مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (2) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (2) 2019

إيجاد حلول تحليلية لمعادلة فيتزهوغ ناغومو المعممة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن والأمثال الثابتة

د. سامي انجرو *
د. رامز كروم **
ناديا ديب***

(تاريخ الإيداع 20 / 1 / 2019. قُبِل للنشر في 19 / 3 /2019)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث الى إيجاد مجموعة من الحلول التحليلية ذات موجة منعزلة لمعادلة فيتزهوغ ناغومو المعممة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن والأمثال الثابتة، باستخدام طريقة الدالة الأسية مع مشتق ريمان – ليوفيل الكسري المعدل، ومقارنة النتائج مع حلول الشكل الكلاسيكي لمعادلة فيتزهوغ ناغومو ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن، إذ نجد أن هذه الطريقة فعالة وسهلة التطبيق مع هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية: معادلة فيتزهوغ ناغومو – مشتق ريمان– ليوفيل الكسري المعدل – طريقة الدالة الأسية – معادلة تفاضلية ذات مشتق كسري.

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلّيّة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
**أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلّيّة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
***طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلّيّة العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

Finding Analytical Solutions for The Time-Fractional Generalized Fitzhugh - Nagumo Equation with Constant Coefficients

Dr. Sami Injrou*
Dr. Ramez Karoum **
Nadia Deeb***

(Received 20 / 1 / 2019. Accepted 19 / 3 /2019)

□ ABSTRACT □

In this paper, we aim to find a set of analytical soliton wave solutions for the time fractional generalized Fitzhugh - Nagumo Equation with constant coefficients, in the sense of modified Riemann - Liouville fractional derivative, by using the exp- function method. Comparing the results with these of classical form of the time fractional Fitzhugh - Nagumo equation. We found that this method is effective and easy to apply for this type of partial fractional nonlinear differential equations.

Keywords: Fitzhug - Nagumo equation – Modified Riemann - Liouville derivative – The Exp- function Method – Fractional order derivatives differential equations.

***Associate Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattaka , Syria.**
**** Associate Professor , Department of Mathematics , Faculty of Sciences , Tishreen University , Lattakia , Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يعد حساب التفاضل والتكامل الكسري (التحليل الكسري) من أحد مجالات الرياضيات النظرية الذي يتعامل مع التفاضل والتكامل برتب غير صحيحة، فهو يعد تعميماً لمفهومي التفاضل والتكامل التقليدي. ظهرت الفكرة عام 1695 برسالة أرسلها الباحث L'Hopital إلى Leibniz يسأله عن ملاحظة خاصة ببحثه المتعلق بحساب المشتق من الرتبة n وكان السؤال:" في $\frac{d^n f}{dx^n}$ ماذا يحدث اذا كانت $n = \frac{1}{2}$؟ ". كانت تلك اللحظة التي ولد فيها ما يعرف بالتفاضل الكسري [1]. درس العديد من علماء الرياضيات هذه المسألة منهم: Euler، Laplace، Fourier، Abel، وآخرون [2]، ثم تم إدخال تعريفات مختلفة للمشتقات الكسرية من قبل Cauchy، Caputo، Riemann، Liouville وآخرون. أصبح هذا الفرع من الرياضيات في العقود الثلاثة الأخيرة هدفاً للعديد من المؤتمرات التخصصية والبحوث الجامعية، إذ نظمت جامعة New Haven في عام 1974 أول مؤتمر عن حساب التفاضل والتكامل الكسري وتطبيقاته. ظل حساب التفاضل والتكامل الكسري نظرياً حتى تم التعرف على المعادلات التفاضلية الكسرية التي تعد نماذج للعديد من المسائل التطبيقية في علم الحياة [3،4،5]، والفيزياء (مرونة اللزوجة) [6] والهيدرولوجيا [7]. الميزة الأكثر أهمية لاستخدام المعادلات التفاضلية الكسرية في هذه التطبيقات أنها غير محلية، هذا يعني أن الحالة التالية لا تعتمد على حالتها الحالية بل على جميع حالاتها السابقة وهو الاختلاف بينها وبين العامل التفاضلي برتبة صحيحة.

تعد معادلة فيتزهوغ ناغومو ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن إحدى هذه المعادلات وتعطى بالعلاقة الآتية:

$$D_t^{\alpha} u - u_{xx} - u(1-u)(u-\mu) = 0 \ ; t > 0 \, , 0 < \alpha < 1 \, , x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

قدم M. Merdan في عام 2012 حلول تقريبية لها بطريقة (the fractional variational iteration method) [8]، وفي عام 2013 تم حلها عددياً من قبل كل من G. Hariharan و R. Rajaraman بطريقة المويجة (the wavelet methods) [9]، ثم قام كل من Y.Pandir و Y.A.Tandogan في العام نفسه، بتقديم حلول دقيقة مستخدمين طريقة المعادلة التجريبية المعدلة (The modified trial equation method) [10]، ثم قام A. Bekir و آخرون في عام 2016 [11] بحلها تحليلياً بطريقة منشور−(G'/G) (The (G'/G) -expansion method)، وفي عام 2017 قدم A. Bekir وآخرون [12] حلول دقيقة لها بطريقة الدالة الأسية (The Exp- function method). سنحاول في هذا العمل إيجاد حلول دقيقة باستخدام طريقة الدالة الأسية لمعادلة فيتزهوغ ناغومو المعممة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن وذات الأمثال الثابتة التي تأخذ الشكل الآتي:

$$D_t^{\alpha} u + \beta u_x - \gamma u_{xx} - \delta u(1-u)(u-\mu) = 0 \ ; t > 0 \, , 0 < \alpha < 1 \, , x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

حيث β وγ وδ ثوابت حقيقية غير معدومة، مع الشرط الابتدائي:

$$u(x,0) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \qquad (3)$$

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تقديم حلول دقيقة ذات موجة منعزلة لمعادلة فيتزهوغ ناغومو المعممة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن وذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقة الدالة الأسية، فهو يعد في غاية الأهمية بالنسبة للباحثين، لأنه يقدم حلولاً صريحةً، إذ تلعب هذه الحلول دوراً كبيراً في فهم وتفسير العديد من الظواهر الفيزيائية والكيميائية وخاصة تلك التي تنشأ عن إزاحة غير خطية.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص في مجال التحليل الكسري والمعادلات التفاضلية ذات الاشتقاق الكسري، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حلّ المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطيّة ذات المشتق الكسري، وحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطيّة، وبرامج الحسابات الرياضية مثل Maple و Mathematica...

النتائج والمناقشة:

سنستعرض في البداية تعريف مشتق ريمان – ليوفيل الكسري المعدل وبعض خواصه التي سنستخدمها لاحقاً في طريقة إيجاد حلول المعادلة (2):

تعريف مشتق ريمان – ليوفيل الكسري المعدل [14,13]:

(Modified Riemann - Liouville fractional derivative)

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرفين على $\mathbb{R}$، بحيث يكونان مستمرين، لكن ليس من الضروري أن يكونا قابلين للاشتقاق من المرتبة الأولى، عندئذ يعطى مشتق ريمان–ليوفيل الكسري المعدل للتابع f من المرتبة α بالعلاقة الآتية:

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)]\, d\xi \;\; ; 0 < \alpha < 1 \,, t > 0 \qquad (4)$$

بعض خواص مشتق ريمان – ليوفيل الكسري المعدل [14,13]:

الخاصة الأولى:

$$D_t^{\alpha} t^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)} t^{p-\alpha} \qquad ; p > 0 \qquad (5)$$

الخاصة الثانية:

$$D_t^{\alpha}\big(cf(t)\big) = cD_t^{\alpha} f(t) \qquad ; c = constant \qquad (6)$$

الخاصة الثالثة:

$$D_t^{\alpha}\big(af(t) + bg(t)\big) = aD_t^{\alpha} f(t) + bD_t^{\alpha} g(t) \qquad ; a, b = constant \qquad (7)$$

الخاصة الرابعة:

$$D_t^{\alpha} c = 0 \qquad ; c = constant \qquad (8)$$

الخاصة الخامسة: إن قاعدة السلسلة (chain rule) غير محققة بالنسبة للمشتقات الكسرية، أي أن:

$$D_t^{\alpha} f \neq \frac{df}{d\xi} D_t^{\alpha} \xi$$

وبالتالي نعتبر:

$$D_t^{\alpha} f = {\sigma'}_t \frac{df}{d\xi} D_t^{\alpha} \xi \qquad (9)$$

حيث ${\sigma'}_t = l$ مع l ثابت غيرمعدوم [15].

طريقة الدالة الأسية:

نستعرض الآن طريقة الدالة الأسية التي وضعاها Li وHe في [16] في عام 2012، إذ قدما تحويل عقدي كسري (Fractional complex transform) لتحويل المعادلة التفاضلية الكسرية (ذات الاشتقاق الكسري) إلى معادلة تفاضلية عادية.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية، الآتية:

$$F\left(u, D_t^{\alpha}u, D_x^{\beta}u, D_t^{\alpha}D_t^{\alpha}u, D_t^{\alpha}D_x^{\beta}u, \dots\dots\right) = 0 \ ; 0 < \alpha, \beta \ < 1 \qquad (10)$$

حيث أن $u(x,t)$ الدالة المجهولة، و F كثيرة حدود تابعة لـ $u(x,t)$ ومشتقاتها الجزئية الكسرية.

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

الخطوة الأولى:

ليكن متحول الموجة الجوالة (The traveling wave variable) الآتي [16]:

$$u(x,t) = U(\xi) \quad ; \quad \xi = \frac{\tau\, x^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{\lambda\, t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (11)$$

حيث أن τ, λ ثابتان حقيقيان غير معدومين يتم تعيينهما لاحقاً.

باستخدام العلاقة (9)، نحصل على:

$$D_x^{\alpha} f = \sigma'_x \frac{df}{d\xi} D_x^{\alpha}\xi$$
$$D_t^{\alpha} f = \sigma'_t \frac{df}{d\xi} D_t^{\alpha}\xi \qquad (12)$$

حيث أن σ'_t و σ'_t ثابتان حقيقيان [17].

بتعويض (11) و(5) و(12) في (10)، تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية (10) الى معادلة تفاضلية عادية غير خطية بالنسبة لـ $U(\xi)$:

$$Q(U, U', U'', \dots\dots) = 0 \qquad (13)$$

حيث Q كثيرة حدود تابعة لـ $U(\xi)$ ومشتقاته.

الخطوة الثانية:

نفرض أن الحل الموجي $U(\xi)$ بالشكل الآتي [18]:

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=-c}^{d} a_i \exp(i\xi)}{\sum_{j=-p}^{q} b_j \exp(j\xi)} \qquad (14)$$

حيث أن d و c و q و p أعداد صحيحة موجبة تعين لاحقاً في سياق عملية الحل و a_i و b_j ثوابت مجهولة حيث $i = -c, \dots, d$ و $j = -p, \dots, q$. سنعيد الآن كتابة العلاقة (14) بالشكل الآتي:

$$U(\xi) = \frac{a_{-c}e^{-c\xi} + \dots + a_d e^{d\xi}}{b_{-c}e^{-p\xi} + \dots + b_q e^{q\xi}} \qquad (15)$$

الخطوة الثالثة:

تحدد الأعداد الصحيحة الموجبة p و c بموازنة الحد الخطي ذو المرتبة الأخفض في المعادلة (13) مع الحد غير الخطي ذو الدرجة الأخفض. وبالأسلوب نفسه، لتحديد الأعداد الصحيحة الموجبة q و d بموازنة الحد الخطي ذو المرتبة الأعلى في المعادلة (13) مع الحد غير الخطي ذو الدرجة الأعلى في المعادلة (13). بتعويض الحل (15)

في المعادلة (13)، نحصل على معادلة جبرية لقوى e^{ξ}، ثم بجعل أمثال قوى e^{ξ} تساوي الصفر، نحصل على جملة من المعادلات الجبرية غير الخطية، وبحلها باستخدام برامج حسابات رياضية صيغية مثل Maple و Mathematica ....، نحصل على الثوابت a_i و b_j حيث $i = -c\ , \ ....,\ d$ و $j = -p,....,q$، ثم نعوض قيمتها في الحل (15) لنحصل على حل المعادلة (13). [22-19]

حلول تحليلية ذات موجة منعزلة لمعادلة فيتزهوغ ناغومو المعممة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن والأمثال الثابتة:

لنأخذ التحويل الموجي الآتي:

$$u(x,t) = U(\xi)\ ;\ \ \xi = cx - \frac{\lambda\, t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{16}$$

حيث $c, \lambda\ \neq 0$ ثابتان. باستخدام الخواص (5) و(7) و(8) و(9)، نحصل على المشتق الكسري بالنسبة للزمن للتابع $u(x,t)$ كما يأتي:

$$D_t^{\alpha} u = \sigma'_t \frac{du}{d\xi} D_t^{\alpha}\xi = lU'\left(o - \frac{\lambda}{\Gamma(1+\alpha)} D_t^{\alpha} t^{\alpha}\right) = -l\lambda U' \tag{17}$$

باستخدام قاعدة السلسلة، نحصل على:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = c^2 U'' \tag{18}$$

بتعويض (17) و (18) في (2)، تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية (2) الى المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية الآتية:

$$(l\lambda - c\beta)\mathrm{U}' + \gamma C^2 U'' + \delta U(1-U)(U-\mu) = 0 \tag{19}$$

بموازنة التجانس بين الحد الخطي ذي المرتبة الأعلى U'' مع الحد غير الخطي ذي الدرجة الأعلى U^3، نحصل على:

$$U''(\xi) = \frac{c_3\ e^{(3p+c)\xi} + \cdots}{c_4\ e^{(4p)\xi} + \cdots} \tag{20}$$

$$U^3(\xi) = \frac{c_1\ e^{(3c)\xi} + \cdots}{c_2\ e^{(3p)\xi} + \cdots} = \frac{c_1\ e^{(3c+p)\xi} + \cdots}{c_2\ e^{(4p)\xi} + \cdots} \tag{21}$$

حيث c_i مع $i=1,2,3,4$، أمثال ثابتة معلومة، وضعت بهدف تبسيط العلاقة (15)، وبموازنة أعلى درجة للدالة الأسية في العلاقتين (20) و (21)، نحصل على:

$$3p + c\ =\ 3c + p \tag{22}$$

ومنه:

$$p\ =\ c \tag{23}$$

وبشكل مشابه نوازن أخفض درجة للدلة الأسية في العلاقتين الآتيتين:

$$U''(\xi) = \frac{....\ + d_1\ e^{-(3q+d)\xi}}{....\ + d_2\ e^{-(4q)\xi}} \tag{24}$$

$$U^3(\xi) = \frac{....\ + d_3\ e^{-(3d)\xi}}{....\ + d_4\ e^{-(3q)\xi}} = \frac{....\ + d_3\ e^{-(3d+q)\xi}}{....\ + d_4\ e^{-(4q)\xi}} \tag{25}$$

حيث d_i مع $i=1,2,3,4$، عوامل ثابتة معلومة، وضعت بهدف تبسيط العلاقة، بالتالي نحصل على:

$$-(3q + d\ )\ =\ -\ (\ 3d + q\ ) \tag{26}$$

ومنه:

$$q = d \tag{27}$$

يتبين من [18,23]، أن طبيعة الحلول مستقلة عن اختيار قيم p و q، هذا يعني أنه لدينا الحرية في اختيار الأعداد الصحيحة الموجبة p و q، لذلك سنضع $p = c = 1$ و $q = d = 1$، وبالتالي يأخذ الحل (15) الشكل الآتي:

$$U(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \tag{28}$$

بتعويض (28) في (19) وبإجراء بعض الحسابات نحصل على المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{C}\left[C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^{\xi} + C_0 + C_{-1} e^{-\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-3} e^{-3\xi}\right] = 0$$

حيث:

$$\begin{aligned}
C &= (b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + b_1 e^{\xi})^3 \\
C_3 &= \delta a_1^2 b_1 - \delta a_1^3 - \delta a_1 b_1^2 \mu + \delta a_1^2 \mu b_1 \\
C_2 &= \delta a_1^2 b_0 - 3\delta a_1^2 a_0 + \gamma c^2 a_0 b_1^2 + 2\delta a_1 b_1 a_0 - l\lambda a_0 b_1^2 + c\beta a_0 b_1^2 + \delta \mu a_1^2 b_0 \\
&\quad -\delta a_0 b_1^2 \mu + 2\delta a_1 a_0 \mu b_1 - 2\delta a_1 b_1 \mu b_0 - \gamma c^2 a_1 b_1 b_0 + l\lambda a_1 b_1 b_0 - c\beta a_1 b_1 b_0 \\
C_1 &= \delta a_1^2 b_{-1} - 3\delta a_1^2 a_{-1} - 3\delta a_1 a_0^2 + \delta a_0^2 b_1 + \gamma c^2 a_1 b_0^2 - 2l\lambda a_{-1} b_1^2 + 2c\beta a_{-1} b_1^2 \\
&\quad -\delta a_1 b_0^2 \mu + 4\gamma c^2 a_{-1} b_1^2 + 2\delta a_1 b_1 a_{-1} - \delta a_{-1} b_1^2 \mu + l\lambda a_1 b_0^2 - c\beta a_1 b_0^2 \\
&\quad +\delta a_1^2 b_{-1} \mu + \delta a_0^2 \mu b_1 + 2\delta a_1 b_0 a_0 - \gamma c^2 a_0 b_1 b_0 + 2\delta a_1 b_0 a_0 \mu \\
&\quad -4\gamma c^2 a_1 b_1 b_{-1} - 2\delta a_1 b_1 b_{-1} \mu - l\lambda a_0 b_1 b_0 + c\beta a_0 b_1 b_0 - 2\delta a_0 b_1 b_0 \mu \\
&\quad +2l\lambda a_1 b_1 b_{-1} - 2c\beta a_1 b_1 b_{-1} + 2\delta a_1 b_1 a_{-1} \mu \\
C_0 &= -\delta a_0^3 - \delta a_0 b_0^2 \mu + \delta a_0^2 \mu b_0 - 2\delta a_1 b_0 \mu b_{-1} + 2\delta a_1 a_0 \mu b_{-1} - 2\delta a_{-1} b_1 \mu b_0 \\
&\quad +2\delta a_1 b_0 a_{-1} + 2\delta a_1 b_{-1} a_0 + \delta a_0^2 b_0 + 3l\lambda a_1 b_0 b_{-1} - 3c\beta a_1 b_0 b_{-1} \\
&\quad -3l\lambda a_{-1} b_1 b_0 + 3c\beta a_{-1} b_1 b_0 + 3\gamma c^2 a_1 b_0 b_{-1} + 3\gamma c^2 a_{-1} b_0 b_1 \\
&\quad -6\gamma c^2 a_0 b_1 b_{-1} - 6\delta a_1 a_0 a_{-1} + 2\delta a_0 b_1 a_{-1} + 2\delta a_1 a_{-1} \mu b_0 \\
&\quad -2\delta a_0 b_1 \mu b_{-1} + 2\delta a_0 a_{-1} \mu b_1 \\
C_{-1} &= \delta a_0^2 b_{-1} - 3\delta a_{-1} a_0^2 - 3\delta a_1 a_{-1}^2 + \delta b_1 a_{-1}^2 - 2l\lambda a_{-1} b_1 b_{-1} + 2c\beta a_{-1} b_1 b_{-1} \\
&\quad +2\delta a_1 a_{-1} \mu b_{-1} + l\lambda a_0 b_{-1} b_0 - c\beta a_0 b_{-1} b_0 + 2\delta a_0 a_{-1} \mu b_0 \\
&\quad -\gamma c^2 a_0 b_0 b_{-1} - 2\delta a_{-1} b_1 \mu b_{-1} - 2\delta a_0 b_0 \mu b_{-1} - 4\gamma c^2 a_{-1} b_1 b_{-1} \\
&\quad +2l\lambda a_1 b_{-1}^2 - 2c\beta a_1 b_{-1}^2 - l\lambda a_{-1} b_0^2 + c\beta a_{-1} b_0^2 + \delta a_{-1}^2 \mu b_1 \\
&\quad +2\delta a_1 b_{-1} a_{-1} - \delta a_1 b_{-1}^2 \mu + 4\gamma c^2 a_1 b_{-1}^2 + \delta a_0^2 \mu b_{-1} + 2\delta a_0 b_0 a_{-1} \\
&\quad +\gamma c^2 a_{-1} b_0^2 - \delta a_{-1} b_0^2 \mu \\
C_{-2} &= -3\delta a_0 a_{-1}^2 + \delta b_0 a_{-1}^2 - 2\delta a_{-1} b_0 \mu b_{-1} + 2\delta a_0 a_{-1} \mu b_{-1} - \gamma c^2 a_{-1} b_0 b_{-1} \\
&\quad -l\lambda a_{-1} b_0 b_{-1} + c\beta a_{-1} b_0 b_{-1} + 2\delta a_0 b_{-1} a_{-1} - \delta a_0 b_{-1}^2 \mu + l\lambda a_0 b_{-1}^2 \\
&\quad -c\beta a_0 b_{-1}^2 + \delta a_{-1}^2 \mu b_0 + \gamma c^2 a_0 b_{-1}^2 \\
C_{-3} &= \delta a_{-1}^2 b_{-1} + \delta a_{-1}^2 b_{-1} \mu - \delta b_{-1}^2 a_{-1} \mu - \delta a_{-1}^3
\end{aligned}$$

بجعل:

$$C_3 = 0, C_2 = 0, C_1 = 0, C_0 = 0, C_{-1} = 0, C_{-2} = 0, C_{-3} = 0 \tag{29}$$

نحصل على جملة معادلات جبرية غير خطية بالنسبة للمجاهيل a_1 و a_0 و a_{-1} و b_1 و b_0 و b_{-1} و c و μ و λ، وبحل الجملة (29) باستخدام برنامج Maple، بهدف التبسيط نأخذ الترميزات:

$$v_1 = \sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta} \quad ، \quad v_2 = -b_{-1} + a_{-1}$$

$$v_3 = b_{-1}^2 - b_{-1} a_{-1} ، \quad v_4 = a_{-1}^2 - b_{-1}^2$$

$$v_5 = -b_1 + a_1 \quad ، \quad v_6 = b_1^2 - b_1 a_1$$
$$v_7 = b_1^2 - a_1^2 \; ، \; v_8 = \sqrt{-a_1 a_{-1}}$$

نحصل على الحالات الآتية:

حالة 1: إذا كان

$$c = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}(-b_{-1}+a_{-1})}{\gamma b_{-1}}, \mu = \frac{a_{-1}}{b_{-1}},$$
$$\lambda = \frac{1}{4}\frac{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_{-1}^2\beta}{\gamma} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_{-1}\beta a_{-1}}{\gamma} - \delta b_{-1}^2 + \delta a_{-1}^2}{l b_{-1}^2}, a_0 = 0, a_1 = b_1, b_0 = 0.$$

حيث b_{-1} و a_{-1} و a_1 ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_{-1} \neq 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1} e^{-\xi}}{a_1 e^{\xi} + b_{-1} e^{-\xi}}, \tag{30}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 v_2}{4\gamma b_{-1}} x + \frac{v_1 \beta v_3 - \delta\gamma v_4}{4 l \gamma b_{-1}^2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 2: إذا كان

$$c = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}(-b_1+a_1)}{\gamma b_1}, \mu = \frac{a_1}{b_1},$$
$$\lambda = \frac{1}{4}\frac{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_1^2\beta}{\gamma} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_1\beta a_1}{\gamma} - \delta a_1^2 + \delta b_1^2}{l b_1^2}, a_0 = 0, a_{-1} = b_{-1}, b_0 = 0.$$

حيث b_1 و a_1 و a_{-1} ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_1 \neq 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + a_{-1} e^{-\xi}}, \tag{31}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 v_5}{4\gamma b_1} x + \frac{v_1 \beta v_6 - \delta\gamma v_7}{4 l \gamma b_1^2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 3: إذا كان

$$c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}(-b_{-1}+a_{-1})}{\gamma b_{-1}}, \mu = \frac{a_{-1}}{b_{-1}},$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_{-1}^2\beta}{\gamma} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_{-1}\beta a_{-1}}{\gamma} + \delta a_{-1}^2 - \delta b_{-1}^2}{l b_{-1}^2}, a_0 = 0,$$
$$b_0 = \mp\frac{\sqrt{-a_1 a_{-1}}(-b_{-1} + a_{-1})}{a_{-1}}, b_1 = a_1.$$

حيث b_{-1} و a_{-1} و a_1 ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_{-1}, a_{-1} \neq 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1} e^{-\xi}}{a_1 e^{\xi} \mp \frac{v_8 v_2}{a_{-1}} + b_{-1} e^{-\xi}}, \tag{32}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 v_2}{2\gamma b_{-1}} x + \frac{v_1 \beta v_3 + \delta\gamma v_4}{2 l \gamma b_{-1}^2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 4: إذا كان

$$c = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}}{\gamma}, \mu = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \frac{1}{8}\frac{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}\beta}{\gamma} + 3\delta}{l}, a_0 = 0, b_{-1} = a_{-1}, b_0 = \mp\sqrt{-a_1 a_{-1}}, b_1 = 2a_1.$$

حيث a_{-1} و a_1 ثابتين اختياريين و $\gamma\delta > 0$ و $l \neq 0$ و $a_1 a_{-1} < 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1}e^{-\xi}}{2a_1 e^{\xi} \mp v_8 + a_{-1}e^{-\xi}}, \tag{33}$$

حيث $\xi = \frac{v_1}{4\gamma}x - \frac{2v_1\beta + 3\delta\gamma}{8l\gamma}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 5: إذا كان

$$c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}(-b_1 + a_1)}{\gamma b_1}, \mu = \frac{a_1}{b_1},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_1^2\beta}{\gamma} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}b_1\beta a_1}{\gamma} + \delta a_1^2 - \delta b_1^2}{l b_1^2}, a_0 = 0, b_{-1} = a_{-1},$$

$$b_0 = \mp\frac{\sqrt{-a_1 a_{-1}}(-b_1 + a_1)}{a_1}.$$

حيثa_{-1} و a_1 و b_1 ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_1, a_1 \neq 0$ و $a_1 a_{-1} < 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1}e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} \mp \frac{v_8 v_5}{a_1} + a_{-1}e^{-\xi}}, \tag{34}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 v_5}{2\gamma b_1}x + \frac{v_1\beta v_6 - \delta\gamma v_7}{2l\gamma b_1^2}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 6: إذا كان

$$c = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}}{\gamma}, \mu = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \frac{1}{8}\frac{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}\beta}{\gamma} - 3\delta}{l}, a_0 = 0, b_{-1} = 2a_{-1}, b_0 = \mp\sqrt{-a_1 a_{-1}}, b_1 = a_1.$$

حيث a_{-1} و a_1 ثابتين اختياريين و $\gamma\delta > 0$ و $l \neq 0$ و $a_1 a_{-1} < 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_{-1}e^{-\xi}}{a_1 e^{\xi} \mp v_8 + 2a_{-1}e^{-\xi}}, \tag{35}$$

حيث $\xi = \frac{v_1}{4\gamma}x - \frac{2v_1\beta - 3\delta\gamma}{8l\gamma}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 7: إذا كان

$$c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}a_1}{\gamma b_1}, \mu = \frac{a_1}{b_1},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{a_1(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}\beta b_1}{\gamma} + 2\delta b_1 - \delta a_1)}{l b_1^2}, a_0 = a_0, a_{-1} = 0, b_0 = \frac{a_1^2 b_{-1} + a_0^2 b_1}{a_1 a_0}.$$

حيث b_1 و a_1 و b_{-1} و a_0 ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_1, a_1, a_0 \neq 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_0}{b_1 e^{\xi} + \frac{a_1^2 b_{-1} + a_0^2 b_1}{a_1 a_0} + b_{-1} e^{-\xi}}\,, \tag{36}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 a_1}{2\gamma b_1} x - \frac{a_1(v_1 \beta b_1 + 2\delta b_1 - \delta a_1)}{2\gamma l b_1^2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

حالة 8: إذا كان $c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}a_{-1}}{\gamma b_{-1}}\,,\ \mu = \frac{a_{-1}}{b_{-1}}\,,$

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{a_{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma\delta}\beta b_{-1}}{\gamma} - 2\delta b_{-1} + \delta a_{-1}\right)}{l b_{-1}^2}, a_0 = a_0, a_1 = 0, b_0 = \frac{a_{-1}^2 b_1 + a_0^2 b_{-1}}{a_{-1} a_0}.$$

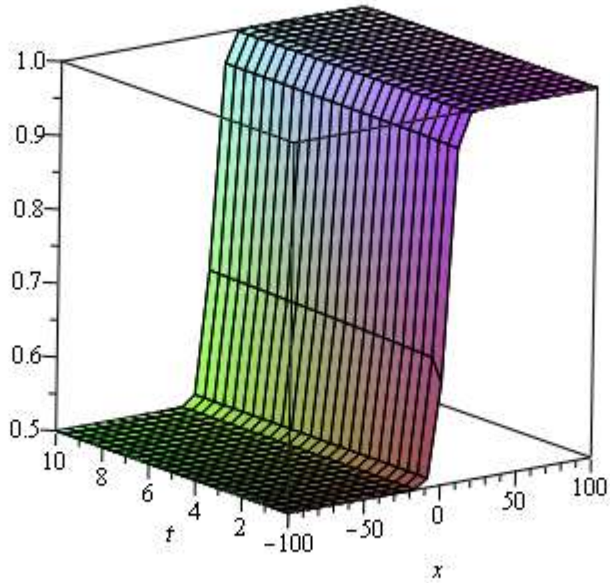
حيث a_{-1} و b_{-1} و b_1 و a_0 ثوابت اختيارية و $\gamma\delta > 0$ و $l, b_{-1}, a_{-1}, a_0 \neq 0$، وبالتعويض في (28) نحصل على حل ذات موجة منعزلة للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + \frac{a_{-1}^2 b_1 + a_0^2 b_{-1}}{a_{-1} a_0} + b_{-1} e^{-\xi}}\,, \tag{37}$$

حيث $\xi = \frac{v_1 a_{-1}}{2\gamma b_{-1}} x - \frac{a_{-1}(v_1 \beta b_{-1} - 2\delta b_{-1} + \delta a_{-1})}{2\gamma l b_{-1}^2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$.

في كل من الحالات(1,2,3,5,6)، بوضع $l = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 1$ نحصل على الحلول ذاتها الموجودة في المقالة [12] لمعادلة فيتزهوغ ناغومو ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن (1).

ويبين الشكل (1) شكل الحل (35) مع $a_1 = 1$، $a_{-1} = -1$، $\alpha = 0.5$، $\delta = 1$، $\gamma = 1$، $\beta = 1$، $l = 1$، ونلاحظ أن شكله عبارة عن موجة منعزلة، ولجميع الحلول البنية نفسها.



الشكل (1)

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد استطعنا في هذه المقالة الحصول على حلول تحليلية ذات موجة منعزلة لمعادلة فيتزهوغ ناغومو ذات الأمثال الثابتة والمشتق الكسري بالنسبة للزمن، وبينت النتائج التي حصلنا عليها أن هذه الحلول أكثر عمومية من تلك الحلول المقدمة في[12]، إذ قمنا بمقارنتها عندما تأخذ الأمثال قيم محددة، كما أظهرت قدرة طريقة الدالة الأسية على حل مثل هذا النوع من المعادلات. نشير في النهاية إلى أنّ الحسابات المتعلقة بهذا العمل جميعها تمت باستخدام برنامج Maple 13. وبناءً على النتائج الهامة التي قدمتها هذه الطريقة نوصي بأن يتم حلها بطريقة أخرى وإجراء المقارنة بين الحلول.

المراجع:

[1] DAS, S. *Functional fractional calculus*, Second, Scientific Publishing Services Pvt. Ltd. ,India, 2011, 612.

[2] NISHIMOTO, K. *An essence of Nishimoto's Fractional Calculus*. Descartes Press Co, 1991.

[3] AHMED, E; HASHISH, A.H; RIHAN, F.A. *On fractional order cancer model*. Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 3, No. 2, 2012, 1–6.

[4] ARAFA, A; RIDA, S; KHALIL, M. *Fractional modeling dynamics of hiv and cd4+ t-cells during primary infection*. Nonlinear Biomedical Physics, Vol. 3, No. 2, 2012, 1-7.

[5] XU, H. *Analytical approximations for a population growth model with fractional order*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, No. 5, 2009, 1978-1983.

[6] KOELLER, R.C. *Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, 1984, 229–307.

[7] BENSON, D.A; WHEATCRAFT, S.W; MEERSCHAERT M.M. *Application of a fractional advection dispersion equation*. Water Resources Research, Vol. 36, No. 6, 2000, 1403-1412.

[8] MERDAN, M. *Solutions of time-fractional reaction-diffusion equation with modified Riemann-Liouville derivative*, International Journal of Physical Sciences, Vol. 7, No. 15, 2012, 2317–2326.

[9] RAJARAMAN, R; HARIHARAN, G. *Two reliable wavelet methods to Fitzhugh–Nagumo (FN) and fractional FN equations. J Math Chem*, Vol. 51, *2013, 2432–2454.*

[10] PANDIR, Y; TANDOGAN, Y.A. *Exact solutions of the time-fractional Fitzhugh Nagumo equation*, AIP Conference Proceedings, 2013, 1558-1919.

[11] BEKIR, A; GUNER, O; UNSAL, O; MIRZAZADEH, M. *Applications of fractional complex transform and (G ′ /G)-expansion method for time fractional differential equations*. Journal of Applied Analysis and Computation, Vol. 6, No.1, 2016, 131-144.

[12] BEKIR, A; GUNER, O; CEVIKEL, A. *The Exp-function Method for some Time-fractional Differential Equations.J.Autom*. Journal of Automatica Sinica, Vol.4, No. 2, 2017, 315-321.

[13] JUMARIE, G. *Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results*. Computers and Mathematics with Applications, Vol. 51, No. 9−10, 2006, 1367−1376.

[14] JUMARIE, G. *Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions*. Applied Mathematics Letters, Vol. 22, No.3, 2009, 378−385.
[15] LIU, C. *Counterexamples on Jumarir's two- basic fractional calculus formulae*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 22, 2015, 92-94.
[16] HE, J. H; ELEGAN, S. K; LI, Z. B. *Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus*, Physics Letters A, Vol.376, No.4, 2012, 257−259.
[17] SAAD, M; ELAGAN, S. K; HAMED, Y. S; SAYED, M. *Using a complex transformation to get an exact solution for fractional generalized coupled MKDV and KDV equations*. International Journal of Basic & Applied Sciences, Vol. 13, No. 1, 2013, 23−25.
[18] HE, J. H; WU, X. H. *Exp-function method for nonlinear wave equations*. Chaos Solitons and Fractals, Vol.30, No.3, 2006, 700−708.
[19] HE, J. H; ABDOU, M. A. *New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method*, Chaos Solitons and Fractals, Vol. 34, No. 5, 2007, 1421−1429.
[20] EBAID, A. *Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via Exp-function method*. Physics Letters A, Vol.365, No.3, 2007, 213−219.
[21] KUTLUAY, S; ESEN, A. *Exp-function method for solving the general improved KdV equation*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, Vol. 10, No. 6, 2009, 717−725.
[22] BEKIR, A. *The Exp-function method for Ostrovsky equation*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, Vol. 10, No. 6, 2009, 735−739.
[23] AHMAD, H; MAHMOUDI, S. M. *Application of Exp - function Method to Fitzhugh - Nagumo Equation*, World Applied Sciences Journal , Vol. 9, No. 1, 2010, 113-117.