \gamma_n\beta_n\delta\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|)$$

وبالاستفادة من كون $0 < 1-\gamma_n(1-\delta) < 1$ وبعد إصلاح العلاقة (36) نجد :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + (1-\alpha_n)L_n + \alpha_n\delta R_n + \alpha_n\varphi(\|z_n - Tz_n\|)$$

ومن أجل $\alpha_n \ge \frac{1}{2}$ يكون $1-\alpha_n \le \alpha_n$ ومنه :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \alpha_n[L_n + R_n + \varphi(\|z_n - Tz_n\|)]$$

بفرض :

$$\sigma_n = \alpha_n[L_n + R_n + \varphi(\|z_n - Tz_n\|)]$$

عندئذٍ :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \sigma_n \qquad (37)$$

لكن : $\|x_n - Tx_n\| \to 0 \;,\; \|y_n - Ty_n\| \to 0 \;,\; \|z_n - Tz_n\| \to 0$

ومن استمرارية التابع φ نستنتج أن:

$$\varphi(\|x_n - Tx_n\|) \to 0 \;, \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \to 0 \;,\; \varphi(\|z_n - Tz_n\|) \to 0$$

عندئذٍ : $\lim_{n\to\infty}[L_n + R_n + \varphi(\|z_n - Tz_n\|)] = 0$

ومنه : $\sigma_n = 0(\alpha_n)$ وبما أن $0 \le \delta < 1$ و $\alpha_n \in [0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$

وبالتالي (37) تحقق شروط القضية (2).عندئذٍ نستنتج إن : $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0$

أي أن : $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = p$

أي أن تقارب $\{x_n\}$نحو p يؤدي إلى تقارب $\{u_n\}$ نحو p .

الحالة الثانية : : نفرض أن $u_n \to p$ ونبرهن أن $x_n \to p$

في الحقيقة لدينا :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)\|y_n - w_n\| + \alpha_n\|Tz_n - Tw_n\| \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\|y_n - w_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - w_n\| + \alpha_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|) \qquad (38)$$

لكن :

$$\|y_n - w_n\| \le \|y_n - v_n\| + \|v_n - w_n\| \qquad (39)$$

حيثإن :

$$\|w_n - v_n\| \le \gamma_n\|v_n - Tv_n\| \qquad (40)$$

أيضاً :

$$\|y_n - v_n\| \le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tu_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|u_n - x_n\|) =$$
$$= (1-\beta_n(1-)\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|u_n - Tu_n\|) \qquad (41)$$

نعوض (40),(41) في(39)فينتج :

$$\|y_n - w_n\| \le (1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\|v_n - Tv_n\| \qquad (42)$$

أيضاً:

$$\|z_n - w_n\| \le (1-\gamma_n)\|v_n - x_n\| + \gamma_n\|Ty_n - Tv_n\| \le$$
$$\le (1-\gamma_n)[\|v_n - u_n\| + \|u_n - x_n\|] + \gamma_n\delta\|y_n - v_n\| + \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \le$$
$$\le (1-\gamma_n)\beta_n\|u_n - Tu_n\| + (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\delta[(1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| +$$
$$+ \beta_n\varphi(\|u_n - Tu_n\|)] + \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|)$$
$$\Rightarrow \|z_n - w_n\| \le (1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\gamma_n))))\|u_n - x_n\| +$$
$$+ \gamma_n\beta_n\delta\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n(1-\gamma_n)\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|) \qquad (43)$$

نعوض (42),(43) في (38) فينتج :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)[(1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \beta_n\varphi(\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\|v_n - Tv_n\|] +$$
$$+ \alpha_n\delta[(1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\gamma_n))))\|u_n - x_n\| + \gamma_n\beta_n\delta\varphi(\|u_n - Tu_n\|) +$$
$$+ \beta_n(1-\gamma_n)\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\varphi(\|v_n - Tv_n\|)] + \alpha_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|)$$
$$\Rightarrow \|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n + \alpha_n\delta)\|u_n - x_n\| + \beta_n(1-\alpha_n)\varphi(\|u_n - Tu_n\| +$$
$$+ \gamma_n(1-\alpha_n)\|v_n - Tv_n\| + \alpha_n\gamma_n\beta_n\delta^2\varphi(\|u_n - Tu_n\|) +$$
$$+ \alpha_n\beta_n\delta(1-\gamma_n)\|u_n - Tu_n\| + \alpha_n\gamma_n\delta\varphi(\|v_n - Tv_n\|) + \alpha_n\varphi(\|w_n - Tw_n\|)$$

ومن أجل $\alpha_n \ge \dfrac{1}{2}$ نجد أن :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n-x_n\|+\sigma_n \qquad (44)$$

حيثإن:

$$\sigma_n = \alpha_n[\beta_n\varphi(\|u_n-Tu_n\|+\gamma_n\|v_n-Tv_n\|+\gamma_n\beta_n\delta^2\varphi(\|u_n-Tu_n\|)+$$
$$+\beta_n\delta(1-\gamma_n)\|u_n-Tu_n\|+\gamma_n\delta\varphi(\|v_n-Tv_n\|)+\varphi(\|w_n-Tw_n\|)]$$

لكن : $\lim_{n\to\infty}\|u_n-Tu_n\| = p-Tp=0$

$\lim_{n\to\infty}\|v_n-Tv_n\| = p-Tp=0$ ، $\lim_{n\to\infty}\|w_n-Tw_n\| = p-Tp=0$

ومنه: $\sigma_n = 0(\alpha_n)$ أيضاً $0\le\delta<1$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\alpha_n\in[0,1)$

وبالتالي (44) تحقق شروط القضية(2).

إذاً $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$ ومنه : $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}u_n=p$

أي أن تقارب $\{u_n\}$ نحو p يؤدي إلى تقارب $\{x_n\}$ نحو p .

ولاختبار سرعة تقارب النموذج الجديد سنقارنه مع النماذج التكراريةلكل من (Noor , Ishikawa , Mann) وأيضاً مع النموذج (5)مستخدمين المؤثر (7) .

نظرية(8) : بفرض X فضاء Banachو $K\neq\phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من X ولنفرض $T:K\to K$ مؤثراً يحقق الشرط (7) مع $F_T\neq\phi$ ولتكن $\{x_n\}$ التكرارية (6) ، $\{u_n\}$ تكرارية Noorحيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ وأن $\sum_n\alpha_n=\infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ تتقارب بسرعة أكبر من تقارب $\{u_n\}$ نحو النقطة الثابتة P للمؤثر T.

البرهان : بالنسبة لتكرارية Noorواستناداً للنظرية (4) نجد إن :

$$\|u_{n+1}-p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n-p\| \le \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))\|u_0-p\| \qquad (45)$$

وبالعودة إلىللنظرية ( )نجد :

$$\|x_{n+1}-p\| \le (1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-p\|+$$
$$+\alpha_n\delta[(1-\gamma_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))]\|x_n-p\|\le$$
$$\le(1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-p\|+$$
$$+\alpha_n\delta[(1-\gamma_n(1-\delta))]\|x_n-p\|\le$$
$$\le[(1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta))+\alpha_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))]\|x_n-p\|$$

من أجل $\gamma_n\ge\beta_n$ يكون لدينا :

$$\|x_{n+1}-p\|\le[(1-\alpha_n)(1-\beta_n(1-\delta))+\alpha_n\delta(1-\beta_n(1-\delta))]\|x_n-p\|$$
$$\le(1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-p\|\le$$
$$\le\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))\|x_0-p\| \qquad (46)$$

بالمثل من أجل $\gamma_n\le\beta_n$ يكون لدينا :

$$\|x_{n+1}-p\| \le [(1-\alpha_n)(1-\gamma_n(1-\delta))+\alpha_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))]\|x_n-p\|$$
$$\le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n-p\| \le$$
$$\le \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\gamma_k(1-\delta))\|x_0-p\| \quad (47)$$

للمقارنة بين $\{u_n\}$ و $\{x_n\}$ نقارن بين المتتاليتين العدديتين :

$$a_n=\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta)) \quad و \quad b_n=\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))$$

من الواضح أن $a_n \ge 0$: , $b_n \ge 0$ وأيضاً :

$$\frac{b_n}{a_n}=\prod_{k=0}^{n}\frac{(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))}{(1-\alpha_k(1-\delta))}=\prod_{k=0}^{n}(1-\beta_k(1-\delta))$$

لكن : $(1-\beta_k(1-\delta)) \ge 0$ وأن $\max\{(1-\beta_k(1-\delta))\}<1$ ومنه :

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ واستناداً للتعريف (2)ينتج أن التكرارية $\{x_n\}$ أسرع من التكرارية $\{u_n\}$

ملاحظة(1) : لاتتغير النتيجة إذا قارنا (45) مع (47) .

نتيجة (3) : النموذج التكراري (6)وضمن شروط النظرية (8) أسرع من نموذجي Mann, Ishikawa ذلك أن هاتين التكراريتين حالة خاصة من تكرارية Noor.

نظرية (9) :: بفرض X فضاء Banach و $K \neq \phi$ مجموعة جزئية ، محدبة ، مغلقة من X ولنفرض $T:K\to K$ مؤثر يحقق الشرط (7) مع $F_T \neq \phi$ ولتكن $\{x_n\}$ التكرارية (6) ، $\{u_n\}$ التكرارية (5)حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1)$ وأن $\sum_n \alpha_n=\infty$ عندئذٍ $\{u_n\}$ تتقارب بسرعة أكبر من تقارب $\{x_n\}$ نحو النقطة الثابتة P للمؤثر T.

البرهان : استناداً للنظرية (4) نجد إن :

البرهان :بفرض $\{u_n\}$ تمثل التكرارية (5) عندئذٍ من (18,a) نجد :

$$\|u_{n+1}-p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\gamma_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-p\| \le$$
$$\le \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))(1-\gamma_k(1-\delta))\|x_0-p\|$$

ومن (46) نجد : $\|x_{n+1}-p\| \le \prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))\|x_0-p\|$

$$b_n=\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))$$

$$a_n=\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))(1-\gamma_k(1-\delta))$$

للمقارنة بين $\{u_n\}$ و $\{x_n\}$ نقارن بين المتتاليتين العدديتين : $\{a_n\}\{b_n\}$

من الواضح أن $a_n \ge 0$: , $b_n \ge 0$ وأيضاً :

$$\frac{a_n}{b_n}=\prod_{k=0}^{n}\frac{(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))(1-\gamma_k(1-\delta))}{(1-\alpha_k(1-\delta))(1-\beta_k(1-\delta))}=\prod_{k=0}^{n}(1-\gamma_k(1-\delta))$$

لكن : $(1-\gamma_k(1-\delta))\geq 0$ وأن $\max\{(1-\gamma_k(1-\delta))\}<1$ ومنه :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ واستناداً للتعريف (2) ينتج أن التكرارية $\{u_n\}$ أسرع من التكرارية $\{x_n\}$

الاستنتاجات والتوصيات :

قادت نتائج البحث إلى مايلي:

1 –تعريف قانون تدريجي جديد يمكن استخدامه في حساب النقط الثابتة للمؤثرات :

(M–Contraction،, Zamfirescu , Contractive–Like operators) في فضاءاتباناخ

2– إثبات أن هذا القانون يكافئ القوانين التدريجية لكل من(Noor ,Ishikawa , Mann) والقانون (5)

عند تطبيق أحد المؤثرين(Zafirescu, Contractive–Like operator) .

3– في حال تم تطبيق أحد المؤثرين , Zamfirescu(Contractive –Like operator) فإن القانون التدريجي الجديد يتقارب بسرعة أكبر من تقارب التكراريات (Noor, Ishikawa ,Mann)لكنه أبطأ من القانون (5).

يوصى بدراسة إمكانية التكافؤ مع تكراريات جديدة باستخدام المؤثرين السابقين أو مؤثرات أخرى إضافة لمقارنة سرعة تقاربه مع سرعة تقارب هذه التكراريات.

المراجع:

1- Noor.M.A,*New approximation schemes for general variationalinequalities*, Journal of mathematical analysis and applications,vol.251,no.1,pp.217-229(2000).

2-Agarwal.R.P,Regan .D.O, and Sahu.D.R,*Iterative construction of fixed points ofnearly asymptotically non expansive mappings*,Journal of non linear and convex analysis ,Vol.8,No.1, 2007,pp.61-79.

3-Pheungrattana.W and Suantai.S,*On the rate of convergence of Mann, Ishikawa,Noor and SP Iterations for continuous on an arbitrary interval, Journal of computational and applied mathematics*,Vol.235,No.9 ,2011

4-Chugh.R,Vivek.K,Sanjay.K, *Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banachspaces,American journal of computational mathematic*s,2012, 2,345-357.

5- Yadav .M.R , …..,*Three step iteration scheme for M-Contractive condition in Banach space*, International pur and applied mathematics,Vol .85,No.1,2013,23-31.

6- Zamfirescu.T,*Fixed point theorems in metric spaces* , Vol .23 ,No.1 , pp . 292-298 , (1972) .

7-Berinde.V,*On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive operators*, Acta. Math.Univ.Comen.73,119-126(2004)

8-Imoru.C.O,Olatinwo.M.O,*On the stability of Picard and Mann iterationprocesses*,Carpath.J.Math.19,155-160 (2003).

9-Cardinali.T,Rubbioni.p,*Ageneralization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces,Fixed point theory*,11 (2010),no.1,3-10

10-Olaleru.J.O,Akewe .H, *On multistep iterative scheme for approximating,the common fixed points of generalized contractive-Like operators* ,International Journal of mathematics and mathematical science, Vol.2010,(2010),Article ID 530964,11Pages.

11-Olalerru.J.O and Akewe.H,*On multistep iterative scheme for approximating thecommon fixed points of generalized contractive-Like operators* ,International Journal of mathematics and mathematical science,Vol (2010),(2010,Article ID 530964, 11 Pages .

12-Weng.X ,Fixed point for local strictly pseudo contractive mapping, Proc,Amer, Math ,Soc.113(1991),727-731 .