

## خوارزمتان متوازيتان فعالتان لحل جمل المعادلات الخطية خماسية الأقطار المتناظرة

الدكتور محمد مزيد دريباتي\*

(تاريخ الإيداع 27 / 1 / 2014. قُبل للنشر في 9 / 3 / 2014)

### □ ملخص □

في هذه المقالة، نصف خوارزمتين متوازيتين لإيجاد حل جمل المعادلات الخطية خماسية الأقطار المتناظرة المربعة من المرتبة  $n$ . تتطلب الخوارزمتين  $N = 2$  معالجاً وكل معالج يمتلك  $O\left(\frac{n}{N}\right)$  ذاكرة موضعية. تتضمن الخوارزمية الأولى كتابة المصفوفة خماسية الأقطار على شكل جداء مصفوفتين كل منهما مصفوفة ثلاثية الأقطار. اقترحنا لحل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار الناتجة خوارزمية متوازية. أما الخوارزمية الثانية فتتضمن تحليل المصفوفة خماسية الأقطار وفق شكل ما بحيث يمكن تنفيذ جمل المعادلات الناتجة وفق خوارزمية متوازية. أجرينا العديد من تجارب المحاكاة العددية لتوضيح فعالية، وسرعة، ودقة الخوارزمتين المقترحتين لحل جمل المعادلات الخطية خماسية الأقطار المتناظرة المدروسة. تبين من التجارب العددية أنّ الخوارزمتين فعالتين وأن إحداهما أسرع من الأخرى بمرتين لحل نفس مسائل الاختبار.

**الكلمات المفتاحية:** خوارزميات متوازية ، مصفوفة خماسية الأقطار ، مصفوفة متناظرة ، جملة معادلات خطية.

\* مدرس - قسم الإحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## Two Efficient Parallel Algorithms for Solving Symmetric Pentadiagonal Linear Systems of Equations

Dr. Mouhamed Maziad Dribate \*

(Received 27 / 1 / 2014. Accepted 9 / 3 / 2014)

### □ ABSTRACT □

In this paper, we described two parallel algorithms for finding the solution of symmetric pentadiagonal linear systems of equations of order  $n$ . The proposed algorithms require 2 processors; each of both possesses  $O\left(\frac{n}{N}\right)$  local memory.

The first algorithm includes writing the pentadiagonal matrix in the form of product of two tridiagonal matrices. We suggested a parallel algorithm for solving tridiagonal linear systems of equations. The second algorithm consists of decomposition of the pentadiagonal matrix in a form such that we can carry out the resulting linear systems of equations by using parallel algorithm. We carried out many numerical experiments to illustrate the efficiency, speeding up and accuracy for solving symmetric pentadiagonal linear systems of equations. The numerical experiments showed that the proposed algorithms were efficient and one of both was much faster in factor of 2 than the other one for solving the same test problems.

**Keywords:** Parallel Algorithms, Pentadiagonal Matrix, Symmetric matrix, System of Linear equations.

---

\*Assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.







$$Bx = d \Leftrightarrow AAx = d \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = y \\ Ay = d \end{cases} \quad (8)$$

من المعروف أنه يمكن تحليل صف المصفوفات ثلاثية الأقطار على شكل جداء مصفوفتين ثنائيتي الأقطار دنيا  $L$  و عليا  $U$  [5,9]. بعدئذ تؤول مسألة حل جملة المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار إلى حل جملة معادلات ثنائيتي الأقطار دنيا و عليا بتطبيق طريقتي التعويض التقدمي والتراجعي على الترتيب. بما أن هذا العمل يقودنا إلى صيغة عودية لحساب المجاهيل ، فإن خوارزميات تحليل LU ليست مناسبة للحساب المتوازي. في هذه الفقرة نطور خوارزمية فعالة يمكن تنفيذها بالحساب المتوازي.

نصف فيما يلي خوارزمية تتضمن تحويل المصفوفة ثلاثية الأقطار الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

إلى مصفوفة تأخذ الشكل التالي:

$$S = \begin{bmatrix} x & & & & & & & \\ x & x & x & & & & & \\ & & x & & & & & \\ & & & x & x & x & & \\ & & & & & x & & \\ & & & & & & x & x \end{bmatrix} \quad (9)$$

أو إلى مصفوفة تأخذ الشكل التالي:

$$S = \begin{bmatrix} x & x & & & & & & \\ & x & & & & & & \\ x & x & x & & & & & \\ & & & x & & & & \\ & & & & x & x & x & \\ & & & & & x & & x \end{bmatrix} \quad (10)$$

تحقق المصفوفة (9) الشرط التالي:

$$S_{ii-1} = 0, S_{ii+1} = 0, i = 1, 3, 5, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$$

بينما تحقق المصفوفة (10) الشرط التالي:

$$S_{ii-1} = 0, S_{ii+1} = 0, i = 2, 4, 6, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

حيث [—] القسمة الصحيحة دون باق.

إذا كانت المصفوفة (9) أو (10) نظامية ، عندئذ يمكن حساب معكوسها وفق الصيغة التالية:

$$S^{-1} = D^{-1} (2D - S) D^{-1} \quad (11)$$

حيث  $D = \text{diag}(S)$  هي مصفوفة قطرية تتشكل من عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة  $S$ .

بتطبيق (11) على جملة معادلات خطية مصفوفة أمثالها من أحد النوعين (9) و (10) و لتكن  $Sz = w$

نحصل على الحل  $S^{-1}w$ .

الخوارزمية ا: حل جملة المعادلات الخطية  $Sz = w$  وفق الشكل (9) و (10) .

بتطبيق هذه الخوارزمية لحل الجملة  $Sz = w$ . يتم تخزين الحل في المتجه  $w$ . في هذه الحالة نناقش حالتين

وفقا للبنية اللاصفورية للمصفوفة  $S$  كما هو مبين في (9) و (10).

if ( $S$  is of the type (9)) then

$$w_i = S_{ii}^{-1} w \left( i=1:2:2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right), i=1, 3, 5, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \quad (12)$$

$$w_i = \text{diag}(S)_{ii}^{-1} (w_i - S_{i,i-1}w_{i-1} - S_{i,i+1}w_{i+1}) \left( i=2:2:2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right), i=2, 4, 6, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

if ( $S$  is of the type (10))

$$w_i = S_{ii}^{-1} w_i \left( i=2:2:2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right), i=2, 4, 6, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (13)$$

$$w_i = S_{ii}^{-1} (w_i - S_{i,i-1}w_{i-1} - S_{i,i+1}w_{i+1}) \left( i=1:2:2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right), i=1, 3, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$$

حيث  $w_i = 0$  إذا كان  $i < 1$  أو  $i > n$ .

#### تعقيد الخوارزمية ا:

تتطلب الخوارزمية على الأكثر  $3n$  عملية حسابية لإجراء عمليات ضرب سلمية، أي،  $n$  عملية جمع ،  $n$

عملية ضرب و  $n$  عملية قسمة.

#### مزايا الخوارزمية ا:

تتميز الخوارزمية إضافة إلى تعقيدها المنخفض جداً بأنه يمكن تطبيقها في الحساب المتوازي كما يلي: إذا كانت

المصفوفة  $S$  من النوع (9) أو (10) ، فإنه يمكن إنجاز حساب  $S_{ii}^{-1}w_i$  من أجل جميع قيم  $i$  الفردية على معالجات

مختلفة في نفس الوقت. بعدئذ يمكن و بسهولة حساب:

$$w_i = S_{ii}^{-1} (w_i - S_{i,i-1}w_{i-1} - S_{i,i+1}w_{i+1})$$

على التوازي من أجل  $i$  زوجي.

#### الخوارزمية II المقترحة لحل جملة المعادلات الخطية $Ay = d$





$$m = \alpha, l = \beta, \mu = \delta, u = \alpha, v = \beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_j = \frac{l_j}{\mu_j}, m_j = \frac{m_j}{\mu_j} \\ \mu_{j+1} = \mu_{j+1} - l_j \times u_j \\ u_{j+1} = u_{j+1} - l_j \times v_j \\ l_{j+1} = l_{j+1} - m_j \times u_j \\ \mu_{j+2} = \mu_{j+2} - m_j \times v_j \end{array} \right. \quad (j = 1 \text{ to } n-2) \quad (18)$$

$$l_{n-1} = \frac{l_{n-1}}{\mu_{n-1}}$$

$$\mu_n = \mu_n - l_{n-1} \times u_{n-1}$$

بتعويض (14) في المعادلة (1) نحصل على:

$$Bx = d \Leftrightarrow F_k D_k F_k^T x_k = d_k \Leftrightarrow \begin{cases} F_k^T x_k = y_k \\ D_k y_k = h_k \\ F_k h_k = d_k \end{cases} \quad (19)$$

يمكن حل (19) وفق الخطوات الخوارزمية الآتية:

**الخطوة 1: حل جملة المعادلات الخطية  $F_k h_k = d_k$  وفق الآتي:**

$$\begin{aligned} h_n &= d_1, h_{n-1} = d_{n-1} - u_{n-1} h_n \\ h_j &= d_j - u_j h_{j+1} - v_j h_{j+2} \quad (j = n-2, n-3, \dots, k+1) \\ h_1 &= d_1, h_2 = d_2 - l_1 h_1 \\ h_j &= d_j - m_j h_{j-2} - l_j h_{j-1} \quad (j = 3, 4, \dots, k-2) \end{aligned} \quad (20)$$

**الخطوة 2: حل جملة المعادلات الخطية  $D_k y_k = h_k$  وفق العلاقة التالية:**

$$y_{i,k} = \frac{h_{i,k}}{D_{i,k}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

حيث  $D_{i,k}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة  $D_k$ .

**الخطوة 3: حل جملة المعادلات الخطية  $F_k^T x_k = y_k$  وفق العلاقات الآتية:**

$$\begin{aligned} x_k &= y_1 \\ x_{k-1} &= y_k - \eta_k, \quad k > 1 \\ x_j &= y_j - l_j x_{j+1} - m_j x_{j+2}, \quad j = k-2, k-3, \dots, 1 \\ x_{k+1} &= y_{k+1} + v_{k-1} \eta_k - u_k, \quad v_0 = 0 \\ x_j &= y_j - 2x_{j-2} - u_{j-1} x_{j-1}, \quad j = k+2, k+3, \dots, n \end{aligned} \quad (22)$$

**تنفيذ الخوارزمية الثانية على التوازي:**

يتم تنفيذ الخطوتين 1 و 2 على التوازي كما يلي: ننفذ العمليات:

$$h_1 = d_1, h_2 = d_2 - l_1 h_1$$

$$h_j = d_j - m_j h_{j-2} - l_j h_{j-1} \quad (j = 3, 4, \dots, k-2)$$

على المعالج الأول بينما يتم تنفيذ العمليات:

$$h_n = d_1, h_{n-1} = d_{n-1} - u_{n-1} h_n$$

$$h_j = d_j - u_j h_{j+1} - v_j h_{j+2} \quad (j = n-2, n-3, \dots, k+1)$$

على المعالج الثاني. علاوة على ذلك، نحسب أيضاً على المعالج الأول، و على التناوب، قيم  $y_{i,k}$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  الموافقة لقيم  $h$  التي نحسبها على المعالج الأول. من جهة أخرى، نحسب أيضاً على المعالج الثاني، و على التناوب، قيم  $y_{i,k}$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  الموافقة لقيم  $h$  التي نحسبها على المعالج الثاني. أما الخطوة 3 فيتم تنفيذها على التوازي بين المعالين كما هو واضح.

**تعقيد الخوارزمية الثانية:**

تتطلب الخوارزمية الثانية تعقيداً زمنياً مقداره  $O(n) + 12\left(\frac{n}{N}\right)$  عملية حسابية، حيث  $N$  هو عدد المعالجات

الضرورية لتنفيذ الخوارزمية الثانية و هو في هذه الحالة  $N = 2$  كما وجدنا في الفقرة السابقة، أي أن زمن التنفيذ هو نصف الزمن اللازم لتنفيذها بالحساب التسلسلي.

لتكن  $B$  مصفوفة خماسية الأقطار متناظرة مربعة نظامية من المرتبة  $n = 2m + 1$ ، حيث  $m$  هي قوى للعدد 2، و  $N$  هو عدد المعالجات المتاحة.

مبرهنة [5]. يمكن حل أي جملة معادلات خطية خماسية الأقطار مربعة من المرتبة  $n$  ليس بأكثر

من  $O(n) + 12\left(\frac{n}{N}\right)$  خطوة.

■ التجارب العددية:

بيننا أن كلاً من الخوارزميتين الأولى و الثانية تتطلب زمناً حسابياً  $O\left(\frac{n}{N}\right)$  عملية حسابية على معالين لحل

الجملة (1). في هذه الفقرة، نوضح مدى فعالية، و سرعة، و دقة الخوارزميتين المقترحتين على مصفوفات حصلنا عليها من تطبيقات واقعية [1-22].

نفذنا تجاربنا في لغة Matlab 10 على حاسوب بنتيوم IV مع 4 Gb RAM و 300 GB disk. دوننا

النتائج التي حصلنا عليها جدولياً، و مثلناها بيانياً.

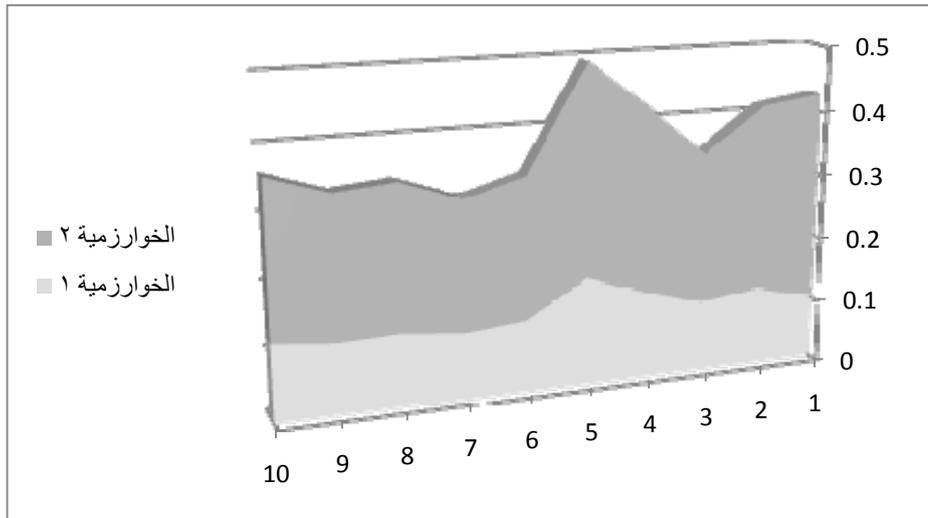
ملاحظة: الرمز A في الجدولين (1) و (2) يشير إلى متجه سطري.

الجدول 1. أزمنة الحصول على حل (1) وفق الخوارزميتين المقترحتين من أجل مصفوفات الاختبار المدروسة جميعها من المرتبة  $n = 65536$ .

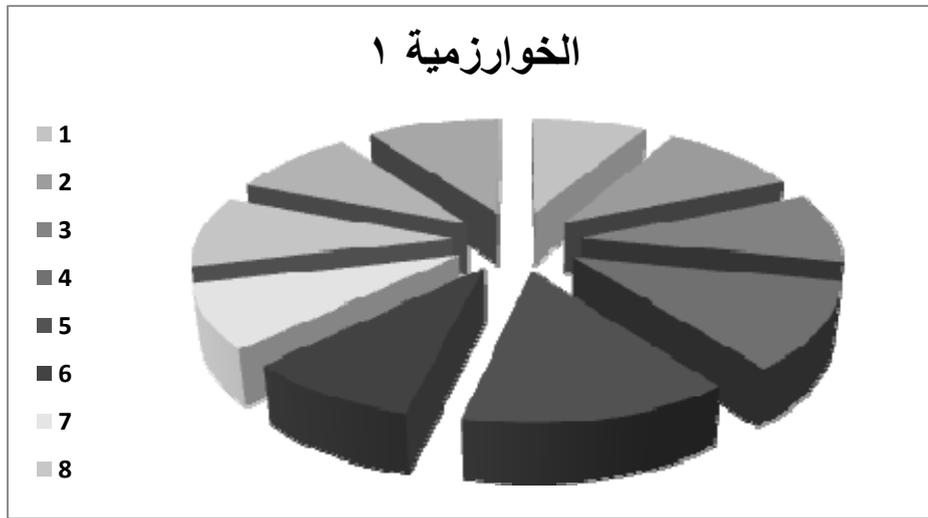
Test problem	Algorithm 1	Algorithm 2
$A = [-2, 1, 7, 1, -2]$	0.10254	0.32142
$A = [1, -4, 6, -4, 1]$	0.12417	0.28741
$A = [1, 1, -4, 1, 1]$	0.11051	0.23285
$A = [1, 2, -5, 2, 1]$	0.13809	0.28496
$A = [2, 4, 7, 4, 2]$	0.16875	0.32554
$A = [-4, 2, 8, 2, -4]$	0.11051	0.22102
$A = [2, 3, 5, 3, 2]$	0.10255	0.20301
$A = [1, 3, -5, 3, 1]$	0.11284	0.22566
$A = [2, -3, 6, -3, 2]$	0.11012	0.22023
$A = [3, 1, 5, 1, 3]$	0.12011	0.24024

الجدول 2. حساب  $\|d - A\tilde{x}\|_2$  (حيث  $\tilde{x}$  هو الحل المحسوب) عند تطبيق الخوارزميتين المقترحتين لحل (1) مصفوفات أمثاله خماسية الأقطار من المرتبة  $n = 65536$ .

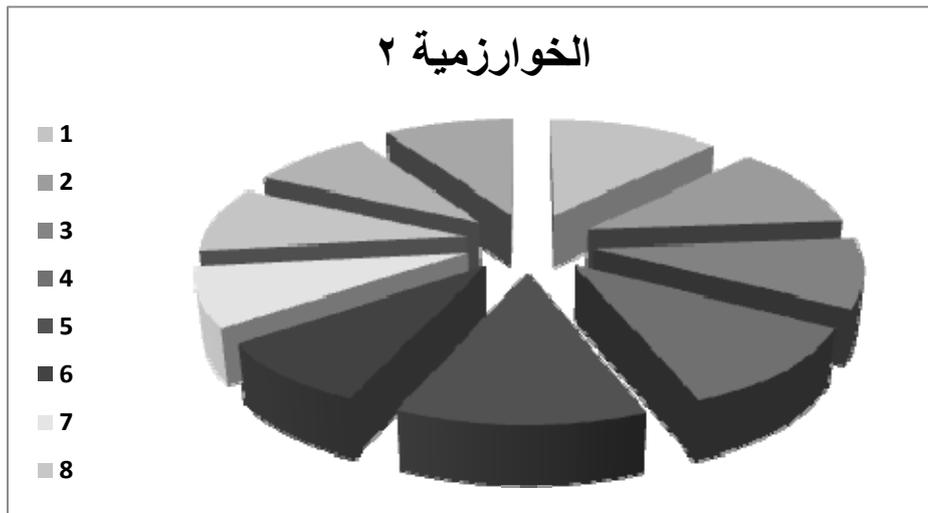
Test problem	Algorithm 1	Algorithm 2
	$\ \text{Algorithm 1}\ _2$	$\ \text{Algorithm 2}\ _2$
$A = [-2, 1, 7, 1, -2]$	5.31420e-015	1.08727e-013
$A = [1, -4, 6, -4, 1]$	3.37680e-016	3.96025e-014
$A = [1, 1, -4, 1, 1]$	2.35050e-016	2.32912e-014
$A = [1, 2, -5, 2, 1]$	4.28084e-017	3.41121e-015
$A = [2, 4, 7, 4, 2]$	4.92218e-017	1.07816e-015
$A = [-4, 2, 8, 2, -4]$	1.05470e-016	1.23547e-014
$A = [2, 3, 5, 3, 2]$	1.84215e-018	2.80140e-016
$A = [1, 3, -5, 3, 1]$	1.24762e-016	3.01482e-014
$A = [2, -3, 6, -3, 2]$	2.35412e-017	2.42101e-015
$A = [3, 1, 5, 1, 3]$	3.01547e-017	3.87419e-015



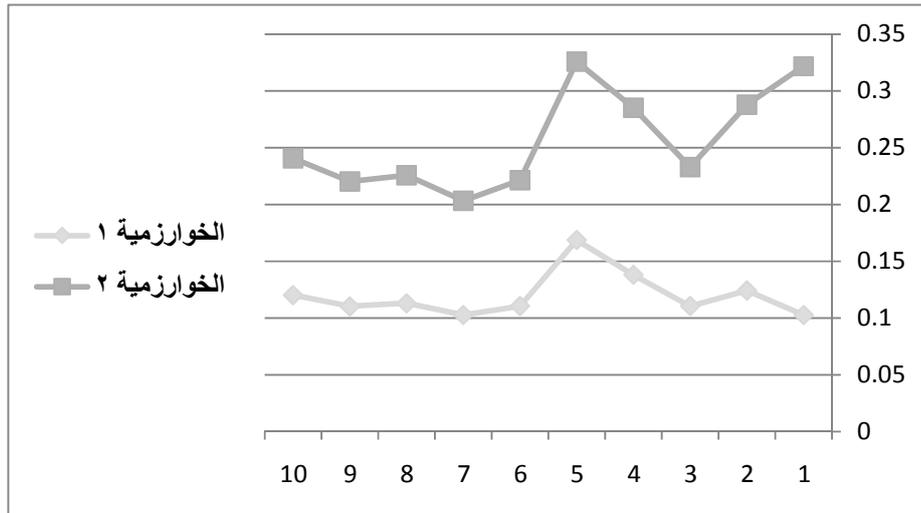
الشكل 1. مقارنة أزمنا تنفيذ الخوارزميتين المقترحتين لحل مسائل الاختبار المدروسة وفق التمثيل ثلاثي الأبعاد.



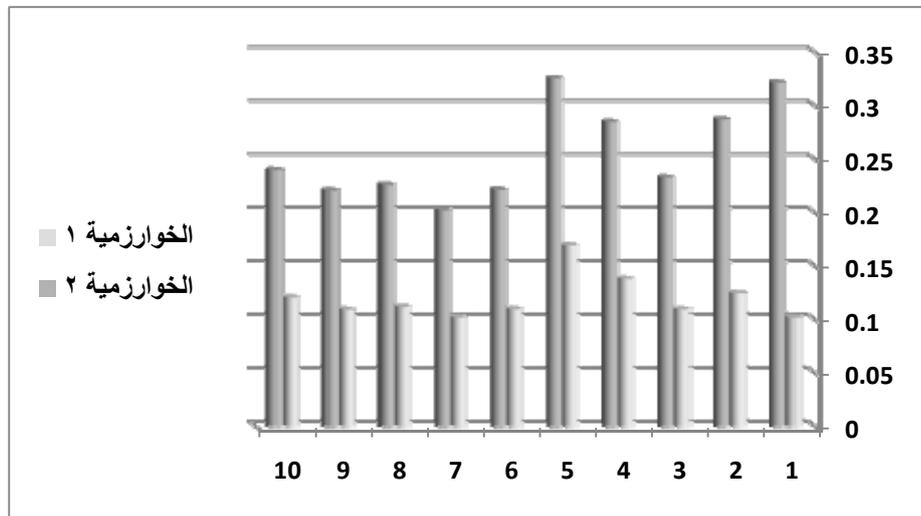
الشكل 2. أزمنا تنفيذ الخوارزمية الأولى لحل مسائل الاختبار المدروسة لتوضيح زمن كل مسألة وفق شكل ثلاثي الأبعاد.



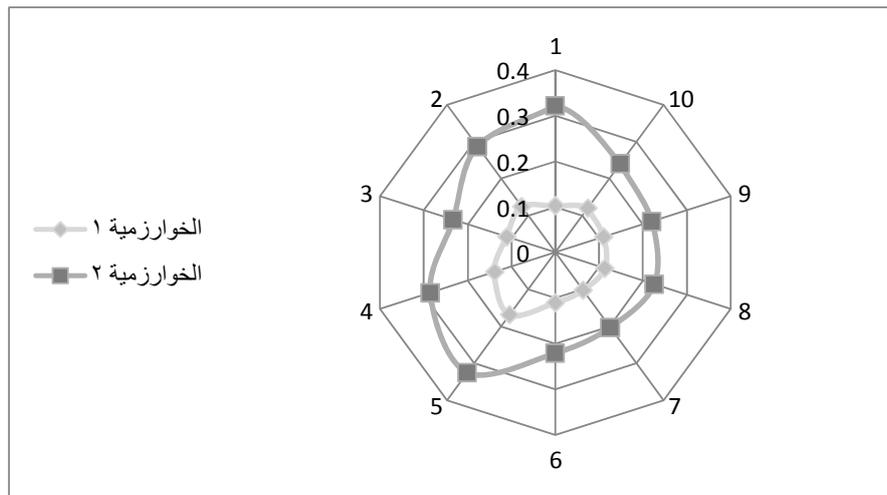
الشكل 3. أزمنا تنفيذ الخوارزمية الثانية لحل مسائل الاختبار المدروسة لتوضيح زمن كل مسألة وفق شكل ثلاثي الأبعاد.



الشكل 4. مقارنة أزمنة تنفيذ الخوارزميتين الأولى والثانية لحل مسائل الاختبار المدروسة بهدف توضيح الفرق بين أداء الخوارزميتين.



الشكل 5. مقارنة أزمنة تنفيذ الخوارزميتين الأولى والثانية لحل مسائل الاختبار المدروسة بهدف توضيح الفرق بين أداء الخوارزميتين باستخدام الأشكال ثلاثية الأبعاد أسطوانية الشكل.



الشكل 6. مقارنة أزمنة تنفيذ الخوارزميتين الأولى والثانية لحل مسائل الاختبار المدروسة بهدف توضيح الفرق بين أداء الخوارزميتين بحيث تتضح الفروقات بينهما.

من الجدولين 1 و 2 ومن الأشكال 1-6، يتضح أن الخوارزمية الأولى أسرع بكثير بحوالي مرتين من الخوارزمية الثانية لحل نفس مسائل الاختبار. علاوة على ذلك، من الجدول 2 نجد أن الخوارزمية الأولى تعطي الحل المحسوب بدقة أفضل من الخوارزمية الثانية بمعامل  $10^{-2}$ .

### النتائج والمناقشة :

بيننا أن كلاً من الخوارزميتين الأولى والثانية تتطلب زمناً حسابياً  $O\left(\frac{n}{N}\right)$  عملية حسابية على معالين لحل (1). أوضحنا أيضاً فعالية ، و سرعة ، و دقة الخوارزميتين الأولى والثانية على مصفوفات حصلنا عليها من تطبيقات واقعية [5,9,20-22].

نفذنا تجاربنا في لغة Matlab 10 على حاسوب بنتيوم IV مع 4 Gb RAM و 300 GB disk. دوننا النتائج التي حصلنا عليها جدولياً ، و مثلناها بيانياً.

### الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا الفصل خوارزميتين على الحساب المتوازي لحل جمل المعادلات الخطية خماسية الأقطار المتناظرة. تعتمد الخوارزمية الأولى على تحليل مصفوفة الأمثال باستخدام المصفوفات ثلاثية الأقطار و من ثم إيجاد خوارزمية متوازية لحل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار الناتجة. أما الخوارزمية الثانية فتتضمن كتابة المصفوفة خماسية الأقطار بشكل يسهل إيجاد خوارزمية متوازية لحلها. أجرينا العديد من الاختبارات العددية الحاسوبية لتوضيح فعالية الخوارزميتين المقترحتين في حل جمل معادلات خطية خماسية الأقطار متناظرة من حيث زمن التنفيذ و الدقة في الحصول على الحل المنشود.

من النتائج الحاصلة وجدنا أن:

- أداء الخوارزمية الأولى (الخوارزمية 1) أفضل بأكثر من مرتين من أداء الخوارزمية الثانية (الخوارزمية 2) من حيث زمن التنفيذ.

- تعطي الخوارزمية الأولى (الخوارزمية 1) الحل المحسوب بدقة أفضل من الخوارزمية الثانية (الخوارزمية 2).  
بالنتيجة ننصح باستخدام الخوارزمية الأولى بدلاً من الخوارزمية الثانية لحل جمل المعادلات الخطية خماسية الأقطار المتناظرة من حيث زمن التنفيذ و الدقة في الحصول على الحل المنشود.

## المراجع:

- [1] C.W. Groetsch, J.T. King, Matrix Methods and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [2] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer-Verlag, 2000.
- [3] Arnt H. Veenstra, H.X. Lin and E.A.H. Vollebregt, A comparison of scability of different parallel iterative methods for shallow water equations, Contemp. Math. 218 (1998) 357–364.
- [4] I.M. Navon, A Numerov–Galerkin technique applied to a finite-element shallow-water equations model with enforced conservation of integral invariants and selective lumping, J. Comput. Phys. 52 (1983) 313–339.
- [5] Ilse C. F. Ipsen, Numerical Matrix Analysis: Linear Systems and Least Squares, SIAM, Philadelphia, 2009.
- [6] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [7] R.L. Burden and J.D. Faires, Numerical Analysis, 7<sup>th</sup> edition, Books & Cole Publishing, Pacific Grove, CA, 2005.
- [8] G. Dahlquist and A. Bjorck, Numerical methods in scientific computing, Volume I, SIAM, Philadelphia, 2008.
- [9] R.W. Hamming, Introduction to applied numerical analysis, McGraw-Hili, 1997.
- [10] R. Glowinski and P. Neittaanmäki, Partial Differential Equations: Modeling and Numerical Simulation, Springer, 2008.
- [11] L. Lapidus and G.F. Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [12] B.N. Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, Pacific Grove: California, 1999.
- [13] J.C. Butcher, The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods, Wiley, 1987.
- [14] R.H. Christoph Schwab, Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Lecture notes for course held by R. Hiptmair in WS03/04, 2004.
- [15] A. Toselli and O. Widlund, Domain Decomposition Methods– Algorithms and Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [16] G. Ben–Yu, Spectral Methods and Their Applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998.
- [17] K.J. Beers, Numerical Methods for Chemical Engineering: Applications in MATLAB, Cambridge University press Cambridge, 2007.
- [18] E. Suli and D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, 2003.
- [19] G.W. Stewart Matrix Algorithms :Volume I "Basic Decompositions", SIAM, Philadelphia, 2006.
- [20] F. Diele, L. Lopez, The use of the factorization of five-diagonal matrices by tridiagonal Toeplitz matrices, Appl. Math. Lett. 11 (1998) 61–69.
- [21] T. Sogabe, A fast numerical algorithm for the determinant of a pentadiagonal matrix, Appl. Math. Comput. 196 (2008) 835–841.
- [22] T. Sogabe, on a two-term recurrence for the determinant of a general matrix, Appl. Math. Comput. 187 (2007) 785–788.