مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

ترابط المعطيات في بعض الصيغ التدريجية للمؤثرات شبه المقلصة

الدكتور عدنان متيلج*

(تاريخ الإيداع 6 / 6 / 2013. قُبِل للنشر في 12 / 11 /2013)

ملخّص

في هذا البحث نبرهن على نتائج جديدة حول ترابط المعطيات للتكراريات (Suantai , CR , (8)) عند تطبيق المؤثرات شبه المقلصة والمعرفة على فضاءآت باناخ الحقيقية . نستخدم هذه النتائج لإيجاد النقطة الثابتة لمؤثر محدد دون القيام بحسابها.حيث نقرب هذا المؤثر بأخر شبه مقلص والذي يمكن حساب نقطته الثابتة بوساطة هذه التكراريات . أخيراً نحل مثالين باستخدام برنامج إكسيل لتوضيح النتائج .

الكلمات المفتاحية : المؤثرات شبه المقلصة , تكرارية CR , تكرارية Suantai , النقطة الثابتة المشتركة .

* أستاذ مساعد– قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

Data dependence of some iterative schemes for contractive-Like operators

Dr. Adnan Mtelej*

(Received 30 / 8 / 2013. Accepted 8 / 11 /2013)

□ ABSTRACT □

In this paper we prove new results about data dependence of (Suantai , CR , (8)) Iterations when applied to contractive- Like operators in real Banach spaces .

We use these results for finding fixed point of certain operator instead of computing.

Where we approximate the operator with a contractive –Like one, for which it is possible to compute the fixed point.

We resolve two examples by using Excel program to explain the results.

Key words: Contractive-Like operators, CR-iteration, Suantai –iteration, Common fixed point.

* **Associate professor -Basic science department -Faculty of mechanical and electrical engineering - Tishreen university - Lattakia -Syria**

مقدمة :

نصادف في العلوم التطبيقية مسائل يعبر عنها بمعادلات جبرية من الشكل $f(x)=0$ والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو $x=Tx$ بحيث إنه لكل جذر p للمعادلة الأصلية $f(x)=0$ يكون لدينا $p=Tp$ (تسمى p نقطة ثابتة لـ T) ويرمز لمجموعة النقط الثابتة لـ T بـ $F(T)$.

ولإيجاد الحل التقريبي للمسألة الجديدة تطبق نظريات النقط الثابتة وذلك بأن يتم البحث عن تكرارية مناسبة تتقارب نحو p .

يعد مبدأ التطبيق المقلص لـ باناخ من النظريات المهمة في هذا المجال ويصاغ على النحو :

إذا كان المؤثر T يطبق فضاءً مترياً تاماً X على نفسه ووجد عدد $\delta : 0<\delta<1$ بحيث :

$$d(Tx,Ty) \le \delta\, d(x,y) \qquad \forall x,y\in X \qquad (1)$$

عندئذٍ يكون للمعادلة $x=Tx$ حلٌ وحيدٌ يمثل نهاية لمتتالية بيكارد:

$$x_{n+1}=Tx_n \qquad , x_0\in X \ , \ n=0,1,2,3,.......$$

يسمى الشرط (1) شرط التقليص التام .

إلا أن مبدأ باناخ يخفق بشكل عام إذا لم يحقق T الشرط (1) حتى ولو كان الفضاء تاماً.أي أن متتالية بيكارد لاتتقارب بالضرورة نحو النقطة الثابتة لـ T, مما دفع للبحث عن تكراريات جديدة تتقارب نحو نقط ثابتة لمؤثرات أخرى أضعف منه . سنتعرف فيما يلي على بعض هذه التكراريات إضافة للمؤثرات المستخدمة .

ليكن X فضاء باناخ و $B\neq\phi$ مجموعة جزئية , محدبة , مغلقة من X والمؤثر $T:B\to B$.

يعرف Suantai في 2005 تكرارية جديدة تعطى بالصيغة التالية انظر [1]:

$$\begin{aligned}
&x_0\in B,\\
&x_{n+1}=\alpha_n Ty_n+b_n Tz_n+(1-\alpha_n-b_n)x_n \ ,\\
&y_n=\beta_n Tz_n+c_n Tx_n+(1-\beta_n-c_n)x_n \ ,\\
&z_n=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n Tx_n \ ,
\end{aligned} \qquad (2)$$

حيث : $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$.

ملاحظات :

1) من أجل $c_n=b_n=0$ نحصل على التكرارية :

$$\begin{aligned}
&x_0\in B \ ,\\
&x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n \ ,\\
&y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tz_n \ ,\\
&z_n=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n Tx_n \ ,
\end{aligned} \qquad (3)$$

وتسمى تكرارية Noor [2] .

2) ومن أجل $\gamma_n=c_n=b_n=0$ نحصل على التكرارية :

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n \ ,\\
&y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n \ ,
\end{aligned} \qquad (4)$$

وتسمى تكرارية Ishikawa [3].

3) من أجل $\gamma_n=\beta_n=c_n=b_n=0$ نحصل على التكرارية :

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \qquad (5)$$

وتسمى تكرارية Mann [4] .

4) ومن أجل $\alpha_n = 1$, $\gamma_n = \beta_n = c_n = b_n = 0$ نحصل على التكرارية :

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (6)$$

وتسمى تكرارية بيكارد . لقد استخدمت التكراريات (3), (4), (5), (6) في أبحاث عديدة لإيجاد الحلول التقريبية لمسائل النقط الثابتة , وفي السنوات القليلة الماضية عرَفت تكراريات جديدة نذكر منها وعلى سبيل المثال التكراريتين S,Thianwan و SP انظر [5] .

حديثاً يقترح Renu−C وآخرون في [6] نموذجاً تكرارياً جديداً يرمز له اختصاراً بـ CR ويعرف بالصيغة :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n \ , \\ y_n &= (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \ , \qquad (7) \\ z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \ , \end{aligned}$$

حيث $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$ وأن $\sum_n \alpha_n = \infty$.

وأثبتوا أن هذا النموذج يتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة للمؤثرات شبه المقلصة (Quasi− Contractive) كما أنه يكافئ كلاً من التكراريات (Mann , Ishikawa , Noor , SP) للمؤثرات ذاتها. بمعنى أنها تتقارب جميعاً نحو نقطة ثابتة ووحيدة P.

إن الصيغ التي ذكرناها أعلاه تتعامل مع مؤثر واحد فقط علماً أن هناك صيغ أخرى تعرف بدلالة مؤثرين, ونظراً لأهمية هذه الصيغ سنمدد دراستنا حول الترابط إلى تكرارية جديدة تتضمن مؤثرين S,T وتعرف وفقاً للقانون التدريجي الآتي انظر [7] .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Sy_n \ , \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \ , \qquad (8) \end{aligned}$$

علماً أن $T,S: K \to K$ حيث إن K تمثل مجموعة جزئية ,مغلقة , محدبة من فضاء منظم X وأن $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ متتاليتان عدديتان في $[0,1]$.

يذكر أن أحد أكثر المؤثرات استخداماً في مسائل النقط الثابتة هو مؤثر Zamfirescu [8] ويعطى بالنظرية الآتية :

نظرية (1) : ليكن (X,d) فضاءً مترياً تاماً و $T: X \to X$ تطبيق توجد لأجله الأعداد الحقيقية a,b,c مع $a \in (0,1)$, $b,c \in (0,\frac{1}{2})$ بحيث أنه من أجل أي زوج $x,y \in X$ واحد على الأقل مما يلي محقق :

$$i)\ d(Tx,Ty) \le a d(x,y)$$

$$ii)\ d(Tx,Ty) \le b[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

$$iii)\ d(Tx,Ty) \le c[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$$

عندئذٍ T له نقطة ثابتة وحيدة p والصيغة التدريجية لـ بيكارد $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ متقاربة نحو p من أجل أية نقطة بدء $x_0 \in X$.

يرمز لهذا المؤثر اختصاراً بـ Z ويصنف ضمن المؤثرات شبه المقلصة (Quasi Contractive) أو ضعيفة التقليص . في 2004 ادخل Berinde [9] نموذجاً جديداً من المؤثرات شبه المقلصة على فضاءات كيفية X لـ باناخ تحقق الشرط :

$$\|Tx - Ty\| \le 2\delta\|x - Tx\| + \delta\|x - y\| \quad \forall x, y \in X \ , \delta \in [0,1) \tag{9}$$

وأثبت أنه آعم من مؤثر Zamfirescu , كما استخدم تكرارية Ishikawa لتقريب نقطه الثابتة في هذه الفضاءات . وفي [10] Imoru and Olatinwo كانا قد عرفا نموذجاً أكثر شمولية على النحو :

تعريف(1): بفرض X فضاء باناخ وليكن $T : X \to X$ نقول إن T Contractive –Like operator (مؤثر شبه مقلص) إذا وجد الثابت $\delta \in [0,1)$ والتابع المستمر والمتزايد $\varphi : R_+ \to R_+$ مع $\varphi(0) = 0$ بحيث يكون :

$$\|Tx - Ty\| \le \delta\|x - y\| + \varphi(\|x - Tx\|) \quad \forall x, y \in X \tag{10}$$

تجدر الملاحظة إلى أن المؤثرالمحقق للشرط (10) لايمتلك بالضرورة نقطة ثابتة حتى ولو كان X فضاءً تاماً فمثلاً إذا فرضنا أن $X = [0,\infty)$ وعرفنا المؤثر $T : [0 , \infty) \to [0 , \infty)$ على النحو :

$$Tx = \begin{cases} 1 & if \quad x \in [0 \ , \ 0.6] \\ 0,4 & if \quad x \in (0.6 \ , \infty) \end{cases}$$

وكان $\varphi(t) = kt \ : \ k \ge 2$ عندئذٍ $\varphi(0) = 0$ من الواضح أن المؤثر T ليس له نقطة ثابتة .

من جهة ثانية نفرض أن : $x < y$ عندئذٍ من أجل $0 \le x < y \le 0,6$ أو $0,6 < x < y$

يكون لدينا : $\|Tx - Ty\| = 0$ وبالتالي الشرط (10) محقق دوماً .

ومن أجل $0 \le x \le 0,6 < y$ عندئذٍ $\|Tx - Ty\| = 0,6$ وأيضاً $\|x - Tx\| = 1 - x$

ومنه $\varphi(\|x - Tx\|) = \varphi(1 - x) = k(1 - x) \ge 0,4k \ge 0.8$

وبالتالي : $\|Tx - Ty\| = 0,6 \le k\|x - Tx\| \le \delta\|x - y\| + \varphi(\|x - Tx\|)$

أي أن T يحقق الشرط (10) وليس له نقطة ثابتة .

تعريف (2) [11]:ليكن X فضاء باناخ وليكن المؤثران $\breve{T}, T : X \to X$ نقول أن $\breve{T}$ مؤثر تقريبي لـ T إذا كان من أجل كل $x \in X$ ومن أجل الثابت $\varepsilon \succ 0$ لدينا :

$$\|Tx - \breve{T}x\| \le \varepsilon \tag{11}$$

نظرية (2) [1]: لتكن $B \ne \phi$ مجموعة جزئية ,مغلقة , محدبة لفضاء منظم X و $T : B \to B$ مؤثر يحقق الشرط (10) و $F(T) \ne \phi$ ولتكن $\{x_n\}$ التكرارية (2) .إذا كانت $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$ بحيث : $\alpha_n + b_n \in [0,1]$, $\gamma_n + c_n \in [0,1]$ و $\sum_n \alpha_n + b_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T .

نظرية (3) : لتكن $B \ne \phi$ مجموعة جزئية ,مغلقة , محدبة لفضاء باناخ X و $T : B \to B$ يحقق الشرط (10) و $F(T) \ne \phi$ و $\{x_n\}$ التكرارية (7) حيث $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية في $[0,1]$ وأن : $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T .

يتم برهان هذه النظرية بأسلوب مشابه لبرهان النظرية (2.1) في [6] .

قضية (1) [12]: لتكن $\{\rho_n\}$ متتالية عددية موجبة ولنفرض وجود العدد $n_0 \in N$ بحيث $\forall n \ge n_0$ تتحقق المتراجحة: $\rho_{n+1} \le (1-r_n)\rho_n + r_n t_n$ حيث $t_n \ge 0$, $\sum_n r_n = \infty$, $r_n \in (0,1)$ و $n \in N$ عندئذٍ :

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \rho_n \le \limsup_{n\to\infty} t_n \qquad (12)$$

قضية (2) [13] : لتكن $\{\rho_n\}$ متتالية من الأعداد الموجبة تحقق الشرط :

$$\rho_{n+1} \le (1-r_n)\rho_n \quad , n \ge 0$$

حيث إن : $\sum_n r_n = \infty$, $r_n \in (0,1)$ عندئذٍ : $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$

إن العلاقة بين المعطيات في تكراريات النقط الثابتة أصبحت مؤخراً موضوعاً هاماً للبحث حيث نشرت العديد من البحوث حول هذا الترابط مستخدمة بعض التكراريات المعروفة نذكر على سبيل المثال S,oltuz حيث درس في [14] الترابط في تكرارية Ishikawa للمؤثرات المقلصة تماماً , ثم عاد ودرس الترابط للتكرارية ذاتها لكن باستخدام المؤثرات شبه المقلصة انظر [12] ومن قبل Renu Chug and Vivek Kumar اللذين درسا الترابط في تكراريتي SP , Noor باستخدام المؤثرات شبه المقلصة أنظر [15] .

في هذا البحث سندرس الترابط في كل من التكراريتين (2) , (7) المولدتين بالمؤثر (10) ثم في التكرارية (8) المولدة بالمؤثرين T,S المحققين للشرط (10) أيضاً , والتي يفترض وجود نقط ثابتة لها واستنتاج صيغ الترابط المتعلقة بكل تكرارية من هذه التكراريات والتي يمكن استخدامها لإيجاد الحلول التقريبية التي نبحث عنها . ثم نحل مثالين للتأكد من صحة النتائج التي توصلنا إليها .

2- أهمية البحث وأهدافه :

يهدف البحث إلى إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات الجبرية ،وتكمن أهميته في سهولة تطبيق النتائج التي حصلنا عليها وسرعة استنتاج الحلول, وذلك باستخدام كل من التكراريات (2),(7),(8) المولدة بمؤثرات شبه مقلصة (Contractive– Like operators) وبالاستفادة أيضاً من مفهوم المؤثرات التقريبية .

طرائق البحث ومواده :

اعتماداً على بعض التعاريف والنظريات الأساسية المتعلقة بمسائل النقط الثابتة ,إضافة للدراسات المنشورة في هذا المجال تم إثبات صحة النتائج التي توصلنا إليها .

النتائج والمناقشة :

نظرية (4) :لتكن $B \ne \phi$ مجموعة جزئية , مغلقة,محدبة في فضاء باناخ X وليكن $\varepsilon > 0$ إذا كان : $T : B \to B$ مؤثر يحقق الشرط (10) مع $F_T \ne \phi$ و $\breve{T}$ المؤثر التقريبي لـ T حسب التعريف (2) ,

ولتكن $\{u_n\},\{x_n\}$ تكراريتين معرفتين بـ (2) والموافقتين للمؤثرين T و $\breve{T}$ على الترتيب وكانت $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ متتاليات عددية في [0,1] محققة للشروط :

$$c_n \le b_n \ , \ \sum_n \alpha_n + b_n = \infty \ \text{و} \ \alpha_n + b_n \in [0,1] \qquad b_n + c_n \in [0,1]$$

و لنفرض إن : $p \in F(T)\ ,\ q \in F(\breve{T})$ عندئذٍ :

$$\|p-q\| \le \frac{3\varepsilon}{1-\delta}$$

البرهان: من أجل $u_0, x_0 \in B$ نعتبر التكراريتين $\{x_n\}, \{u_n\}$ الموافقتين لـ T و $\breve{T}$ على النحو :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \alpha_n Ty_n + b_n Tz_n + (1-\alpha_n - b_n)x_n \quad , \quad u_{n+1} = \alpha_n \breve{T}v_n + b_n \breve{T}w_n + (1-\alpha_n - b_n)u_n \\
y_n &= \beta_n Tz_n + c_n Tx_n + (1-\beta_n - c_n)x_n \quad , \quad v_n = \beta_n \breve{T}w_n + c_n \breve{T}u_n + (1-\beta_n - c_n)u_n \\
z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \quad , \quad w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n \breve{T}u_n
\end{aligned} \tag{13}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le \alpha_n \|Ty_n - \breve{T}v_n\| + b_n \|Tz_n - \breve{T}w_n\| + (1-\alpha_n - b_n)\|x_n - u_n\| \le \\
&\le \alpha_n \|Ty_n - Tv_n\| + \alpha_n \|Tv_n - \breve{T}v_n\| + b_n \|Tz_n - Tw_n\| + \\
&+ b_n \|Tw_n - \breve{T}w_n\| + (1-\alpha_n - b_n)\|x_n - u_n\| \le \\
&\le \alpha_n \delta \|y_n - v_n\| + \alpha_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \alpha_n \varepsilon + b_n \delta \|z_n - w_n\| + \\
&+ b_n \varphi(\|z_n - Tz_n\|) + b_n \varepsilon + (1-\alpha_n - b_n)\|x_n - u_n\|
\end{aligned} \tag{14}$$

لكن :

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\le \beta_n \|Tz_n - \breve{T}w_n\| + c_n \|Tx_n - \breve{T}u_n\| + (1-\beta_n - c_n)\|x_n - u_n\| \le \\
&\le \beta_n \|Tz_n - Tw_n\| + \beta_n \|TW_n - \breve{T}w_n\| + c_n \|Tx_n - Tu_n\| + \\
&+ c_n \|Tu_n - \breve{T}u_n\| + (1-\beta_n - c_n)\|x_n - u_n\| \le \\
&\le \beta_n \delta \|z_n - w_n\| + \beta_n \varphi(\|z_n - Tz_n\| + \beta_n \varepsilon + c_n \delta \|x_n - u_n\| + \\
&+ c_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + c_n \varepsilon + (1-\beta_n - c_n)\|x_n - u_n\|
\end{aligned} \tag{15}$$

أيضاً:

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n \|Tx_n - \breve{T}u_n\| \le \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n \|Tx_n - Tu_n\| + \gamma_n \|Tu_n - \breve{T}u_n\| \le \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n \delta \|x_n - u_n\| + \gamma_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n \varepsilon = \\
&= (1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n - u_n\| + \gamma_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n \varepsilon
\end{aligned} \tag{16}$$

نعوض (16) في (15) ينتج :

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\le \beta_n \delta \left[(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n - u_n\| + \gamma_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \gamma_n \varepsilon\right] + \\
&+ \beta_n \varphi(\|z_n - Tz_n\|) + \beta_n \varepsilon + c_n \delta \|x_n - u_n\| + \\
&+ c_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + c_n \varepsilon + (1-\beta_n - c_n)\|x_n - u_n\|
\end{aligned} \tag{17}$$

نعوض(16)و (17)في (14) فنجد :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le \alpha_n\delta[\ \beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\beta_n\gamma_n\delta\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+$$
$$+\beta_n\gamma_n\delta\varepsilon+\beta_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+c_n\delta\|x_n-u_n\|+\beta_n\varepsilon+$$
$$+c_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+c_n\varepsilon+(1-\beta_n-c_n)\|x_n-u_n\|]+$$
$$+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\alpha_n\varepsilon+b_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+b_n\delta\gamma_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+b_n\delta\gamma_n\varepsilon+$$

$$+b_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+b_n\varepsilon+(1-\alpha_n-b_n)\|x_n-u_n\|=$$
$$=\{\alpha_n\delta[\beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))+c_n\delta+(1-\beta_n-c_n)]+$$
$$+b_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))+(1-\alpha_n-b_n)\}\|x_n-u_n\|+$$
$$+[\alpha_n\beta_n\delta^2\gamma_n+\alpha_n c_n\delta+b_n\gamma_n\delta]\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+$$
$$+[\alpha_n\beta_n\delta+b_n]\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+b_n\varepsilon+b_n\gamma_n\delta\varepsilon+$$
$$+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n c_n\varepsilon\delta+\alpha_n\gamma_n\beta_n\delta^2\varepsilon+\alpha_n\beta_n\delta\varepsilon$$

بفرض :

$$K_n=\alpha_n\delta[\beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))+c_n\delta+(1-\beta_n-c_n)]+b_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))+(1-\alpha_n-b_n)$$
$$R_n=\alpha_n\beta_n\delta^2\gamma_n+\alpha_n c_n\delta+b_n\gamma_n\delta]\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+$$
$$+[\alpha_n\beta_n\delta+b_n]\varphi(\|z_n-Tz_n\|)$$
$$L_n=b_n\varepsilon+b_n\gamma_n\delta\varepsilon+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n c_n\varepsilon\delta+\alpha_n\gamma_n\beta_n\delta^2\varepsilon+\alpha_n\beta_n\delta\varepsilon$$

نقوم بتقدير القيم العظمى لـ (K_n,R_n,L_n) :

$$K_n=\alpha_n\delta[\beta_n\delta-\beta_n+c_n\delta-c_n+1-\beta_n\gamma_n\delta(1-\delta)]+$$
$$+1-\alpha_n-b_n+b_n\delta-b_n\gamma_n\delta(1-\delta)$$
$$=\alpha_n\delta[-\beta_n(1-\delta)-c_n(1-\delta)-\beta_n\gamma_n\delta(1-\delta)+1]+$$
$$+1-\alpha_n-b_n(1-\delta)-b_n\gamma_n\delta(1-\delta)=$$
$$=\alpha_n\delta(1-\delta)(-\beta_n-c_n-\beta_n\gamma_n\delta)+\alpha_n\delta+1-\alpha_n-b_n(1-\delta)-b_n\gamma_n\delta(1-\delta)=$$
$$=-\alpha_n(1-\delta)[(\beta_n+c_n)\delta+\beta_n\gamma_n\delta^2]-\alpha_n(1-\delta)+1-b_n(1-\delta)(1+\gamma_n\delta)=$$
$$=1-\alpha_n(1-\delta)[1+(\beta_n+c_n)\delta+\beta_n\gamma_n\delta^2]-b_n(1-\delta)(1+\gamma_n\delta)\le$$
$$\le 1-\alpha_n(1-\delta)-b_n(1-\delta)=1-(1-\delta)(\alpha_n+b_n)$$

بفرض :

$$\|\rho_n\|=\max\{\sup\|x_n-Tx_n\|,\sup\|y_n-Ty_n\|,\sup\|z_n-Tz_n\|\}$$

لكن :

$$\|x_n-Tx_n\|\le\|x_n-p\|+\|p-Tx_n\|\le\|x_n-p\|+\delta\|x_n-p\|+\varphi(\|p-Tp\|)\le$$
$$\le(1+\delta)\|x_n-p\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

بالمثل :

$$\|z_n-Tz_n\|\le\ \|z_n-p\|+\|p-Tz_n\|\le(1+\delta)\|z_n-p\|\le$$
$$\le(1+\delta)\|(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n Tx_n-(1-\gamma_n+\gamma_n)p\ \|$$
$$\le(1+\delta)[(1-\gamma_n)\|x_n-p\|+\gamma_n\|Tx_n-p\|]\le$$

$$\le (1+\delta)[(1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \delta \|x_n - p\| + \gamma_n \varphi(\|p - Tp\|)$$
$$\le (1+\delta)(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n - p\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبأسلوب مماثل نجد : $\|y_n - Ty_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

عندئذٍ :

$$R_n \le [\alpha_n\beta_n\gamma_n\delta^2 + \alpha_n c_n\delta + b_n\gamma_n\delta + \alpha_n + \alpha_n\beta_n\delta + b_n]\varphi(\|\rho_n\|) \le$$
$$\le (a_n + b_n + b_n + \alpha_n + \alpha_n + b_n)\varphi(\|\rho_n\|)$$

ومنه : $R_n \le 3(\alpha_n + b_n)\varphi(\|\rho_n\|)$

أيضاً :

$$L_n \le b_n\varepsilon + b_n\varepsilon + \alpha_n\varepsilon + b_n\varepsilon + \alpha_n\varepsilon + \alpha_n\varepsilon = 3(\alpha_n + b_n)\varepsilon$$

ومنه :

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le [1-(\alpha_n + b_n)(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + \frac{(\alpha_n + b_n)(1-\delta)[3\varepsilon + \varphi(\|\rho_n\|)]}{1-\delta}$$

نضع : $\lambda_n = (\alpha_n + b_n)(1-\delta)$ و $t_n = \dfrac{3\varepsilon + \varphi(\|\rho_n\|)}{1-\delta}$

وبالتالي : $\lambda_n \in [0,1)$, $\sum_n \lambda_n = \infty$, $t_n \ge 0$

ومنه : $\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\lambda_n)\|x_n - u_n\| + \lambda_n t_n$

واستناداً للقضية (1) ينتج أن :

$$0 \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| \le \limsup_{n\to\infty} t_n$$

ومنه : $\|p - q\| \le \dfrac{3\varepsilon}{1-\delta}$.

نتيجة (1): لتكن $B \ne \phi$ مجموعة جزئية مغلقة ,محدبة في فضاء باناخ X وليكن $\varepsilon > 0$ و $T : B \to B$ مؤثر يحقق الشرط (10) حيث $F_T \ne \phi$ و $\breve{T}$ مؤثره التقريبي و $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ متتاليتا Noor الموافقتين لـ T و $\breve{T}$ مع $\sum_n \alpha_n = \infty$ و $\gamma_n \le \beta_n \le \alpha_n$ و $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

عندئذٍ : $\|p - q\| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\delta}$

البرهان : نضع في النظرية (4) $c_n = b_n = 0$ فنحصل على التكرارية (3) ويكون لدينا :

$$L_n \le \alpha_n(\varepsilon + \beta_n\gamma_n\delta^2\varepsilon + \beta_n\delta\varepsilon)$$
$$R_n \le \alpha_n(1 + \beta_n\gamma_n\delta^2 + \beta_n\delta)\varphi(\|\rho_n\|)$$
$$K_n \le (1 - \alpha_n(1-\delta))$$

ومنه :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\| + \\ + \frac{\alpha_n(1-\delta)[\varepsilon+\gamma_n\beta_n\delta^2\varepsilon+\beta_n\delta\varepsilon+(1+\beta_n\gamma_n\delta^2+\beta_n\delta)\varphi(\|\rho_n\|)]}{1-\delta}$$

واستناداً للقضية (1) نستنتج إن : $\|p-q\| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\delta}$.

هذه النتيجة تتوافق مع النظرية (3.1) المبرهنة في [15] .

نتيجة (2): لتكن $B \neq \phi$ مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة في فضاء باناخ X وليكن $\varepsilon > 0$ إذا كان $T: B \to B$ مؤثراً يحقق الشرط (10) وله نقطة ثابتة p و $\breve{T}$ مؤثره التقريبي وله نقطة ثابتة q و $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ متتاليتي Ishikawa الموافقتين لـ T و $\breve{T}$ مع $\sum_n \alpha_n = \infty$ و $\beta_n \le \alpha_n$ و $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

عندئذٍ : $$\|p-q\| \le \frac{\varepsilon}{1-\delta}$$

البرهان : نضع في النظرية (4) $c_n = b_n = \gamma_n = 0$ فنحصل على التكرارية (5) ويكون لدينا :

$$L_n \le \alpha_n(\varepsilon + \beta_n\delta\varepsilon)$$
$$R_n \le \alpha_n(1+\beta_n\delta)\varphi(\|\rho_n\|)$$
$$K_n \le (1-\alpha_n(1-\delta))$$

وبالتالي :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\| + \\ + \frac{\alpha_n(1-\delta)[\varepsilon+\beta_n\delta\varepsilon+(1+\beta_n\delta)\varphi(\|\rho_n\|)]}{1-\delta}$$

واستناداً للقضية (1) نستنتج إن: $\|p-q\| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\delta}$.

هذه النتيجة تتوافق مع النظرية (3.2) التي برهنها S,oltuz في $[12]$.

نظرية (5) : لتكن $B \neq \phi$ مجموعة جزئية , مغلقة,محدبة في فضاء باناخ X وليكن $\varepsilon > 0$ إذا كان $T: B \to B$ مؤثراً يحقق الشرط (10) و $\breve{T}$ المؤثر التقريبي لـ T بحيث : $\|Tx - \breve{T}x\| \le \varepsilon \ \ \forall x \in B$ و $\{x_n\},\{u_n\}$ متتاليتا CR الموافقتان لـ T و $\breve{T}$ وان $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ متتاليات عددية حقيقية في $[0,1]$ مع $\beta_n \le \alpha_n$, و $\sum_n \alpha_n = \infty$ و $\beta_n \ge \dfrac{1}{2}$ ولتكن: $p \in F(T)$, $q \in F(\breve{T})$ عندئذٍ :

$$\|p-q\| \le \frac{4\varepsilon}{1-\delta}$$

البرهان : من أجل $u_0, x_0 \in B$ نعرف التكراريتين $\{x_n\},\{u_n\}$ الموافقتين لـ T و $\breve{T}$ على النحو :

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \qquad u_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n \breve{T} v_n$$
$$y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n T z_n \qquad v_n = (1-\beta_n)\breve{T}u_n + \beta_n \breve{T} w_n$$
$$z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \qquad w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n \breve{T} u_n$$

عندئذٍ :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\|Ty_n-\breve{T}v_n\|\le\\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\|Ty_n-Tv_n\|+\alpha_n\|Tv_n-\breve{T}v_n\|\le\\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\alpha_n\varepsilon=\\ &=(1-\alpha_n(1-\delta))\|y_n-v_n\|+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\alpha_n\varepsilon\end{aligned}\tag{18}$$

لكن :

$$\begin{aligned}\|y_n-v_n\| &\le (1-\beta_n)\|Tx_n-\breve{T}u_n\|+\beta_n\|Tz_n-\breve{T}w_n\|\le\\ &\le (1-\beta_n)\|Tx_n-Tu_n\|+(1-\beta_n)\|Tu_n-\breve{T}u_n\|+\beta_n\|Tz_n-Tw_n\|+\beta_n\|Tw_n-\breve{T}w_n\|\le\\ &\le (1-\beta_n)\delta\|x_n-u_n\|+(1-\beta_n)\varphi(\|x_n-Tx_n\|+(1-\beta_n)\varepsilon+\\ &+\beta_n\delta\|z_n-w_n\|+\beta_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\beta_n\varepsilon\end{aligned}\tag{19}$$

أيضاً :

$$\begin{aligned}\|z_n-w_n\| &\le (1-\gamma_n)\|x_n-u_n\|+\gamma_n\|Tx_n-Tu_n\|+\gamma_n\|Tu_n-\breve{T}u_n\|\le\\ &\le (1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\gamma_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\gamma_n\varepsilon\end{aligned}\tag{20}$$

نعوض) (20) في (19) فنجد :

$$\begin{aligned}\|y_n-v_n\| &\le (1-\beta_n)\delta\|x_n-u_n\|+(1-\beta_n)\varphi(\|x_n-Tx_n\|+(1-\beta_n)\varepsilon+\\ &+\beta_n\,\delta[(1-\gamma_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\gamma_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\gamma_n\varepsilon]+\beta_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\beta_n\varepsilon\\ &=[(1-\beta_n)\delta+\beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))]\|x_n-u_n\|+[1-\beta_n+\beta_n\gamma_n\delta]\varphi(\|x_n-Tx_n\|+\\ &+(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon+\beta_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\beta_n\gamma_n\delta\varepsilon\end{aligned}\tag{21}$$

نعوض (21) في (18) ينتج :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n(1-\delta))[\,(1-\beta_n)\delta+\beta_n\delta(1-\gamma_n(1-\delta))]\|x_n-u_n\|+\\ &+(1-\alpha_n(1-\delta))[1-\beta_n+\beta_n\gamma_n\delta]\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+(1-\alpha_n(1-\delta))\,\beta_n\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\\ &+\alpha_n\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+(1-\alpha_n(1-\delta))[(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon+\beta_n\gamma_n\delta\varepsilon]+\alpha_n\varepsilon\le\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le (1-\alpha_n(1-\delta))[\,(1-\beta_n(1-\delta(1-\gamma_n(1-\delta))))]\|x_n-u_n\|+\\ &+(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_n\varepsilon+\beta_n\varepsilon+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n[\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\beta_n\delta\varphi(\|x_n-Tx_n\|)]\le\\ &\le(1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\frac{\alpha_n(1-\delta)}{1-\delta}[4\varepsilon+\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\varphi(\|z_n-Tz_n\|)+\beta_n\delta\varphi(\|x_n-Tx_n\|)]\le\\ &\le(1-\lambda_n)\|x_n-u_n\|+\lambda_n t_n\end{aligned}$$

حيث: $\lambda_n=\alpha_n(1-\delta)$, $t_n=\varphi(\|y_n-Ty_n\|)+\varphi(\|z_n-Tz_n\|\,)+\beta_n\delta\varphi(\|x_n-Tx_n\|)$

لكن $\{x_n\}$متقاربة نحو نقطة ثابتة لـ T وفقاً للنظرية (3) وبالتالي لدينا :

$$\|x_n-Tx_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ ,\ \|y_n-Ty_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ ,\ \|z_n-Tz_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

والتابع φ مستمر ومنه : $\varphi(\|z_n-Tz_n\|)\to 0$, $\varphi(\|y_n-Ty_n\|)\to 0$, $\varphi(\|x_n-Tx_n\|)\to 0$

عندئذٍ استناداً للقضية (1) نجد :

$$0\le\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|\le\limsup_{n\to\infty}t_n$$

ومنه : $\|p-q\| \le \dfrac{4\varepsilon}{1-\delta}$.

نظرية (6) : لتكن $B \neq \phi$ مجموعة جزئية, مغلقة,محدبة في فضاء باناخ X إذا كان $T,S : B \to B$ تطبيقين يحققان الشرط(10) وكان $F(S) \neq \phi$, $F(T) \neq \phi$ و $F = F(T) \cap F(S) \neq \phi$ و $\{x_n\}$ متتالية معرفة بـ (8) حيث $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$ متتاليتان عدديتان في $[0,1)$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ $\{x_n\}$ تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة مشتركة لـ T,S .

البرهان :

نفرض أن : $p \in F(T) \cap F(S)$ عندئذٍ من أجل $x_0 \in B$ اختيارية نجد :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\le \|(1-\alpha_n)y_n + \alpha_n S y_n - (1-\alpha_n+\alpha_n)p\| \le \\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n \|Sy_n - p\| \le (1-\alpha_n)\|y_n - p\| + \\ &+ \alpha_n \delta \|y_n - p\| + \alpha_n \varphi(\|p - Sp\|) == (1-\alpha_n(1-\delta))\|y_n - p\| \end{aligned} \tag{22}$$

لكن:

$$\|y_n - p\| \le (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|Tx_n - p\| \le (1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p\| \tag{23}$$

نعوض (23) في (22) نجد :

$$\|x_{n+1} - p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n - p\|$$

واستناداً للقضية (2) ينتج أن : $\lim_{n\to\infty} x_n \to p$.

نظرية (7) : ليكن X فضاء باناخ و $B \neq \phi$ مجموعة جزئية,مغلقة, محدبة من X وليكن $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ و $T,S : B \to B$ تطبيقين يحققان الشرط (10) وأن $\breve{T}$, $\breve{S}$ مؤثرين تقريبيين لـ S,T على الترتيب بحيث : $\forall x \in B$ $\|Sx - \breve{S}x\| \le \eta$, $\|Tx - \breve{T}x\| \le \varepsilon$ و $F(T) \cap F(S) \neq \phi$, $F(\breve{T}) \cap F(\breve{S}) \neq \phi$

ولتكن $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ تكراريتين معرفتين بـ (8) حيث $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ متتاليتان من الأعداد الحقيقية الموجبة في $[0,1)$ و $\beta_n \le \alpha_n$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$ عندئذٍ من أجل :

$p \in F(T) \cap F(S)$ و $q \in F(\breve{T}) \cap F(\breve{S})$ فإن : $\|p - q\| \le \dfrac{\varepsilon + \eta}{1-\delta}$

البرهان :من أجل $u_0, x_0 \in B$ نعتبر التكراريتين $\{x_n\}$,$\{u_n\}$ الموافقتين لـ (T,S) و $(\breve{T},\breve{S})$ على الترتيب:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n S y_n \quad , \quad & u_{n+1} &= (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n \breve{S} v_n \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \quad , \quad & v_n &= (1-\beta_n)u_n + \beta_n \breve{T} u_n \end{aligned}$$

عندئذٍ :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\|Sy_n-\breve{S}v_n\|\le\\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\|Sy_n-Sv_n\|+\alpha_n\|Sv_n-\breve{S}v_n\|\le\\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+\alpha_n\varphi(\|y_n-Sy_n\|)+\alpha_n\eta=\\ &=(1-\alpha_n(1-\delta))\|y_n-v_n\|+\alpha_n\varphi(\|y_n-Sy_n\|)+\alpha_n\eta\end{aligned}$$

لكن :

$$\begin{aligned}\|y_n-v_n\| &\le (1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\|Tx_n-\breve{T}u_n\|\le\\ &\le (1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\|Tx_n-Tu_n\|+\beta_n\|Tu_n-\breve{T}u_n\|\le\\ &\le (1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\beta_n\varepsilon+\beta_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)\end{aligned}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\\ &+(1-\alpha_n(1-\delta))\beta_n\varepsilon+(1-\alpha_n(1-\delta))\beta_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\alpha_n\eta+\alpha_n\varphi(\|y_n-Sy_n\|)\le\\ &\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\beta_n\varepsilon+\alpha_n\eta+\beta_n\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\alpha_n\varphi(\|y_n-Sy_n\|)\le\\ &\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+\alpha_n[\varepsilon+\eta+\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\varphi(\|y_n-Sy_n\|)]\\ &=(1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n-u_n\| + \frac{\alpha_n(1-\delta)[\varepsilon+\eta+\varphi(\|x_n-Tx_n\|)+\varphi(\|y_n-Sy_n\|)]}{1-\delta}\end{aligned}$$

لكن $\{x_n\}$ متقاربة نحو نقطة ثابتة مشتركة p لـ T,S ومنه :

$$\|x_n-Tx_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad \text{و} \qquad \|y_n-Sy_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

والتابع φ مستمر ومنه : $\varphi(\|y_n-Sy_n\|)\to 0 \quad , \quad \varphi(\|x_n-Tx_n\|)\to 0$

وبالاعتماد على القضية (1) نستنتج أن :

$$\|p-q\|\le\frac{\varepsilon+\eta}{1-\delta}\ .$$

ملاحظة (1): في التكرارية (8) إذا وضعنا $T=S$ نحصل على التكرارية التالية :

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)y_n+\alpha_nTy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n \qquad (22)\end{aligned}$$

وتسمى تكرارية SP بمرحلتين .

نتيجة (3) : ليكن X فضاء باناخ و $B\neq\phi$ مجموعة جزئية,مغلقة ,محدبة من X وليكن $\varepsilon>0$ إذا كان $T:B\to B$ تطبيق يحقق الشرط (10) وله نقطة ثابتة p و $\breve{T}$ المؤثر التقريبي لـ T وله نقطة ثابتة q و $\{x_n\},\{u_n\}$ تكراريتين معرفتين بـ(22) الموافقتين للمؤثرين T و $\breve{T}$ على الترتيب حيث $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ متتاليتان من الأعداد الحقيقية الموجبة في $[0,1)$ وأن $\beta_n\le\alpha_n$ و $\sum_n\alpha_n=\infty$

عندئذٍ من أجل : $p\in F(T)$ و $q\in F(\breve{T})$ فإن : $\|p-q\|\le\dfrac{2\varepsilon}{1-\delta}$

البرهان : ينتج من النظرية (7) بوضع $T=S$.

وبإجراء مقارنة بين نتائج هذا البحث ونتائج سابقة أنظر [12] , [15] نجد :

1- في البحث [12] استخدم s,oltuz تكرارية Ishikawa المولدة بمؤثر شبه مقلص T, نقطته الثابتة p لإيجاد النقطة الثابتة q لمؤثره التقريبي $\breve{T}$ حيث $\|Tx-\breve{T}x\| \le \varepsilon$ واستنتج أن $\|p-q\| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\delta}$

وفي [15] تم استخدام التكراريتين SP, Noor للحصول على نتائج مشابهة .

2- في هذا البحث استخدمنا التكرارات الثلاثة : Suantai , CR , (8) المولدة بمؤثرات شبه مقلصة (Contractive- Like operators) لحساب النقط الثابتة لمؤثراتها التقريبية فحصلنا على نتائج مشابهة إنما بقيم وشروط مختلفة وتوصلنا إلى ما يلي :

- في تكرارية Suantai أثبتنا أن المسافة بين النقطة الثابتة p للمؤثر T والنقطة الثابتة q لمؤثره التقريبي $\breve{T}$ هي : $\|p-q\| \le \dfrac{3\varepsilon}{1-\delta}$ بعد وضع شروط إضافية على وسطاء التكرارية المستخدمة , وبرهنا أن النتيجة التي توصل إليها S,oltuz في [12]هي حالة خاصة من هذه النتيجة وذلك من اجل : $c_n = b_n = \gamma_n = 0$

- إذا استخدامنا تكرارية Suantai وفقاً لشروط النظرية (4) بدلاً من تكرارية Ishikawa وفقاً لشروط S,oltuz في [12] علينا تصغير قيمة εلنحصل على المسافة ذاتها بين p و q.

- إذا اعتبرنا $c_n = b_n = 0$ عندئذٍ تتحول تكرارية Suantai إلى تكرارية Noor ونحصل على صيغة الترابط ذاتها التي تم التوصل إليها في المرجع [15] .

- برهنا ضمن شروط مفروضة على وسطاء التكرارية CR أن المسافة بين النقطة الثابتة للمؤثر T ومؤثره التقريبي $\breve{T}$ تحقق الشرط $\|p-q\| \le \dfrac{4\varepsilon}{1-\delta}$.

- في النظرية (7) برهنا أن ترابط المعطيات يمكن تمديده إلى تكراريات مولدة بمؤثرين شبه مقلصين واستنتجنا أن صيغة الترابط بين معطيات التكرارية SP (بمرحلتين) تمثل حالة خاصة من هذه النظرية وذلك بوضع $T = S$.

فيما يلي نحل مثالين تتضح من خلالهما أهمية تطبيق النتائج السابقة لإيجاد النقط الثابتة . أما فكرة المثالين فقد تم استنباطها من المثال 4.1 في المرجع [12] .

مثال (1): ليكن : $T:[0,\infty) \to [0,\infty)$ معرف بـ :

$$Tx = \begin{Bmatrix} 0 & if \quad x \in [0,2] \\ 0,5 & if \quad x \in (2,\infty) \end{Bmatrix}$$

وليكن :

$$\varphi:[0,\infty) \to [0,\infty) \qquad : \qquad \varphi(t) = t$$

يبرهن بسهولة أنه من أجل $\delta = 0,4$ فإن Tمؤثر شبه مقلص وله نقطة ثابتة $p = 0$

نعرف التطبيق : $\breve{T}:[0,\infty) \to [0,\infty)$ بالشكل :

$$\breve{T}x = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}x + 1 & if \quad x \in [0,2] \\ 1 & if \quad x \in (2,\infty) \end{Bmatrix}$$

النقطة الثابتة لـ $\breve{T}$ هي $q=2$

من أجل : $x_0=0$, $\alpha_n=\beta_n=\gamma_n=\dfrac{1}{n+2}$ نطبق كل من التكراريتين (2) و CR على $\breve{T}$.

وباستخدام برنامج اكسيل نحصل على القيم التالية :

رقم العملية	التكرارية CR	تكرارية Suantai
1	1.34375000	1.40625000
10	1.99950844	1.92259885
20	1.99999966	1.96076835
100	2	1.97611395

من الواضح أن كل من التكراريتين تتقارب نحو النقطة $q=2$ والبعد بين النقطتين الثابتتين لـ T و $\breve{T}$ هو 2 في كلتا التكراريتين , لكن إذا لم نكن نعلم قيمة النقطة الثابتة q لـ $\breve{T}$ أو لم نقم بحسابها فاننا نتمكن من تقدير قيمة تقريبية لها بالإعتماد على النتائج التي توصلنا إليها .

فباستخدام النظرية (4) ومن أجل $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$ نجد : $\|p-q\|\le\dfrac{3(\frac{2}{3})}{1-0,2}=2,5$

وباستخدام النظرية (5) ومن أجل $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ نجد : $\|p-q\|\le\dfrac{4(\frac{1}{2})}{1-0,2}=2,5$

وكما هو ملاحظ فإنه كلما اخترنا T قريباً من $\breve{T}$ نحصل على قيمة أدق لـ q

مثال (2) :

بفرض : $T\ ,S:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ حيث :

$$Sx=\begin{cases}1 & if\quad x\in[0,2]\\ 0,6 & if\quad x\in(2,\infty)\end{cases}\qquad,\qquad Tx=\begin{cases}1 & if\quad x\in[0,2]\\ 0,8 & if\quad x\in(2,\infty)\end{cases}$$

وليكن $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ بحيث $\varphi(t)=t$ عندئذٍ من أجل $\delta=0,5$ فإن T,S يحققان الشرط (10)

ولهما نقطة ثابتة مشتركة : $p=q=1$

نعتبر المؤثرين $\breve{T}\ ,\ \breve{S}$ حيث :

$$\breve{S}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & if\quad x\in[0,2]\\ 1 & if\quad x\in(2,\infty)\end{cases}\qquad,\qquad \breve{T}x=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{4} & if\quad x\in[0,2]\\ 0 & if\quad x\in(2,\infty)\end{cases}$$

كما هو واضح للتطبيقين نقطة ثابتة مشتركة $p^*=q^*=1.5$

من أجل $x_0=0$, $\alpha_n=\beta_n=\dfrac{1}{n+2}$ نعين التكرارية المولدة بـ $\breve{T},\breve{S}$ وباستخدام برنامج اكسيل نحصل على القيم التالية :

رقم العملية	التكرارية (8)
1	0.75000000
10	1.38691484
50	1.48078997
100	1.49132410

أما إذا استخدمنا النظرية (7) فنجد من أجل : $\eta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ أن :

$$\left\| P - P^{*} \right\| \le \frac{0.5}{0.5} = 1$$

الاستنتاجات والتوصيات :

برهنا في هذا البحث على صحة ثلاث نتائج جديدة حول ترابط المعطيات في تكراريات مستخدمة في عمليات التقريب ومولدة بمؤثرات شبه مقلصة نوجزها بالآتي :

1- تم في النظرية (4) إيجاد الصيغة التي تربط بين معطيات تكرارية Suantai للمؤثرات شبه المقلصة واستنتجنا منها صيغة الترابط في تكرارية Noor المبرهنة في المرجع [15] وأيضاً صيغة الترابط في تكرارية Ishikawa المبرهنة بالمرجع [12] .

2- تم في النظرية (5) إيجاد صيغة الترابط في تكرارية CR .

3- تم في النظرية (7) إيجاد الصيغة التي تربط بين معطيات تكرارية تحوي مؤثرين شبه مقلصين S,T واستنتجنا منها علاقة الترابط في تكرارية SP بمرحلتين وذلك في الحالة التي يكون فيها S=T .

تمكننا هذه النتائج من إيجاد النقط الثابتة لمؤثرات محددة بعد تقريبها بمؤثرات شبه مقلصة ولها نقطة ثابتة على الأقل .

نقترح متابعة البحث وإيجاد شروط ترابط المعطيات لتكراريات أخرى مولدة بمؤثرات جديدة واستنتاج الصيغ الموافقة لها.

المراجع:

1-Khan,S,H.: *Fixed points of Quasi-Contractive type operators in normed spaces by a three –step iteration process* ,Proceedings of the world congress on engineering 2011, vol. 1,WCE 2011,London,U.K, July 6-8-2011.

2-Noor,M.R:*New approximation schemes for general variational inequalities* ,Journal of mathematical analysis and applications, vol.251,no.1, 217-229(2000).

3-Ishikawa S.: *Fixed points by a new iteration method*,proceedings of the American mathematical society,vol.44,no.1,147-150(1974).

4-Mann,W.R: *Mean value methods in iteration*, Proc . Amer .Math . Soc .4(1953) , 506-510 .

5-Chugh,R.Kumar,V. *Strong convergence of SP iterative scheme for Quasi-contractive operators* ,International Journal of computer A pplications (0975)-8887) ,Vol.31 ,No.5,October 2011 .

6- Chugh,R.Kumar,V ,Sanjay.k: *Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces* ,American journal of computational mathematics, 2012,2,345-357 .

7-Raphael,P.Pulickakunel.S, *Fixed point theorems in normed linear spaces using a generalized* Z-Type condition : Kragujevac journal of mathematics , vol.36, No.2,(2012) , 207-214 .

8- Zamfirescu.T : *Fix point theorems in metric spaces* ,Archiv der Mathematic, vol.23, No.1, 292-298 (1972).

9-Berinde.V : On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of qoasi contractive operators: Acta Math, Univ. comenianae ,vol.73,no.1,pp.119-126(2004).

10 -Imoru.C.O,and Olatinwo .M.O : On the stability of picard and Mann iteration processes ,Carpathian Journal of mathematics, vol.19,no.2 pp.155-160(2003).

11-Berinde.V,Iterative approximation of fixed points,Springer-Varlgg, Berlin-Heidelberg (2007).

12-Soltuz.S.M,Grosan.T, Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive –Like operators ,Fixed point theory and applications ,Vol.2008,Article ID 242916,7pages.doi:10.1155,242916, /2008/.

13-Olaleru.J.O,Akewe.H,On multistep iterative scheme for approximating the common fixed points of generalized contractive-Like operators, International journal of mathematics and mathematical sciences,vol.2010,(2010),Article ID 530964m,11 pages.

14- Soltuz .S.M,: Data dependence for Ishikawa iteration , Vol.25,149-155. ,(2004)

15- Chugh,R.Kumar,V. Data dependence of Noor and SP iterative schemes when dealing with Quasi contractive operators ,International of computer applications,(0975-8887),Vol.40,No.15,(2012).