مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

دراسة أعداد سالم الصغرى في المجموعة $T \cap T_0$

الدكتور حسن سنكري*
ديانا أحمد**

(تاريخ الإيداع 10 / 6 / 2013. قُبِل للنشر في 11 / 11 /2013)

□ ملخّص □

في هذا البحث استطعنا التوصل إلى طريقة تعطي أعداد سالم θ_m^{ε} انطلاقا من أعداد بيزو θ و قدمنا مجموعة من الأمثلة، كما تمكنا من اكتشاف بعض أعداد سالم الصغرى الجديدة , بالإضافة إلى أننا درسنا مجموعة أعداد سالم الواقعة في مجال حقيقي، و توصلنا الى الشرط الواجب أن تحققها أمثال منشورتايلور في جوار الصفرللدالة الكسرية f المتعلقة بعدد بيزو θ حتى ينتج عنه أعداد سالم تقع في مجال حقيقي مفروض $[x, y]$ حيث $[x, y] \subseteq T_0$ و $T_0 = \left]1, \theta^*\right[$

الكلمات المفتاحية : أعداد بيزو – أعداد سالم – عدد ليمار

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

ON SMALL SALEM NUMBERS IN SET $T \cap T_0$

Dr.Hasan Sankari*
Diana Ahmad**

(Received 10 / 6 / 2013. Accepted 11 / 11 /2013)

□ ABSTRACT □

In this research, we have put an algorithm which gives Salem Numbers θ_m^{ε} starting from

Pisot Number θ and we have been able to give a few examples and discover some new Small Salem Numbers. Beside that we have studied the intersection of Salem Numbers with a real interval and put the condition that must be provided by the coefficients of the expansion of the fractional function f related to a Pisot Number θ in order to give Salem Numbers in a certain interval $[x, y]$ where $[x, y] \subseteq T_0$ and $T_0 = \left]1, \theta^*\right[$.

Keywords: Pisot Numbers – Salem Numbers –Lehmer Number .

* **Assosiate Professor, Department of mathematics, Faculty of Science ,Tishreen University, Lattakia, Syria**
** **Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Science ,Tishreen University , Lattakia, Syria.**

مقدمة :

إن الغاية من هذا البحث هي وضع طريقة تعطي أعداد سالم انطلاقاً من عدد بيزو، توظيف هذه الخوارزمية من أجل الحصول على بعض العناصر الصغرى في مجموعة أعداد سالم T.

في حين تمكن SIEGEL [6] من تحديد أصغر عدد بيزو θ^* و هو الجذر الحقيقي الأكبر من الواحد لكثيرة الحدود $z^3 - z - 1$ لازال الغموض يحيط بأعداد سالم و عناصرها الصغرى فيما سيأتي سندرس المجموعة $T \cap [x, y]$ حيث $[x, y] \subseteq T_0$ و $T_0 =]1, \theta^*[$ وسنبرهن أن $\tau \in [x, y]$ عندما $r_n(x) \le u_n \le r_n^*(y)$.

تعريف (1): ندعو عدداً ما عدداً جبرياً (algebraic number) إذا كان جذراً لكثيرة حدود بأمثال نسبية [1] .

$$P(z) \in Q[z]$$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 ; a_i \in Q$$

تعريف (2) : كثيرة الحدود الأصغرية (minimal polynomial) المتعلقة بعدد جبري z هي كثيرة الحدود ذات الدرجة الأقل و غير القابلة للاختزال، والتي تقبل z جذراً لها [1].

تعريف (3) : ندعو عدداً ما جبرياً صحيحاً (algebraic integer) إذا كان جذراً لكثيرة حدود واحدية بأمثال صحيحة [1]

$$P(z) \in Z[z]$$

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 ; a_i \in Z$$

تعريف (4) : مرافقات العدد الجبري (conjugate) هو أي جذر لكثيرة الحدود الأصغرية المتعلقة بهذا العدد الجبري .

مثال (1) : إن كل عدد صحيح α هو عدد جبري صحيح كثيرة الحدود الأصغرية المتعلقة به هي $z - \alpha$

مثال (2) : ان النسبة الذهبية $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ هي عدد جبري صحيح كثيرة الحدود الاصغرية المتعلقة به هي $z^2 - z - 1$

تعريف (5) : نقول عن عدد حقيقي $\theta > 1$ أكبر من الواحد إنه عدد بيزو (Pisot number) إ ذا كان عددا جبريا صحيحا جميع مرافقاتهتقع داخل دائرة الواحدة .

مثال (3) : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ هو عدد بيزو له مرافق وحيد $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ نلاحظ $|\phi| > 1$ و $|\psi| < 1$.

يرمز لمجموعة اعداد بيزو بالرمز S و يرمز لأسرة كثيرات الحدود الاصغرية المتعلقة بأعداد بيزو بالرمز $\mathcal{S}$.

تعريف (6) : نقول عن عدد حقيقي $\tau > 1$ إنه عدد سالم (salem number) إذا كان عدداً جبرياً صحيحاً جميع مرافقاته تقع داخل دائرة الواحدة أو عليها بحيث يوجد على الاقل جذر واحد يقع على C .

يرمز لمجموعة أعداد سالم بالرمز T، و يرمز لكثيرات الحدود الاصغرية المتعلقة بعدد سالم بالرمز $\Im$.

تعريف (7) : نقول عن عدد سالم $\tau > 1$ إنه عدد أصغري (Small Salem Number) إذا كان $\tau < 1.3$. [2]

تعريف (8) : كثيرة الحدود العكسية (reciprocal polynomial) ذات الدرجة k هي كل كثيرة حدود تحقق

$$[2]\ R(z)=z^{k}R(z^{-1})$$

تعريف (9) : كثيرة الحدود الدورانية (cyclotomic polynomial) هي كثيرة حدود جميع جذورها تقع على دائرة الواحدة لها الشكل :

$$[2]\ P(z)=z^{n}+z^{n-1}+z^{n-2}+............+z+1$$

$\theta\in S$ عدد بيزو و لتكن P كثيرة الحدود الأصغرية المتعلقة به لها الدرجة s ، ولتكن $Q(z)=z^{s}P(z^{-1})$ عندئذ $Q(0)=1$ و Q تملك معاملات صحيحة و جذراً واحداً فقط داخل دائرة الواحدة هو θ^{-1} .

إذا كانت $A(z)$ كثيرة حدود بمعاملات صحيحة و غير مطابقة ل $Q(z)$، و تحقق العلاقتين $A(0)>0$ و $|A(z)|\le|Q(z)|$ من أجل $|z|=1$ عندئذ $f=\dfrac{A}{Q}$ سندعوها الدالة الكسرية المرفقة بالعدد θ .

يمكن أن تؤخذ $A=(\text{sgn}(0))P$ (نستثني كون $Q(z)$ دالة تربيعية عكسية من النمط $Q(z)=1-qz+z^{2}$ حيث $A(z)=1$ هو اختيار مناسب في هذه الحالة) .

سنرمز لأسرة كثيرات الحدود f من هذا النمط بالرمز F .

لقد برهن $(R.Salem)$ في [3]أن كل عدد بيزو هو نهاية لمتتالية من أعداد سالم، و من الجهتين، و استخدم في ذلك كثيرات حدود من النمط $R_m(z)=z^{m}P(z)+\varepsilon Q(z)$ ثم تمكن $(D.Boyd)$ في [2]من إثبات أنهو من أجل كل عدد سالم τ كثيرة الحدود الاصغرية المتعلقة به R يوجد كثيرة حدود P_0 متعلقة بعدد بيزو θ بحيث :

$$R(z)=z^{m}P_0(z)+\varepsilon z^{k}P_0(z^{-1})$$

سنبدأ من حيث انتهى سالم و سنستفيد من الدراسة السابقة في مناقشة الحالتين $\varepsilon=1$ و $\varepsilon=-1$للحصول على خوارزمية تعطي أعداد سالم انطلاقا من عدد بيزو سنجد أننا دوما نحصل على عدد سالم في الحالة الأولى $(\varepsilon=1)$ و سنحدد الشروط التي تعطي أعداد سالم في الحالة الثانية $(\varepsilon=-1)$ بالإضافة إلى توظيف كل ما تقدم من اجل الحصول على مجموعة من

أعداد سالم الصغرى بعد صياغة الشرط الذي يعطي أعداد سالم أصغر من عدد بيزو الناتجة عنه.

إن أسرة الدوال f تتمتع بالخواص التالية بحسب $[4],[1]$.

- f دالة هولومورفية في القرص الواحدي باستثناء القطب البسيط $1>\theta^{-1}$ (1)
- $|f(z)|\le 1$ على دائرة الواحدة .
- $f(z)=u_0+u_1z^{1}+u_2z^{2}+..........+u_nz^{n}+........$ من أجل $|z|<\theta^{-1}$ حيث $u_i\in Z$ و $u_0\ge 1$.

لقد أثبت DUFRESNOYET.PISOTفي العام 1955 $[4]$ أن متتالية المعاملات $\{u_n\}$لعناصر C هي متتالية مقيدة بشروط تحددها جملة المتراجحات :

- $1\le u_0$
- $u_0^{2}-1\le u_1$ (2)
- $w_n(u_0,u_1,.......,u_{n-1})\le u_n\le w_n^{*}(u_0,u_1,.......,u_{n-1})$ حيث $n\ge 2$

إن المتراجحات $w_n(u_0,u_1,.......,u_{n-1})\le u_n\le w_n^{*}(u_0,u_1,.......,u_{n-1})$ حيث $n\ge 2$تجعل u_n مقيدة الى مجال محدود باستثناء الحالة التي يكون فيها $u_0=1, w_2^{*}=\infty$ $[4]$.

لكي نحدد w_n, w^*_n نتبع مايلي[4] :

لتكن $D_n(z), E_n(z)$ كثيرتي حدود من النمطين :

$$D_n(z) = -z^n + d_1 z^{n-1} + ... + d_n \qquad (3)$$

$$E_n(z) = -z^n D_n(z^{-1}).$$

عندئذ $E_n(0) = 1$ حيث أن $d_0, d_1, ..., d_n$ تحدد بحيث يتطابق أول n حد من منشور D_n / E_n مع مثيلاته في منشور f كمايلي :

$$D_n / E_n = u_0 + u_1 z + ... + w_n(u_0, u_1, ..., u_{n-1}) z^n + ... \qquad (4)$$

بشكل مشابه نعرف :

$$D_n^*(z) = z^n + d^*_1 z^{n-1} + ... + d_n^*$$

$$E_n^*(z) = z^n D_n^*(z^{-1}). \qquad (5)$$

على أن تتحدد المعاملات $d_0^*, d_1^*, ..., d^*_n$ بحيث يتطابق أول n حد من منشور D^*_n / E^*_n مع مثيلاته في منشور f كمايلي :

$$D^*_n / E^*_n = u_0 + u_1 z + ... + w^*_n(u_0, u_1, ..., u_{n-1}) z^n + ... \qquad (6)$$

لقد أثبت DUFRESNOYET.PISOT في [4] أن D_n, D_n^* تعطى بعلاقات التدرج التالية :

$$D_{n+1}(z) = (1+z) D_n(z) - (u_n - w_n)(u_{n-1} - w_{n-1})^{-1} z D_{n-1}(z) \qquad (7)$$

$$D^*_{n+1}(z) = (1+z) D^*_n(z) - (w^*_n - u_n)(w^*_{n-1} - u_{n-1})^{-1} z D^*_{n-1}(z) \qquad (8)$$

تتحقق المساواة في المتراجحة $w_n \le u_n$ فقط اذا كان $f = D_n / E_n$.

بشكل مشابه ان $u_n = w^*_n$ فقط اذا كان $f = D^*_n / E^*_n$.

إن كلا من D_n, D_n^* بشكل عام يمكن أن تملك أمثالاً نسبية، و ليس من الضروري أن تكون أمثالها صحيحة .

ملاحظة : لقد أوضح سنكري في[1]أن حساباً بسيطاً يمكن أن يبين أن D_1, D_2 لهما الصيغتان الآتيتان :

$$D_1(z) = u_0 - z \ , E_1(z) = 1 - u_0 z$$

$$D^*_1(z) = u_0 + z \ , \ E^*_1(z) = 1 + u_0 z$$

$$D_2(z) = u_0 + \frac{u_1}{1+u_0} z - z^2 \ , E_2(z) = 1 - \frac{u_1}{1+u_0} z - u_0 z^2$$

$$D^*_2(z) = u_0 + \frac{u_1}{1-u_0} z + z^2 \ , \ E^*_2(z) = 1 + \frac{u_1}{1-u_0} z + u_0 z^2$$

في التطبيق الحسابي كثيراً ما نستخدم $F_n(z), F_n^*(z)$ بدلا من D_n, D_n^* و هما كثيرتا حدود معرفتان كالتالي :[2]

$$F_n(z) = f_{n,0} z^n + ... + f_{n,n} \qquad (9)$$

$$F_n^*(z) = f^*_{n,0} z^n + ... + f^*_{n,n} \qquad (10)$$

حيث أن $f_{n,0}, f_{n,1}.........., f_{n,n}$ هي أعداد صحيحة لا تملك قاسماً مشتركاً أصغراً و بحيث إن $D_n = -F_n / f_{n,0}$.

بشكل مشابه تعرف معاملات F_n^* [2] .

عندئذ إن $w_n = \dfrac{W_n}{f_{n,0}}$ و $w^*{}_n = \dfrac{W_n{}^*}{f^*{}_{n,0}}$.

إن علاقات التدرج المتعلقة ب F_n, F_n^* و صيغ W_n, W_n^* تستنتج بسهولة على نمط العلاقات السابقة .

لا بد من الإشارة إلى أنه ليس من الضروري حساب F_n, F_n^* في كل مرحلة، حيث يمكن الاستفادة من علاقات التدرج الآتية :

$$w_{n+1}^* - w_{n+1} = 4(w_n^* - u_n)(u_n - w_n)(w_n^* - w_n)^{-1} \qquad [5]\,(11)$$

في العام 1978 أكمل الرياضي الأمريكي $D.Boyd$ في $[5]$ عمل DUFRESNOYET.PISOT بوضع شروط تعطي أعداد بيزو ضمن مجالات محددة $S\bigcap[x, y]$.

يمكن أن نلخص هذ الشروط على الشكل التالي :

ليكن $[x, y]\subset[1,\infty)$ و لتكن $f \in C$ بحيث $\theta\in[x, y]$ عندئذ سنرى أن $\{u_n\}$ تحقق بالإضافة الى مجموعة الشروط (2) شروطاً إضافية هي :

$$v_n(x; u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \le u_n \le v^*{}_n(y; u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \qquad (12)$$

حيث :

$$w_n + (u_{n-1} - w_{n-1})(1+y)y^{-1}D_n(y) / D_{n-1}(y) = v_n^*(y) \qquad (13)$$

إن v_n^* تحقق علا قة التدرج التالية :

$$v_{n+1}^* - w_{n+1} = (1+y)^2 y^{-1}(v_n^* - u_n)(u_n - w_n) / (v_n^* - w_n) \qquad (14)$$

و كذلك الأمر فإن :

$$w_n^* - (w_{n-1}^* - u_{n-1})(1+x)x^{-1}D_n^*(x) / D_{n-1}^*(x) = v_n(x) \qquad (15)$$

إن v_n تحقق علاقة التدرج التالية :

$$w^*{}_{n+1} - v_{n+1} = (1+x)^2 x^{-1}(w_n^* - u_n)(u_n - v_n) / (w_n^* - v_n) \qquad (16)$$

لاحقاً في العام 2009 درس سنكري ($H.Sankari$) في العمل [1] مستفيداً من كثيرات الحدود السابقة المجموعة $S^{(3)}\bigcap S_0$ حيث $S^{(3)}$ هي المجموعة المشتقة من المرتبة الثالثة لمجموعة أعداد بيزو و $S_0 = \{\theta\in S; \theta < 1+\sqrt{2}\}$ و تمكن من إثبات أن $\min(S^{(3)}) = 1+\sqrt{2}$.

و في الدراسة الآتية سنتناول أعداد سالم و نضع الشروط التي تحدد $T\cap T_0$ مستفيدين من الطريقة التي عمل بها كل من DUFRESNOYET.PISOT و $H.Sankari$.

أهمية البحث و أهدافه :

يهدف هذا البحث إلى الإجابة على بعض الأسئلة المتعلقة بمجموعة أعداد سالم, وأحد أهم هذه الأسئلة محاولة إيجاد طريقة نحصل من خلالها على أعداد سالم في مجال ما، و السؤال الآخر الذي لا يقل شأناً عن سابقه هو مسألة البحث عن وجود عدد سالم الأصغري، و من ثم تعينه في حال وجوده. و هاتان المسألتان تعدان في غاية الاهمية بالنسبة للعاملين في هذا المجال .

طرائق البحث و مواده :

إن هذا البحث هو موضوع رياضي مجرد تم إنجازه بالإعتماد على مراجع علمية تخصصية و بحوث علمية منشورة في دوريات عالمية .

النتائج و المناقشة :

أولاً : خوارزمية إيجاد أعداد سالم و اكتشاف بعض أعداد سالم الصغرى :

بداية سنتعرف على بعض الخصائص التي تتميز بها مجموعة أعداد سالم و كثيرات الحدود الأصغرية المتعلقة بها من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة (1):

لتكن $R(z)$ كثيرة حدود أصغرية متعلقة بعدد سالم $\tau \in T$ عندئذ تكون $R(z)$ كثيرة حدود عكسية ذات درجة زوجية كل جذورها تقع على دائرة الواحدة، باستثناء الجذر τ ؛حيث $|\tau| > 1$ و الجذر $\frac{1}{\tau}$ حيث $\left|\frac{1}{\tau}\right| < 1$.

الإثبات : بما أن $R(z)$ كثيرة حدود أصغرية متعلقة بعدد سالم τ فإنها غير قابلة للاختزال و تقبل على الأقل جذراً α يقع على دائرة الواحدة C ، بالتالي هذا الجذر لا يمكن أن يكون ± 1 (والإ فإن $z \pm 1$ سيكونان عاملين لكثيرة الحدود $R(z)$) .

أي α هو جذر تخيلي مرافقه $\overline{\alpha}$ هو جذر ل $R(z)$ أيضاً . ولكن بما أن $|\alpha| = 1$ فإن $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, مما تقدم نجد $R(\alpha) = R(\frac{1}{\alpha}) = 0$ ومنه $R(z)$ هي كثيرة حدود عكسية .

بما أن σ جذر ل $R(z)$ فإن $\frac{1}{\sigma}$ هو جذر لها أيضاً .و بما أن τ هو الجذر الوحيد ل $P(z)$ الواقع خارج دائرة الواحدة فإن $\frac{1}{\tau}$ هو الجذر الوحيد الواقع داخل دائرة الواحدة و اما باقي الجذور فهي جذور واقعة على دائرة الواحدة تشكل أزواجاً مترافقة عقدياً . أي أن $R(z)$ ذات درجة زوجية $k = 2d$.

لتكن $p \in S$ كثيرة حدود أصغرية متعلقة بعدد بيزو درجتها، حيث k $p(\theta) = 0$ ،و $\theta > 1$ شريطة أن لا تكون p كثيرة حدود تربيعية عكسية لقد أثبت سالم في [3] أن :

$$R_m(z) = z^m P(z) + \varepsilon Q(z) \qquad (17)$$

هي كثيرة حدود عكسية تملك $k+m-1$ جذراً على دائرة الواحدة، و فيما يلي سسنناقش الحالتين $\varepsilon = 1$ و $\varepsilon = -1$.

مبرهنة (2) :

إن كثيرة الحدود $R_m(z)$ أيا تكن $m \in Z$ (المعرفة بالعلاقة (17)) تعرف عدد سالم في حالة $\varepsilon = 1$، و إن $R_m(z)$ تعرف عدد سالم عندما $m > m^*(P) = k - 2\,{P'(1)}/{P(1)}$ في حالة $\varepsilon = -1$.

الإثبات :

بما أن p هي كثيرة حدود واحديةفإنها تحقق أن $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ وبما أن $\theta > 1$ هوجذرها الحقيقي الوحيد الأكبر من الواحد لذا $p(1) < 0$ (إذا لم تكن كذلك عندئذ و بما أن $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ ستكون $p'(\theta) = 0$ و $p(\theta) = 0$ أي أن θ جذر مضاعف و هذا يناقض تعريف θ) .

ومنه نجد أن $R_m^+(1) = (1)^m p(1) + (1)^k p(1) < 0$ و $\lim_{z\to\infty} R_m^+(z) = \infty$ منه فإن $R_m^+(z)$ تملك دوما جذراً $\theta_m^+ > 1$ بالتالي إن ل $R_m(z)$ بالتحديد $k+m-1$ جذراً على دائرة الواحدة و جذراً وحيداً حقيقياً خارج دائرة الواحدة فهي إذاً تعرف عدد سالم $\theta_m^+ > 1$.

من ناحية ثانية $R_m^-(1) = 0$ و بالتالي حتى تملك $R_m^-(z)$ جذراً $\theta_m^- > 1$ يجب أن تكون $R_m^{'}(1) < 0$ و لكن :

$R_m^{-\prime}(z) = mz^{m-1}p(z) + z^m p'(z) - kz^{k-1}p(z^{-1}) - z^k p'(z^{-1})$ و بالتالي :

$R_m^{-\prime}(1) = mp(1) + p'(1) - kp(1^{-1}) - p'(1^{-1}) < 0$ ولكن $-p'(1^{-1}) = p'(1)$ و $p(1) < 0$ أي أن الشرط يصبح بالشكل التالي :

$$R_m^{-\prime}(1) = mp(1) + p'(1) - kp(1^{-1}) + p'(1) < 0$$

$$mp(1) < kp(1) - 2p'(1)$$

$$m^*(p) = k - 2\,{p'(1)}/{p(1)} < m \ .$$

و منه عندما $m^*(p) < m$ نجد أن $R_m^-(z)$ تملك $k+m-1$ جذراً على دائرة الواحدة و جذراً وحيداً حقيقياً خارج دائرة الواحدة فهي إذاً تعرف عدد سالم $\theta_m^- > 1$ □

بالتالي فمن أجل $m \le m^*(p)$ تصبح $R_m^-(z)$ كثيرة حدود دائرية لها جذر حقيقي $\theta_m^- = 1$.

نتيجة (1) : $\theta_m^\varepsilon < \theta$ عندما و فقط عندما $\varepsilon P(0) > 0$.

الإثبات : وجدنا أن لكثيرة الحدود $R_m^\varepsilon(z)$ جذراً حقيقياً واحداً أكبر من الواحد على الأكثرو يكون هذا الجذر أصغر من θ إذا و فقط إذا كان $R_m^\varepsilon(\theta) > 0$.

بتعويض θ نجد أن :

$$R_m^{\varepsilon}(\theta)=\varepsilon\theta^k p(\theta^{-1})$$

وبالتالي : $R_m^{\varepsilon}(\theta)>0$ إذا وفقط إذا كان :

$$\varepsilon\theta^k p(\theta^{-1})>0$$

بفرض P تملك جذرا β في المجال $\left[0,\theta^{-1}\right]$ إن جداء جذور P يعطي الحد الثابت في P .

إن :

$$\theta_1\theta_2\theta_3........\theta_{k-2}\beta\theta\in Z$$

لأن أمثال P هي أعداد صحيحة و في حال انتمت β إلى المجال $\left[0,\theta^{-1}\right]$ فانها تكتب على الشكل $1/\mu$ ،حيث $\mu>\theta$ عندئذ $\left|\theta_1\theta_2\theta_3........\theta_{k-2}\right|<1$ بما أن مرافقات θ تقع داخل دائرة الواحدة، و $|\mu\theta|<1$ أي أن $\left|\theta_1\theta_2\theta_3........\theta_{k-2}\beta\theta\right|<1$ وهذا تناقض .

مماسبق نجد أن :

$$\operatorname{sgn} p(0)=\operatorname{sgn} p(\theta^{-1})$$

أي أن $\theta_n^{\varepsilon}<\theta$ إذا و فقط كان $\varepsilon p(0)>0$.

□

باستبدال θ_n^{ε} ب $\theta_{n+1}^{\varepsilon}$ نحصل على سلسلة مطردة (متزايدة) θ_n^{ε} و محدودة من الأعلى تنتهي الى θ .

إيجاد بعض أعداد سالم الصغرى :

ملحوظة : لقد أجرينا الحسابات الآتية باستخدام لغة البرمجة (MATLAB).

لقد ورد في [7] بعض الحدوديات التي تعطي أعداد بيزو سنستخدم هذه الحدوديات للحصول على أعداد سالم و بالأخص أعداد سالم صغرى .

إن الحدوديات التي جذورها أعداد لبيزو هي الحدوديات من النمط :

$$z^k(z^2-z-1)+z^2-1;(k=1,2,3,......)$$

$$z^k-\frac{z^{k+1}-1}{z^2-1};(k=3,5,7,.....)$$

$$z^k-\frac{z^{k-1}-1}{z-1};(k=3,5,7,.....)$$

1) نأخذ الحدودية من النمط $P_k(z)=z^k-\dfrac{z^{k-1}-1}{z-1};(k=3,5,7,.....)$

سنرمز لأعداد بيزو المتعلقة بالحدودية $P_k(z)$ بالرمز θ_k و سنرمز لكثيرة الحدود الناتجة عنها وفق الخوارزمية السابقة بالرمز $R_{k,m}^{\varepsilon}(z)$ و لعدد سالم الناتج عنها بالرمز $\theta_{k,m}^{\varepsilon}$.

من أجل $k=3$ نحصل على z^3-z-1 وهي كثيرة الحدود الأصغرية المتعلقة بأصغر عدد بيزو و يساوي $\theta_3=\theta^*=1.324...$ نوضح أعداد سالم الناتجة عنها في الحالة 2 .

من أجل $k=5$ نحصل على $P_5(z)=z^5-z^3-z^2-z-1$.

إن هذه الحدودية تعطي عدد بيزو $\theta_5=1.534157$.

بما أن $-P_5(0)>0$ إن $\theta^-_{5,m}<\theta_5$.

$P_5(1)=-3$ و $P_5'(1)=-1$ و $m^*(P_1)=k-2\frac{P_1'(1)}{p_1(1)}=5-2\frac{(-1)}{-3}\approx 5-1\approx 4$.

من أجل $m>4$ نحصل على: $R^-_{5,5}(z)=z^{10}-z^8-z^7-z^6+z^4+z^3+z^2-1$ و هي تعطي عدد سالم صغيراً هو $\theta^-{}_{5,5}=1.280638156267760$.

$R^-_{5,6}(z)=z^{11}-z^9-z^8-z^7-z^6+z^5+z^4+z^3+z^2-1$ هذه الحدودية تعطي عدد سالم كبيراً $\theta^-_{5,6}=1.401268367939854$.

من أجل $k=7$ نحصل على الحدودية $P_7(z)=z^7-\frac{z^6-1}{z-1}=z^7-z^5-z^4-z^3-z^2-z-1$ تعطي عدد بيزو $\theta_7=1.590005373901369$.

بما أن $-P(0)>0$ فإن $\theta^-_{m,7}<\theta_2$. $P_7(1)=-5$ و $P_7'(1)=-8$ و $m^*(P_7)=7-2\frac{(-5)}{-8}=7-\frac{10}{8}\approx 5$ بالتالي $m>5$.

$R^-_{7,5}(z)=z^{12}-z^{10}-z^9-z^8+z^4+z^3+z^2-1$ تعطي عدد سالم ليس صغيراً

$\theta^-{}_{7,5}=1.401268367939856>1.3$.

$R^-_{7,4}(z)=z^{11}-z^9-z^8+z^3+z^2-1$ هذه الحدودية تعطي أصغر عدد سالم معروف و هو

$\theta^-{}_{7,4}=\tau^*=1.176280818259920$.

من أجل $k=9$ نحصل على $P_9(z)=z^9-z^7-z^6-z^5-z^4-z^3-z^2-z-1$ تعطي عدد بيزو

$\theta_9=1.607982727928201$.

$-P_9(0)>0$ و منه $\theta^-_{9,m}<\theta_9$ و $P_9(1)=-7$ و $m^*(P)=9-2\frac{(-7)}{(-19)}\approx 8$ سنجد أنه :

$R^-_{9,8}(z)=z^{17}-z^{15}-z^{14}-z^{13}-z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2-1$ تعطي عدد سالم كبيراً $\theta^-_{9,8}=1.577562082409277>1.3$.

سنجد أيضا أن $\theta^-_{9,7}=1.556030191322686$ و $\theta^-_{9,6}=1.516629599519125$

و $\theta^-_{9,5}=1.439398612809280$

ملاحظة : إن الأعداد $\theta^-_{9,6},\theta^-_{9,7},\theta^-_{9,5},\theta^-_{9,8}$ ليست أعداد سالم صغيرة مما يدفعنا للتساؤل حول فعالية الشرط $m>m^*(p)$ في الحقيقية إن السبب وراء فشل الشرط في هذه الحالات ما هو إلا قابلية كثيرة الحدود التي تعطي عدد بيزو للاختزال؛ حيث إنها ليست كثيرة الحدود الأصغرية المتعلقة به .

في حين نجد : $R^-_{9,4}(z)=z^{13}-z^{11}-z^{10}+z^3+z^2-1$ تعطي عدد سالم صغيراً

$\theta^-_{9,4}=1.261230961137142$.

من أجل $k=11$ نجد أن $P_{11}(z)=z^{11}-z^{9}-z^{8}-z^{7}-z^{6}-z^{5}-z^{4}-z^{3}-z^{2}-z-1$ تعطي عدد بيزو $\theta_{11}=1.614306823257151$.

$-P_{11}(0)>0$ أي أن $\theta_{11,m}^{-}<\theta_{11}$.

إن $m^{*}(P_{11})=10$ هذا وسيفشل الشرط $m>m^{*}(P)$ لنفس الأسباب الواردة أعلاه .

و سنجد $\theta_{11,5}^{-},\theta_{11,6}^{-},\theta_{11,7}^{-},\theta_{11,8}^{-},\theta_{11,9}^{-}\theta_{11,10}^{-}\theta_{11,11}^{-}$ هي أعداد سالم كبيرة أيضاً في حين $R_{11,4}^{-}(z)=z^{15}-z^{13}-z^{12}+z^{3}+z^{2}-1$ تعطي عدد سالم صغيراً $\theta_{11,4}^{-}=1.293485953125454$.

من أجل $k>11$ لا نحصل على أعداد سالم صغرى .

2) : نأخذ الحدودية من النمط

$$H_{k}(z)=z^{k}(z^{2}-z-1)+z^{2}-1;(k=1,2,3,......)$$

سنرمز

لأعداد بيزو المتعلقة بالحدودية $H_{k}(z)$ بالرمز α_{k} و سنرمز لكثيرة الحدود الناتجة عنها وفق الخوارزمية السابقة بالرمز $W_{k,m}^{\varepsilon}(z)$ و لعدد سالم الناتج عنها بالرمز $\tau_{k,m}^{\varepsilon}$.

نبدأ ب $k=10$ فنحصل على الحدودية :

$$H_{10}(z)=z^{10}(z^{2}-z-1)+z^{2}-1=z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^{2}-1$$

هذه الحدودية تعطي عدد بيزو $\alpha_{10}=1.611983421246494$.

من أجل $W_{10,m}^{+}$ نحصل على حدوديات تعطي أعداد سالم تحقق العلاقة $\tau_{10,m}^{+}>\alpha_{10}$.

من أجل $W_{10,m}^{-}$ حيث $m=3$

الحدودية $W_{10,3}^{-}(z)=z^{15}-z^{14}-z^{13}+z^{12}-z^{10}-z^{3}+z^{2}+z-1$

لا تعطي عدد سالم .

من أجل $m=4$ نحصل على الحدودية $W_{1o,4}^{-}(z)=z^{16}-z^{15}-z^{14}+z^{12}-z^{10}+z^{6}-z^{4}+z^{2}+z-1$

التي تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{10,4}^{-}=1.483971776596326>1.3$.

نأخذ $k=9$ نحصل على الحدودية : $H_{9}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{9}+z^{2}-1$ تعطي عدد بيزو $\alpha_{9}=1.608128385187389$

من أجل $m=3,2$ نحصل على $W_{9,3}^{-}=z^{14}-z^{13}-z^{12}+z^{11}-z^{9}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$ و $W_{9,2}^{-}=z^{13}-z^{12}-z^{9}+z^{4}+z-1$ كل من هاتين الحدوديتين تعطي عدد سالم كبيراً .

من أجل $m=1$ نحصل على الحدودية $W_{9,1}^{-}(z)=z^{12}-z^{10}-z^{9}+z^{3}+z^{2}-1$

التي تعطينا عدد سالم صغيراً $\tau_{9,1}^{-}=1.230391434407222$.

نأخذ $k=8$ نحصل على الحدودية $H_{8}(z)=z^{10}-z^{9}-z^{8}+z^{2}-1$ التي تعطي عدد بيزو $\alpha_{8}=1.601755861696983$.

من أجل $m=3$ نحصل على الحدودية $W_{8,3}^{-}(z)=z^{13}-z^{12}-z^{11}+z^{10}-z^{8}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$.

و التي تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{8,3}^{-}=1.377674789379378$.

من أجل $m=2$ نحصل على الحدودية $W_{8,2}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^{8}+z^{4}+z-1$.

و التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{8,2}^{-}=1.280638156267756$.

من أجل $m=1$ نحصل على الحدودية $W_{8,1}^{-}(z)=z^{11}-z^{9}-z^{8}+z^{3}+z^{2}-1$.

والتي تعطي أصغر عدد سالم معروف $\tau_{8,1}^{-}=\tau^{*}=1.176280818259920$.

نأخذ $k=7$ نحصل على الحدودية $H_7(z)=z^{9}-z^{8}-z^{7}+z^{2}-1$ تعطي عدد بيزو $\alpha_7=1.591184305667101$.

من أجل $m=1$ لا نحصل على عدد سالم .

من أجل $m=2$ نحصل على الحدودية $W_{7,2}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{7}+z^{4}+z-1$

و التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{7,2}^{-}=1.216391661138263$.

من أجل $m=3$ نحصل على الحدودية $W_{7,3}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^{9}-z^{7}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$ تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{7,3}^{-}=1.337313210201994$.

نأخذ $k=6$ نحصل على الحدودية $H_6(z)=z^{8}-z^{7}-z^{6}+z^{2}-1$ التي تعطي عدد بيزو $\alpha_6=1.591831231941539$

من أجل $m=3$ نحصل على الحدودية $W_{6,3}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{9}+z^{8}-z^{6}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$.

و التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{6,3}^{-}=1.261230961137139$.

من أجل $m=4$ نحصل على الحدودية $W_{6,4}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^{8}-z^{4}+z^{2}+z-1$ و التي تعطي عدد سالم كبير $\tau_{6,4}^{-}=1.383636563406220$.

نأخذ $k=5$ نحصل على الحدودية $H_5(z)=z^{7}-z^{6}-z^{5}+z^{2}-1$ التي تعطي عدد بيزو $\alpha_5=1.545215649732756$.

من أجل $m=4$ نحصل على الحدودية $W_{5,4}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{9}+z^{7}+z^{6}-z^{5}-z^{4}+z^{2}+z-1$.

التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{5,4}^{-}=1.293485953125454$.

ناخذ $k=4$ نحصل على الحدودية $H_4(z)=z^{6}-z^{5}-z^{4}+z^{2}-1$ تعطي عدد بيزو $\alpha_4=1.501594803539087$.

من اجل $m=5$ نحصل على الحدودية $W_{4,5}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{9}+z^{7}+z^{6}-z^{5}-z^{4}+z^{2}+z-1$ تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{4,5}^{-}=1.293485953125454$.

من اجل $m=6$ نحصل على الحدودية $W_{4,6}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^{8}-z^{4}+z^{2}+z-1$ تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{4,6}^{-}=1.383636563406220>1.3$.

نأخذ $k=3$ نحصل على الحدودية $H_3(z)=z^{5}-z^{4}-z^{3}+z^{2}-1$ نحصل منها على عدد بيزو $\alpha_3=1.443268791270372$.

من أجل $m=6$ نحصل على الحدودية $W_{3,6}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^{9}+z^{8}-z^{6}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$ تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{3,6}^{-}=1.261230961137139$.

من أجل $m=7$ نحصل على الحدودية $W_{3,7}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^{10}+z^{9}-z^{7}+z^{5}-z^{3}+z^{2}+z-1$ التي تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{3,7}^{-}=1.337313210201994>1.3$.

من أجل $k=2$ نحصل على الحدودية $H_2(z)=z^4-z^3-1$ التي تعطي عدد بيزو $\alpha_2 = 1.380277569097615$.

من أجل $m=7$ نحصل على الحدودية $W_{2,7}^{-}(z)=z^{11}-z^{10}-z^7+z^4+z-1$. التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{2,7}^{-}=1.216391661138263$.

من أجل $m=8$ نحصل على الحدودية $W_{2,8}^{-}(z)=z^{12}-z^{11}-z^8+z^4+z-1$ التي تعطي عدد سالم صغيراً $\tau_{2,8}^{-}=1.280638156267756$.

من أجل $m=9$ نحصل على الحدودية $W_{2,9}^{-}(z)=z^{13}-z^{12}-z^9+z^4+z-1$ التي تعطي عدد سالم كبيراً $\tau_{2,9}^{-}=1.315914431925947>1.3$.

لقد استطعنا من خلال الحسابات السابقة إيجاد بعض أعداد سالم الأصغرية مثل :

$\tau^*, \theta_{5,5}^{-}, \theta_{9,4}^{-}, \tau_{9,1}^{-}, \tau_{6,3}^{-}=\tau_{3,6}^{-}, \tau_{5,4}^{-}=\tau_{4,5}^{-}, \tau_{2,7}^{-}=\tau_{7,2}^{-}, \tau_{2,8}^{-}=\tau_{8,2}^{-}$ و لكن بقي السؤال عن أصغر عدد في مجموعة أعداد سالم و الذي تصور $Boyd$ بأنه τ^* .

ثانيا : دراسة $T\cap[x,y]$ حيث $[x,y]\subseteq T_0$:

لتكن D_n, D_n^* كثيرتي حدود معرفتين كما في (3) و (5).

بحسب روشيه [4] نجد أن كثيرة الحدود $E_n(z)+z^mD_n(z)$ (18) تملك على الأكثر جذراً واحداً $\tau_{n,m}\geq 1$ في $|z|>1$ و اذا لم يوجد مثل هذا الجذر سناخذ $\tau_{n,m}=1$.

إن الحدودية $E^*{}_n(z)+z^mD^*{}_n(z)$ (19) لها بالضبط جذر و حيد $\tau^*{}_{n,m}>1$ في $|z|>1$.

أكثر من ذلك لدينا المبرهنة التالية :

مبرهنة (3) :

ان المتراجحة التالية $\tau_{n,m}\leq\theta_m\leq\tau_{n,m}^*$ هي متراجحة محققة لكل $m\geq 1$. [5]

□

و الآن سنطرح المشكلة التالية :

ليكن لدينا $m\geq 1$ و لدينا المجال $[x,y]$، هل بالإمكان تحديد كل θ_m تنتمي إلى هذا المجال و بحيث $[x,y]\subseteq T_0$.

سنرى أن هذه المشكلة يمكن أن تحل و بفعالية من اجل $m\geq 2$ و بشرط أن $[x,y]$ لا يتقاطع مع $S\cup\{1\}$ يمكن صياغة المشكلة بالشكل التالي :

ليكن f من المجموعة F و بمنشور هو $u_0+u_1z+u_2z^2+$.................. هل بالإمكان تحديد الشروط المطبقة على $\{u_n\}$ بحيث يكون $\theta_m\in[x,y]$.

لتكن m ثابتة و لنأخذ $K_n(z)=z^mD_n(z)+E_n(z)$ (20) إن $K_n(z)$ تحقق علاقة تدرجسنوضحها فيمايلي :

بما أن $D_n(z)$ تحقق علاقة التدرج (7) كذلك الأمر فإن $E_{n+1}(z)=-z^{n+1}D_n(z^{-1})$ و بالتالي :

$$E_{n+1}(z)=-z^{n+1}[(1+z^{-1})D_n(z^{-1})-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}z^{-1}D_{n-1}(z^{-1})]$$
$$=[(1+z^{-1})(-z^{n+1})D_n(z^{-1})-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}z^{-1}(-z^{n+1})D_{n-1}(z^{-1})]$$
$$=(1+z)E_n(z)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zE_{n-1}(z)$$

$$K_{n+1}(z)=z^mD_{n+1}(z)+E_{n+1}(z)$$

$$K_{n+1}(z)=z^m[(1+z)D_n(z)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zD_{n-1}(z)]+[(1+z)E_n(z)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zE_{n-1}(z)]$$

$$K_{n+1}(z)=[z^m(1+z)D_n(z)+(1+z)E_n(z)]+[-z^m(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zD_{n-1}(z)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zE_{n-1}(z)]$$
$$=(1+z)[z^mD_n(z)+E_n(z)]-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}z[z^mD_{n-1}(z)+E_{n-1}(z)]$$

وبالتالي :

$$K_{n+1}(z)=(1+z)K_n(z)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zK_{n-1}(z) \qquad (21)$$

إذا كان $\theta_m\le y$ عندئذ بحسب المبرهنة (3):

$\tau_{n+1,m}\le y$ و منه و بما أن و بما ان $K_{n+1}(z)$ دالة متناقصة [4] نجد $K_{n+1}(y)\le 0$.

بالتعويض بالعلاقة (21) نجد :

$$K_{n+1}(y)=(1+y)K_n(y)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}zK_{n-1}(y)\le 0$$
$$(1+y)K_n(y)\le(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}yK_{n-1}(y)$$

و لكن $K_{n-1}(y)<0, u_{n-1}\ge w_{n-1}$ بالتالي :

$$u_n\le w_n+(u_{n-1}-w_{n-1})(1+y)y^{-1}K_n(y){K_{n-1}}^{-1}(y)=r_n^*(y) \qquad (22)$$

و الآن سوف نثبت أن $r_n^*(y)$ تحقق علاقة تدرج :

إن

$$r_{n+1}^*(y)-w_{n+1}=\frac{(1+y)K_{n+1}(y)(u_n-w_n)}{yK_n(y)}$$

$$r_{n+1}^*(y)-w_{n+1}=\frac{(1+y)[(1+y)K_n(y)-(u_n-w_n)(u_{n-1}-w_{n-1})^{-1}yK_{n-1}(y)](u_n-w_n)}{yK_n(y)}$$

$$r_{n+1}^*(y)-w_{n+1}=\frac{(1+y)^2y^{-1}[(1+y)y^{-1}(u_{n-1}-w_{n-1}){K_{n-1}}^{-1}(y)K_n(y)-(u_n-w_n)](u_n-w_n)}{y^{-1}(1+y)K_n(y)(u_{n-1}-w_{n-1}){K_{n-1}}^{-1}(y)}$$

$$r_{n+1}^*(y)-w_{n+1}=\frac{(1+r)^2y^{-1}[r_n^*-w_n-(u_n-w_n)](u_n-w_n)}{r_n^*-w_n}$$

$$r_{n+1}^*-w_{n+1}=(1+y)^2y^{-1}(r_n^*-u_n)(u_n-w_n)\Big/(r_n^*-w_n) \qquad (23)$$

إن الاعتماد الواضح على m يظهر في الشرط الابتدائي فقط حيث اننا نجد :

$$r_0^*(y)=(y^{m+1}-1)\Big/(y^m-y) \qquad (24)$$

عندما $m=1$ يكون $r_0^*(y)=\infty$.

$$r_1^*-w_1=(1+y)^2y^{-1}(u_0+1) \qquad (25)$$

بصورة مشابهة بما أن $K_n^*(z) = z^m D^*_n(z) + E^*_n(z)$ (26) دالة متزايدة بحسب [4]وبما أن $x \le \theta_m$ فبتطبيق المبرهنة (3) نجد $x^m D^*_n(x) + E^*_n(x) < 0$ و ننفذ الخطوات تماماً كما سبق فنحصل على الشرط : $u_n \ge r_n(x)$ حيث إن :

$$r_n(x) = w^*_n - (w^*_{n-1} - u_{n-1})(1+x)x^{-1}K^*_n(x)K^{*}_{n-1}{}^{-1}(x) \qquad (27)$$

و بالطريقة نفسها التي أوجدنا بها العلاقة (23) يمكن إثبات أن $r_n(y)$ تحقق علاقة تدرج :

$$w^*_{n+1} - r_{n+1} = \frac{(1+x)^2 x^{-1}(w_n^* - u_n)(u_n - r_n)}{(w_n^* - r_n)} \qquad (28)$$

$$r_0(x) = \frac{-(x^{m+1} - 1)}{(x^m + x)} \qquad (29)$$

مما تقدم نجد :

$$r_n(x) \le u_n \le r_n^*(y) \text{ عندما } \theta_m \in [x, y] \qquad . (30)$$

الاستنتاجات والتوصيات :

إن دراستنا السابقة هي خطوة مهمة نحو الاجابة عن السؤال المهم حول أصغر عدد في مجموعة أعداد سالم؛ أي $\min T$ الذي وضع *D.Boyd* تصور بأنه عدد ليمار τ^* و هو الجذر الحقيقي الأكبر من الواحد لكثيرة الحدود :

$$L(z) = z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 - z + 1$$

و يساوي تقريباً 1.17628 .

حيث نعتقد أنه يمكن البرهان أن $T \cap]1, \tau^*[= \phi$ بتطبيق الشروط السابقة على المجال $]1, \tau^*[$ مما قد يؤدي إلى إثبات صحة هذا التصور .

المراجع :

1. SANKARI.H,*OnPisotNumbersin The Set $S^{(3)} \cap S_0$ and Smallest Element of the Set $S^{(3)}$*,SYRIA.VOL.31,N0.3,2009,11-29
2. BOYD,D.*Small Salem Numbers.*Duke Math .U.S.A.VOL.44,NO.2,1977,315-328
3. Salem,R.*Algebriac Numbers and Fourier Analysis.D.C.Health and Co. Bosten, 1963, 66*
4. DUFFRESNOY,J;PISOT,CH.*Etude de certainesfonctionsmeromorphesborneessur le cercleunite,application a un ensemble fremed'entiersalgebriques,* Ann. Sci. Ecole Norm Sup.VOL. 72, NO.1,1955,69-92
5. BOYD,D.*Pisot and Salem Numbers in Intervals of the Real Line*.Mathmatics of Computation ,U.S.A.VOL.32,No.144,1978,1244-1260.
6. SIEGAL.C.L,*Algebriaic Integer Whose conjugate lie in the unit circle,*Duke Math,U.S.A.VOL.11,NO.2,1944,597-602.