مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

دراسة تقريب صف الدوال $L_M^P(\Gamma)$ وخواصه

الدكتور محمد علي*
الدكتور سليمان محمود**
عايدة حبيب***

(تاريخ الإيداع 26 / 2 / 2014. قُبِل للنشر في 10 / 4 /2014)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة صفين جديدين من الدوال العقدية هما L_M^{P*} و L_M^P. وهما يرتبطان بصف دوال ليبيغ الشهير L_P، وصف دوال أورليتش L_M. ثم تمت دراسة العلاقة بين الصفين الجديدين L_M^{P*}و L_M^P ، وكل من الصفين L_M , L_P، حيث تم إثبات بعض الخواص الجديدة التي يتمتع بها كل من الصفين L_M^{P*} ، L_M^P .

وفي نهاية هذا البحث قمنا باستخدام هذه الدراسة لتقريب الصف L_M^P على مجموعة واسعة من المنحنيات.

الكلمات المفتاحية: صف ليبيغ L_P ، صف أورليتش L_M، نظرية التقريب.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.
** أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

The properties and approximation of functions class" L_M^P ".

Dr. Mohammed Ali[*]
Dr. Suleman Mahmod[**]
Aida Habib[***]

(Received 26 / 2 / 2014. Accepted 10 / 4 /2014)

□ ABSTRACT □

The aim of this research is to present the two new classes of complex functions . The first class is denoted by " L_M^{P*} ", and the second one is denoted by" L_M^P ". The definition of both of them depends on the famous Lebesgue class " L_p ",and orlicz class " L_M ".The relationship between the two new classes " L_M^{P*} and L_M^P ",and the two classes" L_p and L_M "is studied. This study gives some properties of " L_M^{P*} and L_M^P " .

Finally, this study is used for approximation of the class " L_M^P " on group of wide curves.

Key words: Lebesgue classes of functions" L_p ", orlicz classes of functions" L_M ", approximation theory.

[*]**Associate professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**]**Associate professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[***]**Postgraduate Student , Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تنقسم أساسيات نظرية تقريب الدوال العقدية بشكل عام إلى ثلاثة أقسام رئيسة وهي:

1. صف الدوال العقدية الذي يتم تقريبه.
2. صف الدوال الذي يتم التقريب إليه، وأهمها صف كثيرات الحدود، وصف الدوال الكسرية.
3. الفروق بين الدوال المقربة وأدوات التقريب التي تسمى بقيمة أفضل تقريب في الحالة التي يتحقق لدينا أفضل تقريب.

في هذه المقالة نلقي الضوء على تعريف صفين جديدين من الدوال العقدية المتفرعة عن صف دوال ليبيغ L_P وهما الصفين L_M^{P*} ، L_M^P حيث نتج عنهما بعض الخواص الجديدة .

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بدراسة صفين جديدين من الدوال العقدية المتفرعة عن الصف L_P ، ويمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

1. تعريف صف الدوال L_M^{P*} بالاعتماد على تعريف صفي الدوال L_Pو L_M .
2. دراسة العلاقة بين الصف L_M^{P*} وكل من الصفين L_P و L_M .
3. إثبات بعض الخواص التي يتمتع بها الصف L_M^{P*} .
4. تعريف صف الدوال L_M^P بالاعتماد على تعريف صفي الدوال L_Pو L_M .
5. دراسة العلاقة بين الصف L_M^P وكل من الصفين L_P و L_M .
6. إثبات بعض الخواص التي يتمتع به الصف L_M^P .
7. تقريب صف الدوال L_M^P إلى دوال كسرية على مجموعة واسعة من المنحنيات بالاعتماد على تقريب الصف L_M .

طرائق البحث ومواده:

تم في هذا البحث الاعتماد على مفاهيم وتعاريف رياضية مألوفة كمتراجحتي منكوفسكي وهولدر، ومبرهنات شهيرة وقمنا باستخدام طريقة تقريب الدوال العقدية على مجموعة واسعة من المنحنيات.

<u>**تعاريف ومفاهيم أساسية:**</u>

سوف نقدم في هذه الفقرة، أهم التعاريف والدراسات السابقة التي سنعتمد عليها في هذا البحث:

<u>**تعريف(1)[1] :**</u>

يعرف صف دوال ليبيغ على منحني جوردان Γ ذي طول محدود بالعلاقة:

$$L_P(\Gamma) = \left\{ f \in C(\Gamma); \int_\Gamma \left| f(z) \right|^P \left| dz \right| < \infty \right\}; 1 \le p < \infty$$

ويعرف عليه النظيم:

$$\| f \|_{L_P} = \left(\int_\Gamma \left| f(z) \right|^P \left| dz \right| \right)^{\frac{1}{P}}$$

تعريف (2) [2] :

يعرف صف دوال أورليتش $L_M(\Gamma)$ على منحني جوردان Γ ذي الطول المحدود بالشكل الآتي:

$$L_M(\Gamma)=\left\{ f\in C(\Gamma);\int_{\Gamma} M(\alpha|f(z)|)|dz|<\infty \right\},\alpha>0$$

حيث M(x) دالة حقيقية مستمرة ومحدبة $M(x):[0,\infty[\to[0,\infty[$ وتحقق الشروط الآتية:

$$M(0)=0, M(x)>0 \qquad \forall x>0; \lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0; \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

ويعرف عليه النظيم بالشكل: $\|f\|_{L_M(\Gamma)}=\sup\{\int_{\Gamma}|(f\cdot g)(z)\|dz|, g\in L_N(\Gamma)\}$

حيث Nهي الدالة المتممة للدالة M(x) وتعرف بالشكل: $N(y)=\max_{x\geq 0}\{xy-M(x)\}$

تعريف (3)[2]:

نقول عن الدالة M(x) إنها تحقق الشرط Δ_2 إذاتحقق: $\limsup_{x\to\infty}\frac{M(2x)}{M(x)}<\infty$

تعريف(4) [2]:

يعرف تكامل كوشي الشاذ للدالة f بالشكل :

$$S_\Gamma f(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma/D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, z\in\Gamma$$

إذا وجدت النهاية السابقة فعندئذ يكون تكامل كوشي الشاذ موجوداً، وتكون الدالتان f^+, f^- معرفتين وفقاً للعلاقات الآتية :

$$f^+(z)=S_\Gamma f(z)+\frac{1}{2}f(z)$$

$$f^-(z)=S_\Gamma f(z)-\frac{1}{2}f(z)$$

$$f=f^+-f^-$$

تعريف(5)[3]:

نعرف منحني كارلسون بأنه كل منحني Γ يحقق الشرط :

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon}|\Gamma(z,\varepsilon)|<\infty$$

حيث: $\Gamma(z,\varepsilon)=\{t\in\Gamma,|t-z|<\varepsilon\}$

مبرهنة مساعدة (1) [4]

ليكن منحني جوردان Γ ذو الطول المحدود، وليكن $L_M(\Gamma)$ فضاء أورليتش انعكاسي على المنحني Γ (أي أن : $L_M(\Gamma)\cong(L_M(\Gamma))^{**}$) ، عندئذ يكون مؤثر كوشي الشاذ $S_\Gamma f$ محدوداً في الفضاء $L_M(\Gamma)$

أي أن: $\|S_\Gamma f\|_{L_M}\leq C_1\|f\|_{L_M}$ إذا، فقط، إذا كان Γ منحني كارلسون.

تعريف(6)[5]:

لتكن x تابعاً مستمراً ذا معامل الاستمرارية المعرف بالشكل : $\omega(x,t)=\sup_{\substack{t_1,t_2\in[0,2\pi]\\ |t_1-t_2|<t}}|x(t_1)-x(t_2)|, t\geq 0$

نقول عن Γ إنه منحني دايني أملس Dini smooth إذا كان يقبل التمثيل بالشكل الآتي:

$$\Gamma : x(t), 0\leq t\leq 2\pi \qquad x'(t)\neq 0$$

وكذلك $x'(t)$ دالة دايني مستمرة Dini continuous أي تحقق الشرط التالي: $\int_0^{\pi}\frac{\omega(t,x')}{t}dt<\infty$

تعريف (7)[5]:

ليكن Γ منحني دايني أملس، ولتكن $f_0=f\circ\Psi$ ، $f_1=f\circ\Psi_1$ لكل $f\in L_M$ حيث ψ هو التحويل الذي يحول خارج قرص الوحدة إلى خارج المنطقة G=extΓ, G و ψ_1 الذي يحول خارج قرص الوحدة إلى المنطقة G=intΓ ، عندئذ فإن: $f_0\in L_M(T)$ و $f_1\in L_M(T)$ ، وباستخدام الدالتين f_1^+, f_0^+ على دائرة الوحدة T سنعرف:

$$\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\delta)_M=\omega_\alpha(f_0^+,\delta)_M$$

$$\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\delta)_M=\omega_\alpha(f_1^+,\delta)_M$$

حيث إن:

$$\omega_\alpha(f,\delta)_M=\mathop{Sup}_{|h|\leq\delta}\left\|\Delta_h^\alpha\right\|_{L_M(T)}$$

$$\Delta_h^\alpha f(z)=\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-k}C_k^\alpha f(z+hk)$$

هذه المبرهنة تدرس تقريب صف دوال أورليتش باستخدام التعريف(6):

مبرهنة مساعدة (2) [5] :

ليكن Γ منحني ديني أملس، و $L_M(\Gamma)$ فضاء أورليتش، عندئذ، إذا كانت $f\in L_M(\Gamma),\alpha>0$ فإنه من أجل كل n > 0 يوجد ثابت $c_2>0$ ودالة كسرية من الشكل :

$$R_n(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z})$$

حيث:

$$\left\|f-R_n(z)\right\|_{L_M}\leq c_2\left\{\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M+\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M\right\}$$

تعريف (8)[1]:

نرمز لأسرة منحنيات ريس بالرمز R_p ، وهي عبارة عن مجموعة المنحنيات ذات الطول المحدود، والتي من أجلها يكون تكامل كوشي الشاذ مؤثراً محدوداً في الفضاء $L_P(\Gamma)$ ، أي أن : $\left\|S_\Gamma f\right\|_{L_p}\leq C_3\left\|f\right\|_{L_p}$

الآن سنعرف صفين جديدين متفرعين عن الصف L_P وهما $L_M^{P*}(\Gamma)$ و $L_M^P(\Gamma)$:

تعريف(9):

ليكن Γ منحني جوردان ذو الطول المحدود، عندئذ نقول عن الدالة العقدية f إنها تنتمي إلى الصف $L_M^{P*}(\Gamma)$ إذا كان :

$$\int_\Gamma \left| M(\alpha |f(z)|) \right|^P |dz| < \infty$$

ونعرف عليه النظيم:

$$\| f \|_{L_M^{P*}} = Sup\left\{ (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}, g \in L_N \right\}$$

تعريف (10):

نعرف فضاء ليبيغ أورليتش $L_M^P(\Gamma)$ على منحني جوردان Γ ذي طول محدود بأنه أسرة التوابع العقدية f التي تحقق:

$$\int_\Gamma \left| M(\alpha |f(z)|) \right|^{\frac{1}{P}} |dz| < \infty$$

ونعرف عليه النظيم السابق:

$$\| f \|_{L_M^{P*}} = Sup\left\{ (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}, g \in L_N \right\}$$

النتائج والمناقشة:

من التعاريف السابقة ينتج ما يأتي:

نتيجة(1):

i) إذا كان $P = 1$ فإن $L_M^{P*}(\Gamma) = L_M(\Gamma)$

ii) إذا كان $g = 1$ فإن $\| f \|_{L_M^{P*}} = \| f \|_{L_p}$

iii) عندما $M(x) = x$ فإن $L_M^{P*}(\Gamma) = L_P(\Gamma)$

في المبرهنة التالية ندرس التكافؤ بين نظيمي الفضائين $L_M^{P*}(\Gamma)$ و $L_M(\Gamma)$:

مبرهنة (1):

ليكن Γ منحني جوردان ذو طول محدود، و f دالة كيفية من $L_M^{P*}(\Gamma)$ ، عندئذ :

$$\| f \|_{L_M^{P*}} \cong \| f \|_{L_M}$$

الإثبات:

نثبت أولاً صحة المتراجحة التالية: $\| f \|_{L_M} \le A \| f \|_{L_M^{P*}}$

حيث A مقدار ثابت.

لدينا حسب متراجحة هولدر يكون لدينا:

$$\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz| \le (\int_\Gamma |1|^q |dz|)^{\frac{1}{q}} (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz| \le A(\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} ....(1)$$

بأخذ Sup لطرفي العلاقة(1) لأجل كل $g \in L_M$ ينتج لدينا:

$$\|f\|_{L_M} \le A\|f\|_{L_M^{P^*}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

الآن نثبت صحة المتراجحة الآتية بالاعتماد على متراجحة منكوفسكي:

$$\|f\|_{L_M^{P^*}} \le B\|f\|_{L_M}$$

حيث B مقدار ثابت. لدينا:

$$\int_\Gamma |f.g(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} = (\int_\Gamma \left|(f.g)(z) + ((f.g)(z))^{\frac{1}{P}} - ((f.g)(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le (\int_\Gamma \left|(f.g)(z) + ((f.g(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma \left|((f.g)(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le (\int_\Gamma |((f.g)(z))|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma \left|((f.g)(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma \left|((f.g)(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le (\int_\Gamma |((f.g)(z))|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + 2(\int_\Gamma \left|((f.g)(z))^{\frac{1}{P}}\right|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le C_4 + 2(\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$= \left[\frac{C_4}{\int_\Gamma |f.g||dz|} + 2(\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz|)^{\frac{1}{P}-1}\right]\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz|$$

$$\le \left[\frac{C_4}{C_5} + 2C_5^{\frac{1}{P}-1}\right]\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz|$$

$$= B\int_\Gamma |(f.g)(z)||dz|$$

حيث: $(\int_\Gamma |(f \cdot g)(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le c_4, \int_\Gamma |f \cdot g||dz| \le c_5$

وبالتالي نجد أن:

$$(\int_\Gamma |(f \cdot g)(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le B\int_\Gamma |(f \cdot g)(z)||dz| \ldots\ldots\ldots.(3)$$

بأخذ Sup لطرفي العلاقة(3) لأجل $g \in L_N$ ينتج لدينا :

$$\|f\|_{L_M^{P^*}} \le B\|f\|_{L_M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

من العلاقتين (2) و(4) نستنتج أن:

$$\|f\|_{L_M^{P^*}} \cong \|f\|_{L_M}$$

وبالتالي النظيمان $\|f\|_{L_M}$ و $\|f\|_{L_M^{P^*}}$ متكافئان.

سنثبت في هذه المبرهنة الآتية أن مؤثر كوشي الشاذ محدود في الفضاء $L_M^{P^*}(\Gamma)$ بالاعتماد على المبرهنة (1):

مبرهنة (2):

ليكن Γ منحني جوردان ذو الطول المحدود ولتكن $f \in L_M^{P*}$ عندئذ يكون تكامل كوشي الشاذ مؤثراً محدوداً في هذا الفضاء أي أنه يجد ثابت $C_6>0$ يحقق العلاقة التالية:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le C_6 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

الإثبات:

بالاعتماد على تكافؤ النظم في المبرهنة (1) وعلى محدودية $S_\Gamma f$ في L_M نجد أن:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le B\|S_\Gamma f\|_{L_M} \le B.C_1\|f\|_{L_M} \le B.C_1.A\|f\|_{L_M^{P^*}} = C_6\|f\|_{L_M^{P^*}}; c_6 = B\cdot c_1$$ و

بالتالي نحصل على:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le C_6 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

في المبرهنة الآتية ندرس التكافؤ بين نظميمي الفضائين L_M^{P*}, L_p :

مبرهنة (3):

ليكن Γ منحني جوردان ذو طول محدود ولتكن f دالة كيفية من $L_M^{P^*}$ عندئذ : $\|f\|_{L_M^{P^*}} \cong \|f\|_{L_p}$ أي أن النظيمين متكافئان.

الإثبات:

نثبت أولاً صحة المتراجحة الآتية:

$$\|f\|_{L_M^{P^*}} \le A_1\|f\|_{LP}$$

حيث A مقدار ثابت.

باستخدام متراجحة منكوفسكي لدينا:

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} = (\int |(f.g)(z) + f(z) - f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} \\
&\le (\int_\Gamma |(f.g)(z) + f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} \\
&\le (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} \\
&= (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + 2(\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} \\
&\le C_4 + 2(\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} \le A_1(\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}
\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$(\int_\Gamma |(f\cdot g)(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le A_1(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \text{..............(5)}$$

بأخذ Sup لطرفي العلاقة (5) من أجل كل $g \in L_N$ نحصل على :

$$\|f\|_{L_M^{P^*}} \le A_1 \|f\|_{L_P} \text{ ....(6)}$$

نثبت ثانياً صحة المتراجحة الآتية بالاعتماد على متراجحة منكوفسكي:

$$\|f\|_{L_P} \le B_1 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

$$\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} = (\int_\Gamma |f(z) + (f.g)(z) - (f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le (\int_\Gamma |f(z) + (f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma (|f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le (\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$= (\int_\Gamma |f(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}} + 2(\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}$$

$$\le C_7 + 2(\int_\Gamma |(f.g)(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{P}} \le B_1 (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}, (\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le c_7$$

$$\le B_1 Sup \left\{ (\int_\Gamma |(f.g)(z)|^P |dz|)^{\frac{1}{P}}, g \in L_N \right\}$$

$$= B_1 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

أي أن :

$$\|f\|_{L_P} \le B_1 \|f\|_{L_M^{P^*}} \text{ .... (7)}$$

من (6) و (7) نجد أن: $\|f\|_{L_M^{P^*}} \cong \|f\|_{L_P}$

مبرهنة (4):

إذا كانت $\Gamma \in R_P$ فإن $S_\Gamma f$ محدود في نظيم الفضاء $L_M^{P^*}$ أي أنه يوجد ثابت $C_8>0$ يحقق العلاقة الآتية:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le C_8 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

الإثبات:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le A_1 \|S_\Gamma f\|_{L_P} \le AC_5 \|f\|_{L_P} \le A_1 C_5 B_1 \|f\|_{L_M^{P^*}} = C_8 \|f\|_{L_M^{P^*}}, C_8 = A_1 \cdot C_5 \cdot B_1$$

$$\Rightarrow \|S_\Gamma f\|_{L_M^{P^*}} \le C_8 \|f\|_{L_M^{P^*}}$$

مبرهنة (5):

يتحقق بين الصفين $L_M(\Gamma), L_M^{P*}(\Gamma)$ العلاقة الآتية:

$$L_M^{P*}(\Gamma) \subset L_M(\Gamma)$$

الإثبات : نثبت أنه: $\forall f \in L_M^{P*}(\Gamma) \Rightarrow f \in L_M(\Gamma)$

لدينا: $\forall f \in L_M^{P*}(\Gamma) \Rightarrow \int_\Gamma |M(\alpha |f(z)|)|^P |dz| \le c_{10} < \infty$

ولنثبت أن $f \in L_M(\Gamma)$ أي لنثبت أن: $\int_\Gamma M(\alpha |f(z)|)|dz| < \infty$

حسب متراجحة هولدر نجد أن:

$$\int_\Gamma M(\alpha|f(z)|)|dz| \le (\int_\Gamma |1|^q |dz|)^{\frac{1}{q}} (\int_\Gamma \left|M(\alpha|f(z)|\ )\right|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le c_9 (c_{10})^{\frac{1}{p}} = c_{11} < \infty$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma M(\alpha|f(z)|)|dz| < \infty \Rightarrow f \in L_M(\Gamma)$$

أي أنه : $\forall f \in L_M^{P*}(\Gamma) \Rightarrow f \in L_M(\Gamma)$ ، وبالتالي فإن: $L_M^{P*}(\Gamma) \subset L_M(\Gamma)$

مبرهنة (6):

إذا كانت M دالة تحقق الشرط Δ_2 فإن: $L_M^{P*} \subset L_P$

الإثبات: عندما M تحقق الشرط Δ_2 فإن $L_M \subset L_P$ ، ولكن لدينا $L_M^{P*} \subset L_M$ ، وبالتالي $L_M^{P*} \subset L_P$

_ وبالتالي يمكن كتابة النظيم في هذه الحالة بالشكل التالي:

$$\|f\|_{L_M^{P*}} = Sup\left\{\|f.g\|_{L_p}, g \in L_N\right\}$$

حيث لدينا $f \in L_M^{P*} \subset L_P$ ، وكذلك $g \in L_N \subset L_P$

لأنه إذا كانت M دالة تحقق الشرط Δ_2 فإن $N(y) = \max_{x\ge 0}\{xy - M(x)\}$ تحقق الشرط Δ_2 لأن:

$$\lim_{y\to\infty}\sup\max_{x\ge0}\frac{2xy - M(x)}{xy - M(x)} = \lim_{y\to\infty}\sup\max_{x\ge0}\frac{2xy(1-\frac{M(x)}{2xy})}{xy(1-\frac{M(x)}{xy})}$$

$$= \lim_{y\to\infty}\sup\max_{x\ge0}\frac{2(1-\frac{M(x)}{2xy})}{1-\frac{M(x)}{xy}} = \sup\max_{x\ge0}\lim_{y\to\infty}\frac{2(1-\frac{M(x)}{2xy})}{(1-\frac{M(x)}{xy})}$$

$$= \sup\max_{x\ge0} 2 = 2 < \infty$$

ومنه كون N تحقق الشرط Δ_2 فإن $L_N \subset L_P$ ، ومنه $g \in L_N \subset L_P$ ، ويكون $f.g \in L_P$

الآن سندرس العلاقة بين الصّفين $L_M(\Gamma), L_M^P(\Gamma)$ من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة(7):

يتحقق بين الصفين $L_M(\Gamma), L_M^P(\Gamma)$ العلاقة الآتية:

$$L_M(\Gamma) \subset L_M^P(\Gamma)$$

الإثبات: لنثبت أن: $\forall f \in L_M(\Gamma) \Rightarrow f \in L_M^P(\Gamma)$

لدينا: $\forall f \in L_M \Rightarrow \int_\Gamma M(\alpha|f(z)|)|dz| \le C_{12} < \infty$

ولنثبت أن : $f \in L_M^P(\Gamma)$ أي لنثبت أن: $\int_\Gamma \left|M(\alpha|f(z)|)\right|^{\frac{1}{p}} |dz| < \infty$

حسب متراجحة هولدرلدينا:

$$\int_\Gamma \left|M(\alpha|f(z)|)\right|^{\frac{1}{p}}|dz| \le (\int_\Gamma |1|^q |dz|)^{\frac{1}{q}} (\int_\Gamma \left|(M(\alpha|f(z)|))^{\frac{1}{p}}\right|^p |dz|)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$c_{13}(\int_\Gamma |M(\alpha|f(z)|)||dz|)^{\frac{1}{p}} \le c_{13}(c_{12})^{\frac{1}{p}} = c_{14} < \infty, (\int_\Gamma |1|^q |dz|)^{\frac{1}{p}} \le c_{13}$$

أي أنه: $\forall f \in L_M(\Gamma) \Rightarrow f \in L_M^P(\Gamma)$ وبالتالي ينتج أن: $L_M(\Gamma) \subset L_M^P(\Gamma)$

ملاحظة (1):

إذا كان: $M(x) = x^{P^2}$ فإن $L_P(\Gamma) \subset L_M^P(\Gamma)$

الإثبات:

لدينا : $\forall f \in L_P \Rightarrow \int_\Gamma |f(z)|^P |dz| < \infty$

لنثبت أن : $f \in L_M^P(\Gamma)$ أي لنثبت أن : $\int_\Gamma \left|M(\alpha|f(z)|)\right|^{\frac{1}{p}}|dz| < \infty$ عندما $M(x) = x^P$ باستخدام متراجحة هولدر ينتج لدينا:

$$\int_\Gamma \left|M(\alpha|f(z)|)\right|^{\frac{1}{p}}|dz| = (\int_\Gamma \left|(\alpha|f(z)|)^{P^2}\right|^{\frac{1}{p}}|dz| = \int_\Gamma |\alpha|^{P^2} |f(z)|^P |dz|$$

$$= |\alpha|^{P^2} \int_\Gamma |f(z)|^P |dz| = C_{15} \int_\Gamma |f(z)|^P |dz| < \infty \Rightarrow f \in L_M^P(\Gamma)$$

وبالتالي ينتج لدينا : $L_P(\Gamma) \subset L_M^P(\Gamma)$.

– باستخدام المبرهنة المساعدة (2) سنثبت المبرهنة الآتية التي تدرس تقريب الصف $L_M^P(\Gamma)$:

مبرهنة (8):

ليكن Γ منحني ديني أملس و $L_M^P(\Gamma)$ فضاء ليبيغ أورليتش فإذا كانت $f \in L_M^P(\Gamma), \alpha > 0$ عندئذ لكل $n > 0$ يوجد ثابت $c_{16} > 0$ ودالة كسرية من الشكل :

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z})$$

حيث يتحقق:

$$\|f - R_n(z)\|_{L_M^P} \le c_{16}\left\{\omega_{\alpha,\Gamma}(f, \frac{1}{n})_M + \tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f, \frac{1}{n})_M\right\}$$

الإثبات:

بما أن $S_\Gamma f$ محدود في نظيم الفضاء L_M^P وبالتالي فإن f^+ و f^- موجودتان وتحليليتيان على G^+ و G^- على الترتيب والآن سنبرهن أن :

$$\left\|f^+ - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(z)\right\|_{L_M^P} \le C_{16}\omega_{\alpha,\Gamma}(f, \frac{1}{n})_M$$

$$\left\|f^- + \sum_{k=1}^n a_k F_k(\frac{1}{z})\right\|_{L_M^P} \le C_{16}\,\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f, \frac{1}{n})_M$$

بالاعتماد على تكافؤ النظيمين بين L_M و L_M^P والمبرهنة المساعدة (2):

$$\left\| f^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(z) \right\|_{L_M^P} \leq B \left\| f^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(z) \right\|_{L_M} \leq B\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M = C_{16}\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M$$

$$\left\| f^- + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z}) \right\|_{L_M^P} \leq B \left\| f^- + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z}) \right\|_{L_M^P} \leq B\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M = C_{16}\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M$$

$$\| f - R_n(z) \|_{L_M^P} = \left\| f^+ - f^- - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z}) \right\|_{L_M^P}$$

$$\leq \left\| f^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(z) \right\|_{L_M^P} + \left\| f^- - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(\frac{1}{z}) \right\|_{L_M^P}$$

$$\leq C_{16}\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M + c_{16}\tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M$$

$$= C_{16}[\omega_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M + \tilde{\omega}_{\alpha,\Gamma}(f,\frac{1}{n})_M]$$

وهو المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

تمت دراسة صفّين جديدين هما $L_M^P(\Gamma), L_M^{P*}(\Gamma)$ المتفرعين عن صف الدوال L_P ، وأثبتنا خواص الصف $L_M^{P*}(\Gamma)$ من خلال المبرهنات (1)−(2)−(3)−(4)−(5)−(6)، كما أثبتنا خاصة هامة من خواص الصف $L_M^P(\Gamma)$ وهي العلاقة بين الصف $L_M^P(\Gamma)$ والصفين L_P و L_M من خلال المبرهنة (7)، وقمنا بتقريب الصف $L_M^P(\Gamma)$ على منحني ديني أملس من خلال المبرهنة (8).

نوصي بدراسة صفوف جديدة متفرعة عن صف دوال ليبيغ L_P ، ودراسة خواصه، وتقريبه على مجموعة واسعة من المنحنيات.

المراجع:

1. Mohammad Ali, The effect of some conformal mapping on Riesz curves and on modulus of continuity, Tishreen university journal for studies and scientific research-Basic science series ,Vol(24) No(12) 2002.
2. Ali Guven , Daniyal M. Polynomial Approximation in Smirnov-Orlicz classes, Computational Methods and Function Theory,Volume2(2002),No.2,509-517.urves ,
3. Ali Guven , Daniyal M. Rational approximation of Orlicz spaces on carleson curves, Bull.Belg.Math.soc.12(2005),223-234.
4. A.YU. Karlovich , Algebras of singular integral operators with piecewise continous coefficients on reflexive Orlicz spaces, Math Nachr (1996) 187-222.
5. RAMAZAN AKGUN, DANIYAL m. Israfilov, Approximation and Moduli of fractional order in smirnov- orlicz classes, GLASNIK. Mathematic, Vo1,43(63), 2008, 121-136.