

حلّ عددي لمعادلة نيويل - وايتهايد - سيغل التفاضلية الجزئية بطريقة الفروق المنتهية

د. سامي انجرو^{*}

د. رامز كروم^{**}

نيروز هلال^{***}

(تاريخ الإيداع 9 / 12 / 2018. قُبِلَ للنشر في 22 / 4 / 2019)

□ ملخّص □

يُقدّم هذا العمل طريقتين مختلفتين من طرائق الفروق المنتهية، هما: طريقة الفروق المنتهية الضمنية، وطريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً، لتقديم حلول عددية لمعادلة نيويل-وايتهايد-سيغل التفاضلية الجزئية. استخدمنا طريقة نيوتن التكرارية في طريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً، وذلك لأننا نحصل على جملة معادلات جبرية غير خطية. تم تطبيق الطريقتين لحلّ مسألتين مختلفتين، وأظهرت النتائج مدى دقة الحلّ العددي وتوافقه مع الحلّ الدقيق.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، معادلة نيويل-وايتهايد-سيغل، الفروق المنتهية، الفروق المنتهية الضمنية، الفروق المنتهية الضمنية كلياً.

^{*} أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

^{**} أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

^{***} طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

البريد الإلكتروني: nayrouz.hilal.11@gmail.com

Numerical Solution of Newell-Whitehead-Segel Partial Differential Equation by Finite Difference Methods

Dr. Sami Injrou*
Dr. Ramez Karoum**
Nayrouz Hilal***

(Received 9 / 12 / 2018. Accepted 22 / 4 / 2019)

□ ABSTRACT □

This work presents two different finite difference methods, which are implicit finite difference method and fully implicit finite difference method to compute the numerical solutions for Newell-Whitehead-Segel partial differential equation. Newton's method is used in fully implicit finite difference scheme, because this scheme leads to a system of nonlinear equations. Two different problems are solved by the both previous proposed methods. The results show the accuracy of the numerical solution and its agreement with the exact solution.

Keywords: Nonlinear partial differential equations, Newell-Whitehead-Segel equation, Finite difference, implicit finite difference, fully implicit finite difference.

* Associate Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattakia , Syria.

** Associate Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattakia , Syria.

***Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. Email: nayrouz.hilal.11@gmail.com

مقدمة:

تعدّ المعادلات التفاضلية الجزئية نماذج رياضية، تفسّر الظواهر الفيزيائية المعقّدة، التي تأتي من مسائل هندسية وكيميائية وفيزيائية وبيولوجية وميكانيكية...، وتبرز هنا معادلة نيويل-وايتهيد-سيغل، التي يرمز لها اختصاراً بـ (NWS)، كأحد أهمّ هذه المعادلات؛ إذ تصف السلوك الديناميكي بالقرب من نقطة التفرّع للحمل الحراري لـ Rayleigh-Benard لسائل مزيج من سائلين. فضلاً عن ذلك، تمّ تطبيق هذه المعادلة على العديد من المسائل في أنظمة متنوّعة، نذكر منها، على سبيل المثال، مسألة عدم استقرار فاراداي، والبصريّات غير الخطيّة، والتفاعلات الكيميائية، وبعض النظم البيولوجية.

ظهرت في البداية معادلة نيويل-وايتهيد على يد الباحثين: Newell و Whitehead في العام 1969 [1] بالشكل:

$$u_t(x, t) - au_{xx}(x, t) = bu(x, t) - cu^3(x, t), \quad (1)$$

ثمّ أجرى Segel تعديلاً على المعادلة (1) في العام نفسه في [2]، وأصبحت بالشكل الآتي:

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + au(x, t) - bu^q(x, t), \quad (2)$$

حيث $x \in R, t \geq 0$ ، قد تمثّل u توزيعاً غير خطّي لدرجة الحرارة في سلك رفيع ولانهائيّ الطول، أو تعبّر عن سرعة جريان السائل في أنبوب لانهائيّ الطول ذي قطر صغير؛ حيث a و b و k ثوابت حقيقية مع $k > 0$ و q عدد صحيح موجب.

أوجد كثير من الباحثين حلولاً دقيقة لبعض مسائل القيم الابتدائية لمعادلة (NWS) بطرائق مختلفة؛ إذ قدّم Aasaraai في العام 2011 حلولاً تحليلية باستخدام طريقة التحويل التفاضلي [3]، ثمّ في العام 2013 قام Pue-on بحلّها مستخدماً طريقة تحليل أوميان-لابلاس في [4]، كذلك حلّها Jassim في العام 2015 مستخدماً طريقة تحويل لابلاس مع طريقة الاضطراب الهوموتوبي في [5]، وفي العام 2016 حلّها Mahgoub و Sedeeg باستخدام طريقة تحليل أوميان-إلزاكي [6]؛ كما استخدم SOORI طريقة التكرار المتغيّر لحلّها في [7]، ثمّ استخدم Prakash و Kumar طريقة التكرار المتغيّر لـ He في [8]، وكذلك استخدم Mahgoub طريقة تحويل الاضطراب الهوموتوبي مع طريقة تحويل إلزاكي، وأعطى حلاً في [9]. وفي حالة المعادلة (2) مع شروط حدية ابتدائية قام Macías-Díaz و Ruiz-Ramírez في العام 2011 بإيجاد حلّ تقريبي لها باستخدام طريقة المحافظة على التناظر غير القياسي (non-standard symmetry-preserving method) في [10]، وكذلك قدّمت Zahra و آخرون في [11] في العام 2014 حلاً تقريبياً للمعادلة، مع شروط ابتدائية وحدية بطريقة شرائح B التكميلية، وفي العام 2015 وفي المقال [12]، قام Patade و Bhalekar بتقديم حلول تقريبية تحليلية للمعادلة المذكورة سابقاً مع شروط ابتدائية، باستخدام طريقة تكرارية جديدة مقترحة من قبل Daftardar-Gejji و Jafari في [13]؛ كما قدّم Akinlabi و Edeki في العام 2017 في [14] حلاً تقريبياً للمعادلة مع شروط ابتدائية، باستخدام طريقة التحويل التكراري المضطرب.

أهميّة البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول عديدة تقريبية لمعادلة نيويل-وايتهيد-سيغل (NWS) مع شروط ابتدائية-حدية باستخدام طريقة الفروق المنتهية (الضمنية والضمنية كلياً)، وتأتي أهميّة هذا البحث من أنّ هذه الحلول التقريبية تُمكن الباحث من فهم سلوك الظاهرة الفيزيائية أو الكيميائية المدروسة وتوضيحها، وكذلك التنبؤ بالنتائج المستقبلية لها.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية والتحليل العددي، لذلك فإنّ التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على الطرائق العددية لحلّ المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وبرنامج Scilab للحسابات الرياضية.

النتائج والمناقشة:

تعتمد طريقة الفروق المنتهية على تحويل منطقة التعريف $\mathcal{R} = \{(x, t); a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ إلى شبكة من العقد (x_i, t_j) ، وذلك بتقطيعها تقطيعاً منتظماً، نحصل على هذه العقد كالتالي:

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \quad \text{و} \quad m = \frac{T - 0}{\Delta t}.$$

فيكون: $x_i = i\Delta x ; 0 \leq i \leq n$ و $t_j = j\Delta t ; 0 \leq j \leq m$.

ثمّ استبدال مشتقات المعادلة التفاضلية الجزئية بتقريبات مناسبة، نحصل عليها من تعريف المشتق، ومن ثمّ نحصل على جملة من المعادلات الجبرية، بحلّها بإحدى الطرائق المناسبة، نحصل على قيم تقريبية لحلّ المعادلة التفاضلية الجزئية عند هذه العقد [15].

سنوجد الحلّ التقريبي للمعادلة (2) بطريقة الفروق المنتهية الضمنية وطريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً؛ إذ

نقرب المشتق بالنسبة إلى الزمن في (2) بالفروق التراجعي من المرتبة الأولى عند العقدة (x_i, t_{j+1}) ؛ كما يأتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}. \quad (3)$$

أمّا المشتق بالنسبة إلى المكان، فيتمّ تقريبه بالفروق المركزي من المرتبة الثانية عند العقدة (x_i, t_{j+1}) ؛ كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (4)$$

تعدّ طرائق الفروق المنتهية الضمنية من الطرائق المستقرة دوماً (من دون أيّ شروط لاختيار Δx و Δt)،

ولاختبار دقة النتائج، سنتمّ مقارنتها مع الحلّ الدقيق للمسائل المدروسة بحساب الخطأ وفق النظم L_∞ والنظم L_2 المعرفين على الترتيب بالعلاقين الآتيتين:

$$error_{L_\infty} = \|U - \bar{U}\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |U_i - \bar{U}_i|, \quad (5)$$

$$error_{L_2} = \|U - \bar{U}\|_2 = (\Delta x \sum_{i=0}^N |U_i - \bar{U}_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

حيث \bar{U} هو الحلّ الدقيق و U هو الحلّ التقريبي للمسألة.

1- صيغة الفروق المنتهية الضمنية: (IFD) Implicit finite difference scheme

باستبدال مشتقات المعادلة التفاضلية الجزئية (2) بالعلاقين (3) و (4)، واستبدال $u(x, t)$ بـ u_i^j ، وبإصلاح العلاقة الناتجة، نحصل على:

$$-ru_{i-1}^{j+1} + (1 + 2r)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} = \left(1 + a\Delta t - b\Delta t(u_i^j)^{q-1}\right)u_i^j, \quad (7)$$

حيث $1 \leq i \leq n - 1$ و $0 \leq j \leq m - 1$ و $r = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$

ومن ثمّ يمكن كتابة العلاقة (7) بالشكل المصفوفي $A U^{j+1} = B U^j + C$ ، ومنه:

$$U^{j+1} = \text{inv}(A) * (B U^j + C), \quad (8)$$

حيث $U^j = [u_1^j, u_2^j, \dots, u_{n-1}^j]^T$ التقريب الفروقي للحلّ الدقيق $u(x, t)$ للمسألة المعطاة، و $A_{n-1 \times n-1}$ مصفوفة ثلاثية الأقطار (tridiagonal)، و $B_{n-1 \times n-1}$ مصفوفة قطرية، و C مصفوفة تعطى بالشكل الآتي:

$$C = \begin{pmatrix} ru_0^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ru_n^{j+1} \end{pmatrix}.$$

2- صيغة الفروق المنتهية الضمنية كلياً: Fully implicit finite difference scheme (FIFD)

باستبدال مشتقات المعادلة التفاضلية الجزئية (2) بالعلاقين (3) و (4)، واستبدال $u(x, t)$ بـ u_i^{j+1} ، وبإصلاح العلاقة الناتجة، نحصل على:

$$-ru_{i-1}^{j+1} + (1 + 2r - a\Delta t)u_i^{j+1} + b\Delta t(u_i^{j+1})^q - ru_{i+1}^{j+1} - u_i^j = 0, \quad (9)$$

حيث $r = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$ و $0 \leq j \leq m-1$ و $1 \leq i \leq n-1$.

إنّ العلاقة (9) جملة معادلات غير خطية، لذلك سنوجد حلها بالاعتماد على طريقة نيوتن التكرارية، التي نلخصها بالخطوات الآتية:

أولاً: نكتب الجملة (9) بالشكل الآتي:

$$G(U) = 0, \quad (10)$$

حيث $U = [u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \dots, u_{n-1}^{j+1}]^T$ و $G = [g_1, g_2, \dots, g_{n-1}]^T$.
ثانياً: نفترض أنّ الشرط الابتدائي للمسألة المدروسة هو قيمة ابتدائية للحلّ التقريبي.

ثالثاً: من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ وحتى يتحقّق التقارب، نحسب المقدار:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - J(U^{(k)})^{-1} G(U^{(k)}) \quad (11)$$

حيث $J(U^{(k)})$ هي مصفوفة جاكوبي للدالة $G(U)$ عند $U = U^{(k)}$.

ولإيجاد الحلّ $U^{(k+1)}$ عند كلّ خطوة زمنية، نعتمد على الحلّ في الخطوة الزمنية السابقة. يتوقّف تكرار نيوتن في كلّ

خطوة زمنية عندما يتحقّق الشرط $\|G(U^{(r)})\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ ؛ إذ يتحقّق التقارب عادةً من أجل $r = 2$ أو $r = 3$.

خوارزمية الحل:

- خوارزمية طريقة الفروق المنتهية الضمنية:

المدخلات: المجال بالنسبة للمكان $[x_l, x_r]$ ، طول خطوة المكان Δx ، الزمن الأعظمي T ، طول خطوة الزمن Δt ،

الثابت k ، الشرط الابتدائي $u_0(x, 0)$ ، الحلّ الدقيق $U(x, t)$.

الخرج: في كلّ خطوة زمنية $t_j = j\Delta t$ نحصل على حلّ تقريبي $u_{i,j}$ للحلّ الدقيق $U(x_i, t_j)$ عند كلّ عقدة x_i ، حيث $1 \leq i \leq m-1$ ، $1 \leq j \leq n$ ، وعلى الخطأ في الحلّ التقريبي بالمقارنة مع الحلّ الدقيق مقاساً بالنظمين

L_2 و L_{∞} .

الخطوة الأولى: حساب القيم: $m = \frac{x_r - x_l}{\Delta x}$ ، $r = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$ ، $n = \frac{T}{\Delta t}$ ،

الخطوة الثانية: إيجاد المصفوفة A في العلاقة (8).

الخطوة الثالثة: نعرّف حلقة for ونوجد من خلالها عند كلّ خطوة زمنية $t_j = j\Delta t$ حيث $1 \leq j \leq n$ القيم التالية:

حساب B في العلاقة (8).

حساب C في العلاقة (8).

حساب الحل التقريبي: $u = inv(A) * (Bu_0 + C)$.

حساب الحل الدقيق: $U(x, t)$.

حساب الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق مقياساً بالنظيم L_∞ .

حساب الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق مقياساً بالنظيم L_2 .

لانتقال إلى خطوة جديدة نضع: $u_0 = u$.

نهاية حلقة for.

نهاية الخوارزمية

• خوارزمية طريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً:

المدخلات: المجال بالنسبة للمكان $[x_l, x_r]$ ، طول خطوة المكان Δx ، الزمن الأعظمي T ، طول خطوة الزمن Δt ،

الثابت k ، متجه الشرط الابتدائي $u_0(x, 0)$ ، متجه الحل الدقيق $U(x, t)$.

الخرج: في كل خطوة زمنية $t_j = j\Delta t$ نحصل على حل تقريبي $u_{i,j}$ للحل الدقيق $U(x_i, t_j)$ عند كل عقدة x_i ،

حيث $1 \leq j \leq n$ ، $1 \leq i \leq m - 1$ ، وعلى الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق مقياساً بالنظيمين

L_∞ و L_2 .

الخطوة الأولى: حساب القيم: $m = \frac{x_r - x_l}{\Delta x}$ ، $r = \frac{k \Delta t}{(\Delta x)^2}$ ، $n = \frac{T}{\Delta t}$ ،

الخطوة الثانية: نضع: $u_1 = u_0$.

الخطوة الثالثة: نعرف حلقة for ونوجد من خلالها عند كل خطوة زمنية $t_j = j\Delta t$ حيث $1 \leq j \leq n$ القيم التالية:

حساب G في العلاقة (10).

حساب $J(U)$ في العلاقة (11).

حساب الحل التقريبي: $u = u_1 - inv(J(U)) * G$.

حساب النظيم: $Test = Norm(G, 'inf')$.

نعرف حلقة while ونختبر الشرط ($Test > 10^{-5}$) إذا تحقق ننفذ الخطوات التالية:

نضع: $u_0 = u_1$

$u_1 = u$

حساب G في العلاقة (11).

حساب الحل التقريبي: $u = u_1 - inv(J(U)) * G$.

حساب النظيم: $Test = Norm(G, 'inf')$.

نهاية حلقة while.

حساب الحل الدقيق $U(x, t)$.

حساب الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق مقياساً بالنظيم L_∞ .

حساب الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق مقياساً بالنظيم L_2 .

للانتقال إلى خطوة جديدة نضع: $u_0 = u_1$

$$u_1 = u$$

نهاية حلقة for.

نهاية الخوارزمية.

الاختبارات العددية:

سيتم اختبار الطريقتين السابقتين على مسألتين نموذجيتين لهما حل تحليلي، ومقارنة النتائج بحساب الخطأ مقاساً بالمتريين L_2 و L_∞ المعرفين بالعلاقتين (5) و (6)، كذلك سنورد شكلين توضيحيين للحل الدقيق مع الحل التقريبي، وذلك باستخدام برنامج Scilab للحسابات الرياضية.

سنقدم البرنامج المستخدم في حساب النتائج الرياضية للمثال (1) بكل من الطريقتين المقترحتين، وذلك من أجل

$$\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01, (x, t) \in [0,1] \times [0,10]$$

• برنامج طريقة الفروق المنتهية الضمنية:

```
T=10;
dt=0.01;
n=T/dt;
L=1;
dx=0.1;
m=L/dx;
r=dt/(dx)^2;
A=(1+2*r)*diag(ones(m-1,1),0)-r*diag(ones(m-2,1),-1)-r*diag(ones(m-2,1),1);
u0=[];
for i=1:m-1
    u0(i)=1/(1+%e^(-i*dx/sqrt(2)));
end
for t=1:n
    B=zeros(m-1,m-1);
    for v=1:m-1
        for w=1:m-1
            if v==w then
                B(v,w)=1+dt-dt*(u0(v))^2;
            end
        end
    end
end
C=zeros(m-1,1);
C(1)=r/(1+%e^(-3*dt*t/2));
C(m-1)=r/(1+%e^(-1/sqrt(2)-(3*dt*t/2)));
u1=inv(A)*(B*u0+C);
U=[];
for s=1:m-1
    U(s)=1/(1+%e^(-s*dx/sqrt(2)-(3*dt*t/2)));
end
er=norm(U-u1,'inf')
disp(t,'iter=')
disp(er,'L infinity error=')
```

```

z=0;
for q=1:m-1
    ff=(u1(q)-U(q))^2;
    z=z+ff;
end
L2=sqrt(dx*z);
disp(L2,'L2 error=')
u0=u1;
end

```

• برنامج طريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً:

```

T=10;
dt=0.01;
n=T/dt;
L=1;
dx=0.1;
m=L/dx;
r=dt/(dx)^2;
u0=[];
for i=1:m-1
    u0(i)=1/(1+%e^(-i*dx/sqrt(2)));
end
u1=u0;
for t=1:n
    G=[];
    G(1)=-r/(1+%e^(-3*dt*(t-1)/2))+(1+2*r-dt)*u1(1)+dt*(u1(1))^3-r*u1(2)-u0(1);
    for i=2:m-2
        G(i)=-r*u1(i-1)+(1+2*r-dt)*u1(i)+dt*(u1(i))^3-r*u1(i+1)-u0(i);
    end
    G(m-1)=-r*u1(m-2)+(1+2*r-dt)*u1(m-1)+dt*(u1(m-1))^3-r/(1+%e^(-1/sqrt(2)-(3*dt*(t-1)/2)))-u0(m-1);
    DG=[];
    DG=diag(ones(m-1,1),0)-r*diag(ones(m-2,1),-1)-r*diag(ones(m-2,1),1);
    for i=1:m-1
        for j=1:m-1
            if i==j then
                DG(i,j)=1+2*r-dt+3*dt*(u1(i))^2;
            end
        end
    end
    u2=u1-inv(DG)*G;
    test2=norm(G,'inf');
    while (test2>1e-5)
        u0=u1;
        u1=u2;
    end
    G=[];
    G(1)=-r/(1+%e^(-3*dt*(t-1)/2))+(1+2*r-dt)*u1(1)+dt*(u1(1))^3-r*u1(2)-u0(1);
    for i=2:m-2

```



```

G(i)=-r*u1(i-1)+(1+2*r-dt)*u1(i)+dt*(u1(i))^3-r*u1(i+1)-u0(i);
end
G(m-1)=-r*u1(m-2)+(1+2*r-dt)*u1(m-1)+dt*(u1(m-1))^3-r/(1+%e^(-1/sqrt(2)-(3*dt*(t-1)/2)))-u0(m-1);
u2=u1-inv(DG)*G;
test2=norm(G,'inf');
end
U=[];
for i=1:m-1
    U(i)=1/(1+%e^(-i*dx/sqrt(2)-(3*t*dt/2)));
end
er=norm(U-u2,'inf');
disp(er,'L infinity error=')
z=0;
for q=1:m-1
    ff=(u2(q)-U(q))^2;
    z=z+ff;
end
L2=sqrt(dx*z);
disp(L2,'L2 error=')
u0=u1;
u1=u2;
end

```

مثال (1): (Problem 1) [16]

$$u_t - u_{xx} - u + u^3 = 0, (x, t) \in [0,1] \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}},$$

$$u(0, t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3t}{2}}}, \quad u(1, t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3t}{2}}},$$

$$. u(x, t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{3t}{2}}}$$

يبين الجدولان (1) و(2) الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق بطريقة (IFD) مقاساً بالنظيمين L_2 و L_∞ ، وذلك من أجل $T = 10$ و $\Delta x = 0.1$ و $\Delta x = 0.05$ (على الترتيب)؛ كما يبين الجدولان (3) و(4) الخطأ في الحل التقريبي بالمقارنة مع الحل الدقيق بطريقة (FIFD) مقاساً بالنظيمين L_2 و L_∞ من أجل المعطيات نفسها.

يوضح الشكل (1) الحل الدقيق مع الحلول العددية من أجل $\Delta t = 0.01$ و $\Delta x = 0.1$ بطريقة (IFD).

الجدول(1): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (IFD) من أجل $\Delta x = 0.1$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	1.348E-4	9.87E-5	9E-7	6E-7	4.812E-10	3.528E-10
$\Delta t=10^{-3}$	1.45E-5	1.06E-5	7.756E-8	5.687E-8	4.296E-11	3.150E-11
$\Delta t=10^{-4}$	2.5E-6	1.8E-6	9.216E-10	6.757E-10	5.245E-13	3.874E-13

الجدول(2): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (IFD) من أجل $\Delta x = 0.05$.

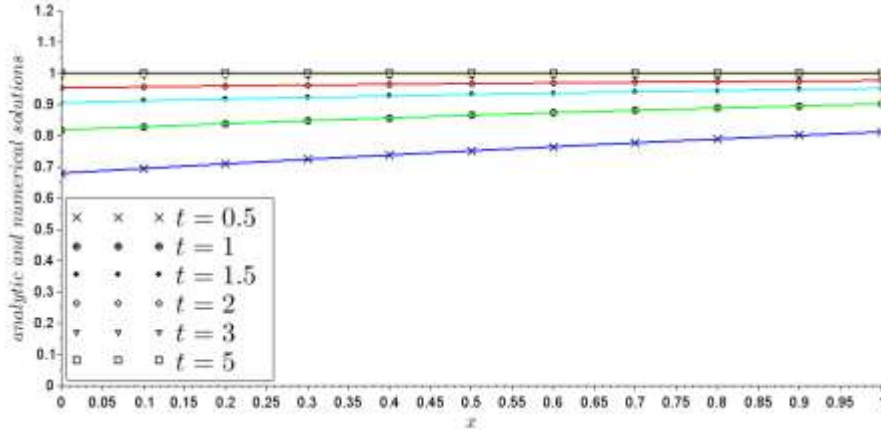
Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	1.340E-4	9.81E-5	9E-7	6E-7	4.866E-10	3.560E-10
$\Delta t=10^{-3}$	1.37E-5	1.00E-5	8.503E-8	6.221E-8	4.713E-11	3.448E-11
$\Delta t=10^{-4}$	1.6E-6	1.2E-6	6.324E-9	4.627E-9	3.442E-12	2.519E-12

الجدول(3): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (FIFD) من أجل $\Delta x = 0.1$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.1889E-3	1.7735E-3	8.0E-6	6.1E-6	5.104E-8	3.787E-8
$\Delta t=10^{-3}$	2.171E-4	1.750E-4	8.30E-5	6.07E-5	4.600E-8	3.363E-8
$\Delta t=10^{-4}$	2.10E-5	1.62E-5	8.22E-5	6.00E-5	4.551E-8	3.321E-8

الجدول(4): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (FIFD) من أجل $\Delta x = 0.05$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.2197E-3	1.8222E-3	8.2E-6	6.3E-6	5.115E-8	3.788E-8
$\Delta t=10^{-3}$	2.208E-4	1.805E-4	8.30E-5	6.06E-5	4.602E-8	3.361E-8
$\Delta t=10^{-4}$	2.19E-5	1.73E-5	8.22E-5	6.00E-5	4.551E-8	3.320E-8



الشكل (1): يُظهر الحلّ الدقيق والحلول العددية للمثال (1) بطريقة (IFD)

مثال (2): (Example 5.5) [17]

$$u_t - u_{xx} - u + u^4 = 0, (x, t) \in [0,1] \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$u(0, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{21t}{20}\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$u(1, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{3}{2\sqrt{10}}\left(1 - \frac{7t}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

ولدينا الحلّ الدقيق $u(x, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{3}{2\sqrt{10}}\left(x - \frac{7t}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)^2$ بيّن الجدولان (5) و(6) الخطأ في الحلّ التقريبيّ بالمقارنة مع الحلّ الدقيق بطريقة (IFD) مقاساً بالانظيمين L_∞ و L_2 ، وذلك من أجل $T = 10$ و $\Delta x = 0.1$ و $\Delta x = 0.05$ (على الترتيب)؛ كما بيّن الجدولان (7) و(8) الخطأ في الحلّ التقريبيّ بالمقارنة مع الحلّ الدقيق بطريقة (FIFD) مقاساً بالانظيمين L_∞ و L_2 من أجل المعطيات نفسها.

يوضّح الشكل (2) الحلّ الدقيق مع الحلول العددية من أجل $\Delta t = 0.01$ و $\Delta x = 0.1$ بطريقة (IFD).

الجدول(5): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (IFD) من أجل $\Delta x = 0.1$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.166E-4	1.586E-4	1E-7	1E-7	3.836E-12	2.823E-12
$\Delta t=10^{-3}$	2.44E-5	1.79E-5	1.174E-8	8.636E-9	3.120E-13	2.299E-13
$\Delta t=10^{-4}$	5.1E-6	3.8E-6	9.095E-10	6.692E-10	3.431E-14	2.443E-14

الجدول(6): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (IFD) من أجل $\Delta x = 0.05$.

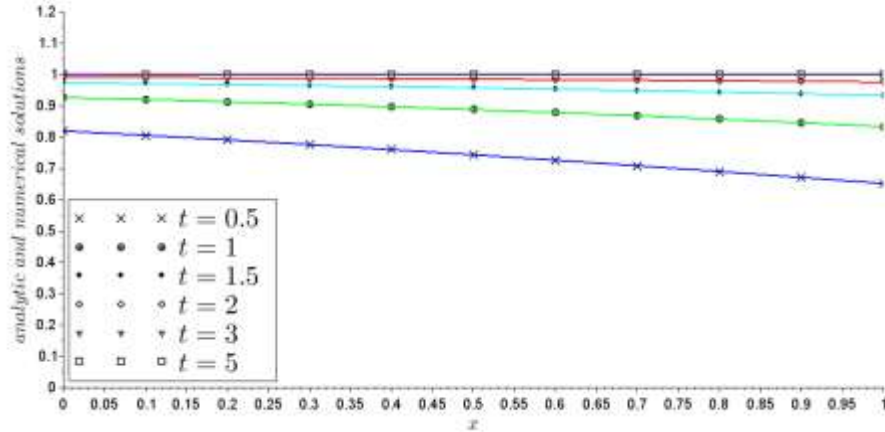
Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.145E-4	1.571E-4	1E-7	1E-7	3.917E-12	2.863E-12
$\Delta t=10^{-3}$	2.21E-5	1.62E-5	1.358E-8	9.923E-9	3.714E-13	2.705E-13
$\Delta t=10^{-4}$	2.9E-6	2.1E-6	8.323E-10	6.082E-10	4.086E-14	2.440E-14

الجدول(7): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (FIFD) من أجل $\Delta x = 0.1$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.7245E-3	2.1159E-3	9.9E-6	7.3E-6	2.846E-10	2.114E-10
$\Delta t=10^{-3}$	2.692E-4	2.073E-4	9.1E-6	6.7E-6	2.520E-10	1.844E-10
$\Delta t=10^{-4}$	2.53E-5	1.80E-5	9.0E-6	6.6E-6	2.488E-10	1.818E-10

الجدول(8): يُظهر مقارنة الخطأ بطريقة (FIFD) من أجل $\Delta x = 0.05$.

Δt	$t = 1$		$t = 5$		$t = 10$	
	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
$\Delta t=10^{-2}$	2.7738E-3	2.1758E-3	7.6E-6	5.7E-6	2.863E-10	2.115E-10
$\Delta t=10^{-3}$	2.754E-4	2.148E-4	9.2E-6	6.7E-6	2.529E-10	1.843E-10
$\Delta t=10^{-4}$	2.72E-5	2.02E-5	9.1E-6	6.6E-6	2.498E-10	1.817E-10



الشكل (2): يُظهر الحلّ الدقيق والحلول العددية للمثال (2) بطريقة (IFD)

نستنتج من الجداول (1)-(8) أنّ نتائج الطريقتين المقترحتين ذات دقة عالية، وأنّه تزداد هذه الدقة بتصغير خطوة الزمن Δt ؛ كما نلاحظ من الشكلين (1) و(2) أنّ الحلول التقريبية العددية تتقارب بسرعة إلى الحلّ الدقيق.

دقة الطريقة ومعدل التقارب:

سيتمّ تقدير دقة الطريقة باستخدام العلاقة [18]:

$$E = \left[\frac{\sum_{i=0}^N |U_i - \bar{U}_i|^2}{\sum_{i=0}^N |\bar{U}_i|^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

حيث \bar{U} هو الحلّ الدقيق و U هو الحلّ التقريبي للمسألة.

ومن ثمّ يُحسب معدل التقارب من العلاقة [18]:

$$rate = \log_2 \left(\frac{E^{\Delta x}}{E^{\frac{\Delta x}{2}}} \right), \quad (13)$$

حيث $E^{\frac{\Delta x}{2}}$ و $E^{\Delta x}$ معرفان بالعلاقة (12)، و $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ ؛ أي أنّ Δx هو طول خطوة الموضع.

يبين الجدول (9) معدل التقارب للمثال (1) باستخدام طريقة (IFD) من أجل $\Delta t = 10^{-4}$ و $T = 0.5$ ؛ كما يبيّن الجدول (10) معدل التقارب للمثال (1) باستخدام طريقة (FIFD) من أجل $\Delta t = 10^{-4}$ و $T = 0.5$ ؛ حيث Δx متغيرة مع قيم N .

الجدول (9)

N	معدل التقارب	مرتبة التقارب
4	1.9378628	-
8	1.5179819	1.2766047
16	0.8633508	1.7582446
32	0.3280662	2.6316359
64	0.0968831	3.3862067
128	0.0265443	3.6498646

الجدول (10)

N	معدّل التقارب	مرتبة التقارب
4	0.4669920	-
8	0.1406495	3.3202535
16	0.0457562	3.0738894
32	0.0161368	2.8355188
64	0.0070586	2.2861191
128	0.0030973	2.2789526

تُظهر نتائج الجدولين (9) و(10) أنّ معدّل التقارب لكلّ من الطريقتين المقترحتين متناسب مع $(\Delta x)^2$ ؛ أي أنّ الدقّة من المرتبة الثانية بالنسبة إلى الموضع، كذلك نجد أنّ الخطأ يسعى إلى الصفر كلّما صغّر Δx ؛ أي بزيادة عدد العقد (x_i, t_j) ، الأمر الذي يعني أنّ الطريقتين المقترحتين (FIFD) و(IFD) متوائمتان (consistent).

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد قدّمنا في هذه المقالة دراسة عددية لمعادلة نيوبل-وايتهيد-سيغل التفاضلية الجزئية، وذلك من خلال الاعتماد على طريقتين مختلفتين من طرائق الفروق المنتهية، وهما طريقة الفروق المنتهية الضمنية (IFD) وطريقة الفروق المنتهية الضمنية كلياً (FIFD). تمّ اختبار هاتين الطريقتين على مسألتين مختلفتين، وقمنا بحساب الأخطاء وفق التنظيمين L_2 و L_∞ بين الحلّ الدقيق المعطى مع الحلّ التقريبي، وقارنا النتائج بينهما، فبيّنت الجداول التي حصلنا عليها أنّ كلّاً من الطريقتين تقدّم دقّة عالية للحلّ العددي، لكن يمكن عدّ طريقة (IFD) أكثر دقّة من طريقة (FIFD)؛ كما بيّنا أيضاً أنّ كلّاً من الطريقتين متوائمتان. لذلك نوصي باستخدام هاتين الطريقتين لحلّ مسائل من هذا النوع.

المراجع:

- [1]. NEWELL, A. C. ;WHITEHEAD, J. A. *Finite bandwidth, finite amplitude convection*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 38, part 2, 1969, 279-303.
- [2]. SEGEL, L. A. *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 38, part 1, 1969, 203-224.
- [3]. AASARAAI, A. *Analytic solution for Newell-Whitehead-Segel equation by differential transform method*. Middle-East Journal of Scientific Research, Vol. 10 (2), 2011, 270-273.
- [4]. PUE-ON, P. *Laplace Adomian decomposition method for solving Newell-Whitehead-Segel equation*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, 6593-6600.
- [5]. JASSIM, H. K. *Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for Newell-Whitehead-Segel equation*. Int. J. Adv. Appl. Math. And Mech., Vol. 2, 2015, 8-12.
- [6]. MAHGOUB, M. M. A. ;SEDEEG, A. K. H. *On the solution of Newell-Whitehead-Segel equation*. American Journal of Mathematical and Computer Modelling, Vol. 1, 2016, 21-24.
- [7]. SOORI, M. *The variational iteration method for the Newell-Whitehead-Segel equation*, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran.2016.

- [8]. PRAKASH, A. ;KUMAR, M. *He's variational iteration method for the solution of nonlinear Newell-Whitehead-Segel equation*. Journal of Applied Analysis and Computation, Vol. 6, 2016, 738-748.
- [9]. MAHGOUB, M. M. A. *Homotopy perturbation method for solving Newell-Whitehead-Segel equation*. Advances in Theoretical and Applied Mathematics, Vol. 11, 2016, 399-406.
- [10]. MACIAS-DIAZ, J. E. ;RUIZ-RAMIREZ, J. *A non-standard symmetry-preserving method to compute bounded solutions of a generalized Newell-Whitehead-Segel equation*. ScienceDirect Applied Numerical Mathematics, Vol. 61, 2011, 630-640.
- [11]. ZAHRA, W. K. ;OUF, W. A. ;EL-AZAB, M. S. *Cubic B-spline collocation algorithm for the numerical solution of Newell-Whitehead-Segel type equations*. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 2, 2014, 81-100.
- [12]. PATADE, J. ;BHALEKAR, S. *Approximate analytical solution of Newell-Whitehead-Segel equation using a new iterative method*. World Journal of Modelling and Simulation, Vol. 11, 2015, 94-103.
- [13]. V. Daftardar-Gejji, H. Jafari. *An iterative method for solving nonlinear functional equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, **316**(2): 753–763.
- [14]. AKINLABI, G. O. ;EDEKI, S. O. *Perturbation iteration transform method for the solution of Newell-Whitehead-Segel model equations*. Journal of Mathematics and Statistics, 2017.
- [15]. Hoffman, J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. 2nd. Ed, United States Of America, 2001, 823.
- [16]. INAN, B. *A finite difference method for solving generalized FitzHugh-Nagumo equation*. American Institute of Physics, 2018, 020018/1-020018/8.
- [17]. HARIHARAN, G. *An efficient Legendre Wavelet-Based approximation method for a few Newell-Whitehead and Allen-Cahn equation*. Springer Science+Business Media, Vol. 247, 2014, 371-380.
- [18]. INAN, B. *A New Numerical Scheme for the Generalized Huxley Equation*. Bulletin of Mathematical Sciences and Applications Switzerland, Vol. 16, 2016, 105-111.