

حساب طاقة الارتباط للنوى ($^{12}\text{C}-^3\text{H}$) عن طريق إيجاد الحلول العددية لمعادلة فاديف من أجل قوى ثلاث نيكلونات

الدكتور حسن سلمان*

الدكتور تيسير معلا*

سامر سعيد**

تاريخ الإيداع 1 / 11 / 2007. قُبل للنشر في 30/4/2008

□ الملخص □

درسنا تأثير إدخال قوى ثلاثة نكلونات في حساب طاقة ارتباط التريتيوم والكربون-12، حيث أعطت قوة التفاعل بين نكليونين فقط قيمة لطاقة الارتباط أقل من القيمة التجريبية وهذا ما سمي بمشكلة انزياح الطاقة، أعطيت عدة تفسيرات لمعالجة هذه المشكلة، و سوف نوضح في مقالتنا هذه أن إدخال قوى ثلاثة نكلونات يعطي قيم طاقة الارتباط الصحيحة للتريتيوم والكربون-12.

لقد بدأنا باستخدام معادلات فاديف من أجل تشكيل فضاء لجملة ثلاثة جسيمات في تمثيل العزم الزاوي الكلي، وقمنا بحلها عددياً على مرحلتين: الأولى هي استيفاء التابع الموجي بطريقة الشرائح والثانية حل المعادلات الناتجة باستخدام تقنيات الجبر الخطي وذلك بطريقة لانكزوس من أجل الحصول على القيم الخاصة. في هذا البحث نعد نواة الكربون كحالة ارتباط لثلاثة نوى ألفا، أعطى هذا النموذج نتائج جيدة.

الكلمات المفتاحية: ليبمان-شوينغر - قوى ثلاثة جسيمات - طاقة ارتباط، الاستيفاء- طريقة الشرائح- طريقة لانكزوس

* أستاذ - قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية.

* أستاذ - قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية.

** طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية.

Calculating the Binding Energy of Nucleus (${}^3\text{H} - {}^{12}\text{C}$) by finding the Numerical Solutions of Faddeev's Equation, using Three Nucleon Forces

Dr. Hasan Salman *
Dr. Taiseir Moala **
Samer Sayid ***

(Received 1 / 11 / 2007. Accepted 30/4/2008)

□ ABSTRACT □

We investigate the effect of introducing the three nucleon forces on calculating the binding energy of Tritium and Carbon 12, where the two nucleon force has only assigned binding energy less value than the experimental one, and this is called the shifting energy problem. Many interpretations have been put forward to handle this problem. In this paper, we show that the introduction of three nucleon forces produces the correct binding energy of Tritium and Carbon-12. We start by using the Faddeev equations for forming a three-body system in configuration space in the total angular momentum representation, solving them by using numerical methods over two stages: the first is interpolating the unknown wave function by splint method; the second is using the linear algebra technique, which is called the Lanczos method for obtaining specific values. We consider the nuclei of carbon as a cluster of three nuclei of alpha, and this model has given positive results.

Keywords: Lippmann-Schwinger, three nucleon force, binding energy, interpolation, splint method, Lanczos method.

*Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

***Postgraduate Student, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

1- مقدمة :

تمت دراسة الخصائص النووية انطلاقاً من وضع عدة نماذج للتفاعل نيكلون- نيكلون وقد وجد اختلاف مع القيم التجريبية لطاقات الارتباط وخاصة للنوى حيث $N \geq 3$ فيما يعرف مشكلة الطاقة المنخفضة [1] حيث تم حساب طاقة الارتباط للتريتيوم ^3H بواسطة جهود تفاعل نيكلون-نيكلون [2] فوجد أنها أقل بحوالي $1.0-1.5 \text{ MeV}$ عن القيمة التجريبية 8.482 MeV - وكذلك وجد أن طاقة الارتباط للهيليوم ^4He [3] أقل من القيمة التجريبية بحوالي $2.0-4.0 \text{ MeV}$ ، و لقد تم تقديم عدة أفكار لتفسير هذا الاختلاف والذي يكبر مع زيادة العدد الكتلي للنواة وأهمها عدم أخذ التأثيرات النسبوية والتي بدورها تؤدي إلى زيادة بسيطة في طاقة الارتباط [4] حيث زادت طاقة ارتباط التريتيوم بمقدار 0.25 MeV والاقتراح الثاني هو وجود قوى تفاعل ثلاثة نيكلونات [5] وهي مختلفة عن قوى تفاعل نيكلونين وسنتحرى في هذه الدراسة عن تأثير هذه القوى في حساب طاقات الارتباط ومدى التقارب مع القيم التجريبية من أجل نواة التريتيوم والكربون ^{12}C .

إن الأساس النظري لوجود هذه القوى يعتمد على أن النيكلون هو جسيم ذو بنية داخلية ومؤلف من ثلاثة كواركات تتفاعل فيما بينها بقوى الكهرومغناطيسية وقوى التفاعل الشديد ومنه فإن فكرة وجود قوى ثلاثة نيكلونات يعني أنه عند تفاعل نيكلونين فإنه يغير من طبيعته التفاعل مع النيكلون الثالث وكمثال على وجود قوى ثلاثة جسيمات هي منظومة الأرض و القمر وقمر صناعي، و نحن من حيث المبدأ نستطيع وصف هذه الجملة بأخذ التفاعل الثنائي بين كل جسيمين وذلك بافتراض أن الأرض والقمر هي أجسام ليس لها بنية داخلية، ولكننا نعرف أن جاذبية القمر تؤثر على الكتلة المائية للأرض بشكل مختلف وهذا ما يؤدي إلى أمواج المد والجزر والتي تغير من الحقل الثقالي للأرض الذي يراه القمر الصناعي لذلك كي نصف هذه المنظومة بشكل صحيح لا بد من اخذ قوى ثلاثة جسيمات ووجد في هذا المثال أن هذا الاختلاف صغير بحيث يمكن عده حد اضطراب للتفاعل بين الجسيمين ولكن في الحالة النووية لا يوجد هناك نظرية واضحة تحدد فيما إذا كان من الممكن عدّ القوى ثلاثة نيكلونات صغيرة بحيث يمكن عدها حد اضطراب أم لا مع انه في النظرية الحديثة للقوى النووية [6] وفق نظرية الحقل الكمومي الفعال واستخدام نظرية الاضطراب اللاتطبوقة Chiral Perturbation Theory فان قوى ثلاثة جسيمات ظهرت عند الحدود المرشدة ذات التقريب الثاني Next-To-Next Leading Order ويمكن تمثيل قوى ثلاثة جسيمات بالشكل التالي :



الشكل (1). التمثيل التخطيطي لقوى ثلاثة جسيمات.

يمثل الجزء الأيسر تبادل بيون بين النيكلونين 1,3 عن طريق النيكلون الثاني، وإمكانية أخرى في الشكل الأيمن حيث تتشكل حالة الإثارة Δ ويتبين هنا أن قوى ثلاثة جسيمات غير منفصلة أو غير قابلة للاختزال [7].

أولى المحاولات التي قدمت لحساب تأثير قوى ثلاثة جسيمات هي نموذج Fujita-Miyazawa الذي يعتمد على تبادل بيونين بين ثلاثة نيكلونات [8]، وكذلك نموذج Kievssky الذي يهتم بتفاعل سبين-مدار لثلاثة نيكلونات [9]، ونموذج Urbana-IX. والذي طور مع نموذج V18 لتفاعل نيكلون-نيكلون بالاعتماد على تبادل بيونين وفق حالة الإثارة المتوسطة Δ [10].

سنقوم في هذه الدراسة بالحل العددي لمعادلات فاديف Faddeev باستخدام قوى ثلاثة جسيمات من أجل حساب طاقة الارتباط لنواة التريتيوم والكربون ^{12}C ، أما طريقة الحل العددي المتبعة في هذه الدراسة فهي تجزئة المجال المدروس إلى عدة مناطق جزئية وتقريب التابع الموجي في كل منها باستخدام توابع خاصة وتعرف هذه الطريقة بـ Spline Method [11]. وقد تمت دراسة تقارب الحلول وهذا يشكل التحدي الأساسي في الدراسة العددية.

2- هدف وأهمية البحث:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد الحلول العددية لمعادلات فاديف من أجل قوى ثلاثة نيكلونيات، وذلك لإيجاد طاقة الارتباط لنواة التريتيوم ^3H ونواة الكربون ^{12}C .

3- دراسة نظرية:

في دراسة نظرية التبعثر لثلاثة جسيمات وفق معادلة شرودينغر تم استخدام معادلة ليمان وشوينغر [12] Lippmann- Schwinger ولكن هذه المعادلة تعطي عدة حلول ممكنة لنظام مؤلف من ثلاثة نيكلونيات لذلك تم حل هذه المشكلة باستخدام معادلات فاديف Faddeev والتي لها حل وحيد [12]. معادلة شرودينغر لنظام يوصف بالهاملتوني $H = H_0 + V$ هي:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = (H_0 + V) \Psi(t) \quad (1)$$

الحلول من أجل $V = 0$ هي التوابع من الشكل:

$$\begin{aligned} \Phi_i(t) &= \phi_i e^{-iE_i t} \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(t) &= H_0 \Phi_i(t) \\ \langle \phi_i | \phi_i \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

إن كمون التبعثر V ينقل الحالة البدائية Φ_i إلى الحالة النهائية Φ_f من خلال حالة التبعثر Ψ_j ولكن السؤال هنا هو كيف يمكن استنتاج توابع الحالة البدائية والنهائية من خلال حالة التبعثر Ψ_j والتي تعطى بالشكل [13]:

$$\Psi_j(t) = e^{-iH(t-T)} \Phi_j(T) \quad (3)$$

حيث $T \rightarrow -\infty$.

وبالاعتماد على المعادلة الرياضية التالية:

$$(4)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} f(t). \quad \text{نكتب:}$$

$$\Psi_j(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{-\infty}^0 dT e^{\epsilon T} e^{-iH(t-T)} \Phi_j(T) \quad (5)$$

والتي تؤدي إلى:

$$\Psi_j(t) = e^{-iHt} \frac{i\epsilon}{E_j - H + i\epsilon} \phi_j. \quad (6)$$

حيث

$$G \equiv \frac{i\epsilon}{E_j - H + i\epsilon}. \quad (7)$$

تابع غرين [14] (Green's Operator) يمكن كتابته بالشكل:

$$\frac{i\epsilon}{E_j - H + i\epsilon} = i\epsilon \frac{E_j - H_0 + V - V + i\epsilon}{E_j - H_0 + i\epsilon} \frac{1}{E_j - H + i\epsilon} \quad (8)$$

$$= \frac{i\epsilon}{E_j - H_0 + i\epsilon} + i\epsilon \frac{1}{E_j - H_0 + i\epsilon} V \frac{1}{E_j - H + i\epsilon}$$

ومنه فان معادلة Lippmann-Schwinger هي :

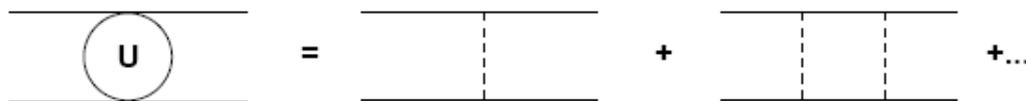
$$\Psi_j = \phi_j + \frac{1}{E_j - H_0 + i\epsilon} V \Psi_j \quad (9)$$

$$= \phi_j + G_0 V \Psi_j.$$

يمكن نشر هذه المعادلة بشكل مضطرب بالشكل التالي :

$$\Psi_j \approx \phi_j + G_0 V \phi_j + G_0 V G_0 V \phi_j + \dots \quad (10)$$

والتي توصف بالشكل التخطيطي التالي من اجل تفاعل نيكلونين [15] :

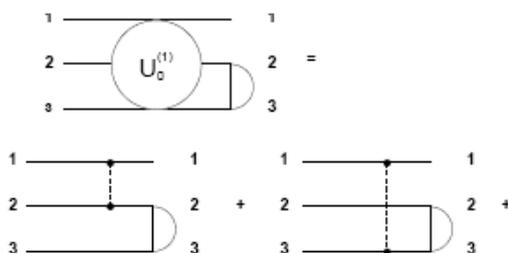


الشكل (2). الشكل التخطيطي لتفاعل نيكلونين.

U مؤثر الانتقال يعطى بالشكل :

$$\langle \phi_f | U | \phi_j \rangle \equiv \langle \phi_f | V | \Psi_j \rangle. \quad (11)$$

إن النشر في المعادلة (10) يسمى بسلسلة بورن او نيومان [16] Born or Neumann series وهي صالحة في الفيزياء الذرية والجزيئية حيث ثابت الارتباط للقوى الكهربائية ضعيف أي يمكننا أخذ الحدود الأولى من هذه السلسلة وإهمال الباقي ولكن في دراسة تبعثر ثلاث نيكلونات فان ثوابت الارتباط للقوى الشديدة [17] لا تسمح لنا بأخذ الحدود الأولى فقط من السلسلة لذلك ندرس التبعثر في الحالة النووية باستخدام معادلات فادييف Faddeev Equations والتي هي ثلاث معادلات مرتبطة من معادلات ليبمان ويمكن اشتقاقها بكتابة معادلة ليبمان لتبعثر ثلاثة نيكلونات في الحالة البدائية Φ_1 حيث النيكلون 1 في الحالة الحرة والنيكلونين 2, 3 في حالة الارتباط وفق سلسلة ليبمان :



الشكل (3). شكل تخطيطي لسلسلة ليبمان.

$$U_0^{(1)} \phi_1 = (V_3 + V_2 + V_1 G_0 V_3 + \dots) \phi_1 \quad \text{حيث:} \quad (12)$$

V_3 تقابل التفاعل بين النيكلونين 1,2 و V_1 التفاعل بين النيكلونين 2,3 و V_2 التفاعل بين النيكلونين 1,3 ، G_0 تابع غرين، المعادلة (12) يمكن كتابتها بالشكل :

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \\ & \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \right\} \\ & + \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \right\} \\ & + \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \right\} \end{aligned}$$

الشكل (4). التمثيل التخطيطي لتجميع سلسلة ليبمان وفق ثلاث مجموعات.

حيث تم تجميع المعادلة وفق ثلاث مجموعات كل منها جهد التفاعل بين نفس الجسيمين يظهر في كل الحدود لذلك نرسم إلى المجموعة الأولى بالرمز $U_0^{(1,3)}$:

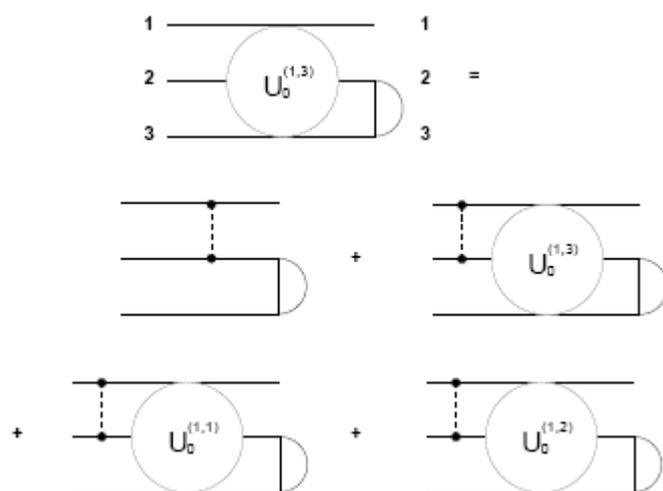
$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \\ & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \end{aligned}$$

الشكل (5). التمثيل التخطيطي للحد $U_0^{(1,3)}$.

المعادلة (12) نكتب عندئذ بالشكل :

$$U_0^{(1)} \phi_1 = (U_0^{(1,3)} + U_0^{(1,1)} + U_0^{(1,2)}) \phi_1. \quad (13)$$

المعادلة (13) يعاد كتابتها بسس .



الشكل (6). التمثيل التخطيطي للحد $U_0^{(1,3)}$.

أي:

$$U_0^{(1,3)} \phi_1 = V_3 \phi_1 + V_3 G_0 (U_0^{(1,1)} + U_0^{(1,2)} + U_0^{(1,3)}) \phi_1. \quad (14)$$

$$U_0^{(1,1)} \phi_1 = V_1 G_0 (U_0^{(1,1)} + U_0^{(1,2)} + U_0^{(1,3)}) \phi_1$$

ومنه فان معادلات Faddeev تقرأ بالشكل التالي:

$$U_0^{(1,3)} \phi_1 = t_3 \phi_1 + t_3 G_0 (U_0^{(1,1)} + U_0^{(1,2)}) \phi_1 \quad (15)$$

$$U_0^{(1,1)} \phi_1 = t_1 G_0 (U_0^{(1,3)} + U_0^{(1,2)}) \phi_1$$

$$U_0^{(1,2)} \phi_1 = t_2 \phi_1 + t_2 G_0 (U_0^{(1,3)} + U_0^{(1,1)}) \phi_1 \quad \text{حيث}$$

$$t_3 \equiv (1 - V_3 G_0)^{-1} V_3 \quad (16)$$

وبشكل مشابه لـ t_1, t_2 .

لإدخال قوى ثلاثة جسيمات نعيد كتابة معادلة شرودينغر بالشكل التالي :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} \left(\sum_{i=1}^3 V_i + V_4 \right) |\Psi\rangle \quad (17)$$

وبما أنَّ لدينا ثلاثة جسيمات متطابقة فان الجهد V_4 يجب أن يكون متناظراً لذلك نكتبه بالشكل :

$$V_4 = \sum_{i=1}^3 V_4^{(i)} \quad (18)$$

فمثلاً من أجل $i=1$ يكون V_4^1 متناظراً نتيجة تبديل الجسيمات 2, 3 والحدود الباقية تنتج بالتبديل الدوري ومنه

فان الجهد الكلي في المعادلة متناظر والمعادلة (17) تكتب بالشكل :

$$(19) |\Psi\rangle = G_0 \left(\sum_{i=1}^3 (V_i + V_4^{(i)}) \right) |\Psi\rangle$$

مركبات فاديف هي :

$$|\Psi_i\rangle = G_0 \left(\sum_{i=1}^3 (V_i + V_4^{(i)}) \right) |\Psi\rangle \quad (20)$$

حيث

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^3 |\Psi_i\rangle \quad (21)$$

بتعويض مركبات فاديف هذه في المعادلة (19) نجد

$$|\Psi_i\rangle = G_0 T_i \sum_{i \neq j} |\Psi_j\rangle \quad (22)$$

المؤثر T_i يحقق المعادلة التكاملية التالية :

$$T_i = (V_i + V_4^i) + (V_i + V_4^i) G_0 T_i \quad (23)$$

وبناء على الدراسات الحديثة [6] تبين أن قوى ثلاثة جسيمات تعد تصحيحاً للقوى الثنائية لذلك نكتب المعادلة

(23) بالشكل :

$$T_i \approx t_i + (1 + t_i G_0) V_4^{(i)} (1 + G_0 t_i) \quad (24)$$

التابع الموجي $|\Psi\rangle$ يجب أن يكون عكسي التناظر ومنه فان مركبات فاديف ترتبط بالشكل التالي :

$$|\Psi_2\rangle = P_{12} P_{23} |\Psi_1\rangle \quad (25)$$

$$|\Psi_3\rangle = P_{13} P_{23} |\Psi_1\rangle \quad (26)$$

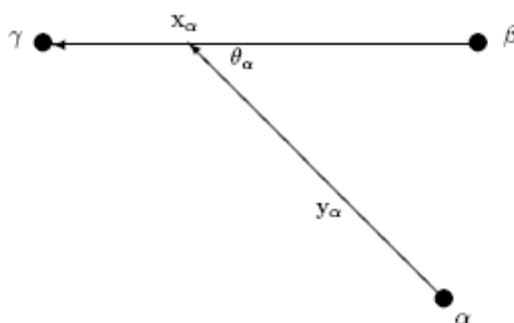
لذلك نحتاج إلى مركبة فاديف واحدة لوصف حالة الارتباط لثلاثة جسيمات :

$$|\Psi_1\rangle = G_0 T_1 (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}) |\Psi_1\rangle \quad (27)$$

4- الحلول العددية :

سنعدُّ نظاماً مؤلفاً من ثلاثة جسيمات هذه الجسيمات يمكن أن تكون نيكلونات مشكلة نواة التريتيوم أو ثلاث نوى ألفا مشكلة نواة الكربون C^{12} أو تبعثر البروتون بنواة O^{17} حيث تعد كل من نواة O^{16} والنترون الخارجي والبروتون نظاماً مؤلفاً من ثلاثة جسيمات [18].

سندرس هذا النظام في إحداثيات جاكوبي [19] المبينة في الشكل التالي حيث تصلح كل مجموعة مستقلة إحداثيات مناسبة لدراسة النظام $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ حيث $\alpha=1,2,3$:



الشكل (7). احداثيات جاكوبي.

كل من مجموعات إحداثيات جاكوبي ترتبط بالتحويل التالي :

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\beta\alpha}^{11} & S_{\beta\alpha}^{12} \\ S_{\beta\alpha}^{21} & S_{\beta\alpha}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} \quad (28)$$

العوامل $S_{\beta\alpha}^{ij}$ تعطى بالشكل :

$$S_{\beta\alpha}^{11} = \left(\frac{m_\beta m_\alpha}{(m_\alpha + m_\gamma)(m_\beta + m_\gamma)} \right)^{1/2} ;$$

$$S_{\beta\alpha}^{12} = (-1)^{\alpha-\beta} \text{sign}(\alpha - \beta) \left[\frac{m_\gamma (m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)}{(m_\alpha + m_\gamma)(m_\beta + m_\gamma)} \right]^{1/2}$$

$$S_{\beta\alpha}^{22} = S_{\beta\alpha}^{11} \text{ and } S_{\beta\alpha}^{21} = -S_{\beta\alpha}^{12}$$

سنضع أولاً معادلة شرودينغر من أجل قوى بين جسيمين ثم من أجل قوى بين ثلاثة جسيمات :

$$\left[-\nabla_{x_\alpha}^2 - \nabla_{y_\alpha}^2 + \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha^{(2N)}(x_\alpha) \right] \Psi_{3N}(x_\alpha, y_\alpha) = E_{3N} \Psi_{3N}(x_\alpha, y_\alpha).$$

(29)

 $V^{(2N)}$ تشير إلى التفاعل نيكلون-نيكلون .

لحل المعادلة السابقة عددياً ننشر التابع الموجي وفق مركبات Faddeev :

$$\Psi_{3N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}) \quad (30)$$

وبالتعويض في المعادلة (29) نحصل على مجموعة ثلاثية من المعادلات المترابطة ذات الستة أبعاد :

$$\left[H_0 + V_{\alpha}^{(2N)}(\mathbf{x}_{\alpha}) - E_{3N} \right] \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}) = -V_{\alpha}^{(2N)}(\mathbf{x}_{\alpha}) \left[\phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{y}_{\beta}) + \phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}_{\gamma}) \right] \quad (31)$$

وهي معادلات Faddeev في التمثيل الاحداثي وفي حال وجود قوى ثلاثة جسيمات :

$$\begin{aligned} & \left[H_0 + V_{\alpha}^{(2N)}(\mathbf{x}_{\alpha}) + V_{\alpha}^{(3N)} - E_{3N} \right] \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}, \mathbf{z}_{\alpha}) \\ & = - V_{\alpha}^{(2N)}(\mathbf{x}_{\alpha}) \left[\phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{y}_{\beta}, \mathbf{z}_{\beta}) + \phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}_{\gamma}, \mathbf{z}_{\gamma}) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

حيث $V_{\alpha}^{(3N)}$ يمثل تفاعل ثلاثة جسيمات .

إن حل هذه المعادلة ذات الستة أبعاد عددياً مستحيل، لذلك لابد من تخفيض أبعاد الفضاء المدرس والطريقة الأنسب هي العمل وفق تمثيل عزم الاندفاع الكلي ونستفيد كذلك من خصائص الجسيمات المتطابقة حيث نعد النيكولونات جسيمات متطابقة بعد إدخال مفهوم الايزوسبين .

ترتبط مركبات Faddeev نتيجة التطابق فيما بينها بالعلاقات التالية :

$$\phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{y}_{\beta}) = P^+ \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}) \quad (33)$$

(34)

$$\phi_{\gamma}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}_{\gamma}) = P^- \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}).$$

المؤثر P^{\pm} مؤثر النوعية والإشارة + أو - تدل على التدوير والتدوير العكسي ومنه تؤول معادلات Faddeev إلى الشكل :

$$\left[H_0 + (I + P^+ + P^-) V_{\alpha}^{(2N)}(\mathbf{x}_{\alpha}) + V_{\alpha}^{(3N)} - E_{3N} \right] \phi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{y}_{\alpha}) = 0 \quad (35)$$

حيث I مؤثر الوحدة .

سننشر الآن مركبات Faddeev بالشكل التالي [20] :

$$\phi_{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) = \sum_{L,m,n} \frac{\Phi^{Lmn}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})}{x_{\alpha}y_{\alpha}} D_{mn}^L(g) \quad (36)$$

حيث D_{mn}^L تابع فاينغر Weigner [21] و $g \in SO(3)$ تشير إلى إحداثيات الحركة الزاوية و z_{α} هي الزاوية:

$$z_{\alpha} = \frac{(x_{\alpha}, y_{\alpha})}{x_{\alpha}y_{\alpha}} = \cos(x_{\alpha}, y_{\alpha}) \quad (37)$$

الهاملتوني في هذا التمثيل يحسب بالشكل :

$$H_0^L = D^L(g^{-1})xyH_0\frac{1}{xy}D^L(g) \quad (38)$$

ومن أجل $L=0$ يأخذ الهاملتوني الشكل التالي :

$$H_0^0 = -\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha}^2} - \left(\frac{1}{x_{\alpha}^2} + \frac{1}{y_{\alpha}^2} \right) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} (1 - z_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \quad (39)$$

بتعويض هذه المعادلات في المعادلة (35) واستخدام خصائص التعامد لتتابع Wiener نجد

$$\left[H_0^0 + V^{2N}(x)(1 + P^+ + P^-) - E_{3N} \right] \Phi^0(x, y, z) = 0 \quad (40)$$

حيث :

$$P^+ \Phi^0(x, y, z) \equiv xy \left(\frac{\Phi^0(x^+, y^+, z^+)}{x^+y^+} \right)$$

$$P^- \Phi^0(x, y, z) \equiv xy \left(\frac{\Phi^0(x^-, y^-, z^-)}{x^-y^-} \right) \quad (41)$$

الإحداثيات $x^{\pm}(x, y, z), y^{\pm}(x, y, z)$ هي الإحداثيات الجديدة ولها الشكل الصريح التالي [3] :

$$\begin{aligned} x^{\pm}(x, y, z) &= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}xyz \right)^{1/2}, \\ y^{\pm}(x, y, z) &= \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}xyz \right)^{1/2}, \\ z^{\pm}(x, y, z) &= \frac{\pm \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 - \frac{1}{2}xyz}{x^{\pm}(x, y, z)y^{\pm}(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (42)$$

بحيث أن التابع الموجي للنظام يعطى بدلالة مركبات فاديف بالشكل :

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y, z) + xy \left(\frac{\phi(x^+, y^+, z^+)}{x^+ y^+} + \frac{\phi(x^-, y^-, z^-)}{x^- y^-} \right) \quad (43)$$

لكي نحصل على الحل العددي للمعادلة (40) نحولها أولاً إلى معادلة القيم الخاصة وذلك باستخدام طريقة Lanczos Spline Method [22] ومن ثم نحل المشكلة المصفوفية لاستنتاج القيم الخاصة باستخدام طريقة Payne [23] Method ، أدخلت طريقة spline لأول مرة في فيزياء تعدد الجسيمات من قبل Payne (1982) [24] لحل معادلات فاديف في التمثيل الاحداثي وتتألف هذه الطريقة من الخطوات التالية :

- 1- تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجالات جزئية بحيث تشكل شبكة .
- 2- كتابة التابع الموجي غير المعروف شكله التحليلي بواسطة توابع Spline في كل مجال جزئي .
- 3- تحقيق الشروط (46) عند عقد الشبكة .

يمكن توضيح هذه الطريقة بالشكل التالي لنفرض لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$a(x) f''(x) + b(x) f'(x) + c(x) f(x) = g(x) \quad (44)$$

ننشر التابع وفق توابع Spline بالشكل التالي :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{j=2n} a_j s_j(x) \quad (45)$$

بحيث تتحقق الشروط التالية [22] :

$$\begin{aligned} S(x_j) &= f(x_j) \\ S_{j+1}(x_{j+1}) &= S_j(x_{j+1}) \\ S'_{j+1}(x_{j+1}) &= S'_j(x_{j+1}) \\ S''_{j+1}(x_{j+1}) &= S''_j(x_{j+1}) \end{aligned} \quad (46)$$

نعوض المعادلة (45) في المعادلة (44) نجد :

$$\sum_{j=1}^{j=2N} a_j [(a(x_j) s''_j(x_j) + b(x_j) s'_j(x_j) + c(x_j) s_j(x_j))] = g(x_j) \quad (47)$$

مجموعة المعادلات السابقة يمكن أن توضع بالشكل المصفوفي :

$$MA = G$$

حيث a مصفوفة عوامل النشر والمصفوفة M لها الأبعاد $2N \times 2N$ وعناصرها هي :

$$a(x_i) s_j''(x_i) + b(x_i) s_j'(x_i) + c(x_i) s_j(x_i) \quad (48)$$

سنقوم هنا بحل المعادلة (40) بالأسلوب نفسه حيث سنعرف توابع Spline بالشكل التالي :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{lmn} c_{lmn} s_l(x) s_m(y) s_n(z) \quad (49)$$

توابع Spline المستخدمة هنا هي توابع هرميية من الدرجة الثالثة ، نعوض المعادلة (49) في المعادلة (40) نجد مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$\sum_{lmn=1}^{2N} C_{lmn} (H_{lmn}(x_i, y_i, z_i) + V_{lmn}(x_i, y_i, z_i)(1 + P^+ + P^-) - E^{3N} \hat{I}) = 0 \quad (50)$$

حيث I مصفوفة الوحدة ، سنكتب المعادلة السابقة بالشكل المختصر التالي :

$$\left[\hat{H}_0^0 + \hat{V}^{(2N)} (\hat{I} + P^+ + P^-) - E_{3N} \hat{I} \right] C = 0 \quad (51)$$

حيث C هي المصفوفة C_{lmn} في المعادلة (51) .

و للحصول على الحلول الخاصة سنعد E_{3N} عاملاً ونعيد كتابة المعادلة السابقة بالشكل :

$$-(\hat{H}_1 - E_0 \hat{I})^{-1} \hat{H}_2 C = \lambda (E_0) C, \quad (52)$$

حيث :

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0^0 + \hat{V}^{(2N)},$$

$$\hat{H}_2 = \hat{V}^{(2N)} (P^+ + P^-). \quad (53)$$

λ هي القيم الخاصة التي تقابل الطاقة E_0 .

إن التحدي الأساس في الحصول على حلول فيزيائية هي جعل الحلول متقاربة و تظهر هذه المشكلة لدينا في كون التفاعلات التي نأخذها تنافرية عند المسافات القصيرة والتي تؤدي إلى كثرة القيم الخاصة وهذا ما يعيق التقارب الذي نبتغيه لذلك ندخل التفاعل المعدل V_m بالشكل التالي :

$$\hat{H}_{negative} = \hat{H}_0 + 2\hat{V}_m + \hat{V}^{(2N)} [1 - (P^+ + P^-)] \quad (54)$$

و تصبح المشكلة الآن في إيجاد الحلول للمعادلة (40) هي إيجاد القيم الخاصة للمصفوفة التالية :

$$\hat{\chi}(\epsilon) = -(\hat{H}_0 + \hat{V}^{(2N)} + \hat{V}_m - \epsilon)^{-1}(\hat{V}_m - V^{2N} \hat{P}) \quad (55)$$

حيث ϵ القيم الخاصة .

ومن اجل قوى ثلاثة جسيمات :

$$\hat{\chi}(\epsilon) = -(\hat{H}_0 + \hat{V}^{(2N)} + \hat{V}^{3N} + \hat{V}_m - \epsilon)^{-1}(\hat{V}_m - \hat{V}^{(2N)} \hat{P}) \quad (56)$$

إن تابع الجهد V_m هو أي جهد يمثل التفاعل التنافري عند المسافات القصيرة والقيم الخاصة في المعادلتين (55-56) لا تعتمد على هذا الكمون لذلك نسميه الكمون المعدل .

الطريقة التي سوف نستخدمها هنا معرفة على أبعاد محددة في المكان حيث تمتد شبكة spline والتابع الموجي يمتد إلى اللانهاية لذلك سنتبع طريقة حد القطع Cut Off والتي تفترض أن جهد التفاعل يسعى إلى الصفر عند مسافة كافية هي من مرتبة النواة R وبعد ذلك التابع الموجي له الشكل المقارب لجسيم حر لذلك نقسم منطقة الدراسة إلى منطقتين منطقة داخلية (0 , R) ومنطقة خارجية (R , ∞) ونقسم المنطقة الداخلية إلى مجالات جزئية يكون عددها وطولها مهمين جدا في مقارنة شكل التابع الموجي الحقيقي ، استخدم Payne التوزيع التالي لعقد الشبكة [24] :

$$k_{i+1} - k_i = (1 + S_r)(k_i - k_{i-1}) \quad (57)$$

وسنستخدم في هذه الدراسة التوزيع التالي :

$$k_i = a + (b - a)f(i/N) \quad ; \quad N: \text{العدد الكلي للعقد} \quad (58)$$

حيث a,b بداية ونهاية المجال و S_r عدد نختاره بالتجريب والتابع $f(r)$ يعرف بالشكل :

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1 - e^{S_r r}}{1 - e^{S_r}} & \text{for } S_r \neq 0 \\ r & \text{for } S_r = 0 \end{cases} \quad (59)$$

نستفيد من هذا التوزيع في الحصول على نقاط كثيفة بالقرب من المبدأ حيث نعلم أن التابع الموجي عند المبدأ شديد التغير لذلك نحتاج إلى تصغير المسافة بين عقد الشبكة لمقاربة شكل التابع الموجي بشكل أدق . إذا فرضنا وجود سوية ارتباط واحدة من اجل كل نيكولونين فان مركبات Faddeev تحقق الشرط الحدي التالي :

$$\Phi^0(x, y, z) \sim \varphi_2(x) e^{-k_y y} + A(x, y, z) \frac{e^{-k_3(x^2+y^2)^{1/2}}}{(x^2 + y^2)^{1/4}} \quad (60)$$

يمثل الحد الأول أحد قنوات Faddeev الممثلة في جسيمين مترابطين والثالث حر والحد الثاني من المعادلة يمثل قناة يكون فيها الجسيمات الثلاثة في حالة حرة (Break up channel) وهو يتناقص بشكل أسرع بكثير من الحد الأول [22] لذلك من أجل المسافات الكبيرة R_x, R_y لدينا الشروط الحدية التالية :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi^0(x, y, z) \right|_{x=R_x} = -k_x \equiv i\sqrt{E_{2N}}, \quad (61)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \ln \Phi^0(x, y, z) \right|_{y=R_y} = -k_y.$$

لحل مشكلة القيم الخاصة للمصفوفات (55-56) نلجأ إلى طريقة [23] Lanczos والتي تنطلق من شعاع ذاتي تم انتقائه بشكل اختياري، وحساب الأشعة والقيم الذاتية باستخدام طريقة التكرار .

5- النتائج والمناقشة:

1- دراسة نواة التريتيوم ${}^3\text{H}$:

تعد هذه النواة مدخلاً جيداً في دراسة تأثير قوى ثلاثة جسيمات في تحديد طاقة الارتباط وسنقوم أولاً بحل المعادلات من أجل القوى بين جسيمين ومن ثم نعيد الحسابات من أجل القوى ثلاثة جسيمات .
من أجل القوى بين جسيمين سنستخدم التفاعل في الحالة S وفق الجهد Malfliet-Tjon المعطى بالشكل التالي [25] :

$$V^{(2N)}(r) = V_R \frac{\exp(-\mu_R r)}{r} - V_A \frac{\exp(-\mu_A r)}{r} \quad (62)$$

العوامل تعطى بالجدول التالي :

الجدول (1). قيم عوامل الجهد المأخوذ في هذه الدراسة

V_A [MeV·fm]	μ_A [fm^{-1}]	V_R [MeV·fm]	μ_R [fm^{-1}]
570.316	1.550	1438.4812	3.110
578.09	1.550	1458.05	3.110

هذا التفاعل مركب من جزأين تنافري V_R وتجاذبي V_A لتفاعل Yukawa . أما من أجل القوى ثلاثة جسيمات فنستخدم الجهد Urbana Ix بالشكل التالي [26] :

$$V^{(3N)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \sum_{cyc} \left[0.003 T_{\pi}^2(r_{12}) T_{\pi}^2(r_{23}) + 4.5 T_{\pi}(r_{12}) T_{\pi}(r_{23}) \left\{ \frac{1}{2} (3c_2^2 - 1) \right\} \right] \quad (63)$$

حيث:

$$T_{\pi}(r) = \frac{\exp(-0.7r)}{r} \left(1 + \frac{3}{0.7r} + \frac{3}{(0.7r)^2} \right) (1 - \exp(-2r^2))^2 \quad (64)$$

$$c_2 = \frac{(r_{12}^2 + r_{23}^2 - r_{31}^2)}{(2r_{12}r_{23})} = \cos(\theta_1).$$

الجمع يجري على التبدل الدائري للجسيمات 1,2,3 والإحداثيات r_{ij} تعني المسافة النسبية بين الجسيم i والجسيم

.j

تم إجراء الحسابات ببرنامج حاسوبي كتب بلغة البرمجة C [29]، وتتلخص النتائج بالجدول التالي :

الجدول (2). القيم المحسوبة في هذه الدراسة مقارنة مع القيم المحسوبة في دراسات أخرى.

Model	Ref[3-7]	Ref[15-10]	الدراسة
القوى بين جسيمين فقط	- 7.736	-7.73661	-7.7328
القوى بين جسيمين وثلاثة جسيمات	—	—	- 8.565

الوحدات بدلالة MeV و القيمة التجريبية هي MeV (- 8.482) [7] .

نلاحظ هنا تأثير القوى بين ثلاثة جسيمات في اقتراب قيمة الطاقة من القيمة التجريبية .

2-دراسة نواة الكربون ^{12}C :

سنعد نواة الكربون حالة ارتباط ثلاث نوى ألفا لذلك سنستخدم التفاعل α - α لوصف هذا النظام، وسنهتم فقط في

الحالة 0^+_1 والتفاعل الذي نستخدمه هو تفاعل Ali-Bodmer بالشكل التالي [27] :

$$V_{2\alpha}(r) = V_1 \exp(-\mu_1 r) - V_2 \exp(-\mu_2 r)^2 \quad (65)$$

الثابت :

الجدول (3) قيم عوامل الجهد المأخوذ في هذه الدراسة

V_1 [MeV·fm]	μ_1 [fm^{-1}]	V_2 [MeV·fm]	μ_2 [fm^{-1}]
500	0.7	130	0.475

إن التفاعل α - α غير كافي لوصف نواة الكربون لذلك سندخل التفاعل التجاذبي لثلاث نوى ألفا بالشكل :

$$V_{3\alpha}(x, y) = -V_1 \exp -(\rho/3.315)^2 \quad (66)$$

$$V_1=18.45 \text{ MeV.fm} \quad \text{و} \quad \rho = x^2/2 + 2/3y^2 \quad \text{حيث}$$

وكذلك تفاعل كولون بالشكل التالي [28] :

$$V^C = \frac{\eta}{x} + \frac{\eta}{x'} + \frac{\eta}{x''} \quad (67)$$

$$\eta = 4e^2/(\hbar^2/m_\alpha) \quad \text{حيث}$$

نلخص النتائج بالجدول التالي :

الجدول (4). القيم المحسوبة في هذه الدراسة مقارنة مع القيم المحسوبة في دراسات أخرى .

Model	Ref[13-15]	Ref[7-10]	الدراسة
ABdo	- 5.126 MeV	- 5.12209 MeV	- 5.133 MeV
ABdo+V ^{3α} +V ^C	- 7.283 MeV	—	- 7.295 MeV

القيمة التجريبية لطاقة ارتباط الكربون في السوية S_1^0 هي $7.27 \text{ MeV} - [15]$.

6- الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذه الدراسة العمل على التمثيل الاحداثي لمعادلات Faddeev وهذا له عدة مزايا أهمها: دراسة تفاعل كولون بشكل مباشر دون الحاجة إلى تعديل، وملائمة طريقة الحل العددي لهذا التمثيل بشكل انسب .
إن نشر مركبات Faddeev وفق تمثيل عزم الاندفاع الكلي أعطى حل أسهل لمشكلة التقارب والتي تظهر بشكل واضح في طريقة النشر وفق الأمواج الجزئية.
بينت هذه الدراسة مدى تأثير إدخال قوى ثلاثة جسيمات في تقريب النتائج من القيم التجريبية.
إن النموذج المقترح لنواة الكربون بكونها حالة ارتباط من ثلاث نوى ألفا، و المقترح في هذه الدراسة أعطى نتائج جيدة ومتوافقة مع التجربة وذلك بعد إدخال تفاعل كولون .
ونوصي بتطوير طريقة الحساب هذه لحساب السويات الطاقية الأعلى لكل من نواة التريتيوم والكربون .

المراجع:

- [1] NIELSEN, E. *Effects of new three body force in N-d scattering*. Nuclear Physics A. Vol. 689, 2001, 373-376.
- [2] GREINER, W. *Microscopic theory of the nucleus*, North Holland, Amsterdam, 1972.
- [3] GLOCKLE, W. *The Quantum Mechanical Few Body System*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [4] STADLER, A. *Relativistic Effects in the three nucleon problem*. Nuclear Physics A. Vol. 631, 1998, 152-169.
- [5] ERMISCH, K. *Investigation of effects beyond two body forces in three nucleon system*. Nuclear Physics A. Vol. 689, 2001, 337-340.
- [6] WEINBERG, S. *Nucleon Nucleon potential from an effective chiral lagrangian*. Phys. Lett B. Vol. 251, 1990, pp. 288.
- [7] PROCEEDINGS OF THE NINTH EUROPEAN CONFERENCE. *Few Body Problem in Physics*. 1984, Tbilisi, Georgia.
- [8] KAPLAN, D. SAVAGE, M. *Two nucleon system from effective field theory*. Nuclear Physics B. vol 534, 1998, pp. 329-355.
- [9] FRIES, D.C. *Quarks and nuclear forces*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [10] WALECK, A, DRIK, J. *Theoretical Nuclear and Sub nuclear Physics*. World Scientific. 2004.
- [11] TAO, P. *An Introduction To Computational Physics*. Cambridge university Press. 2006.
- [12] GREINER, W. *Nuclear Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [13] COTENHAM, N. *An Introduction To Nuclear Physics*. Cambridge Press University, 2006.
- [14] PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FEW BODY METHODE. 1985-China oct. 4-10.
- [15] STEELE, J. *Three nucleon system*. Nuclear Physics A. Vol. 645, 1999, 645- 439.
- [16] NIELSEN, E. *The three body problem with short range interaction*. Physics Reports. Vol. 347, 2001, 373-459.
- [17] NEMOTO, S. *N-D Scattering with a new three body force*. Nuclear Physics A. Vol.648, 2001, 539-541.
- [18] EISENBERG, J. *Nuclear Theory*. North Holland Amsterdam. Vol. 1, 1987.
- [19] NOGGA, A. *Triton binding energies for modern nn force*. Phys. Lett. B, Vol 409, 1997, 19-25.
- [20] TAYLOR, J. *Scattering Theory*. John Wiley & Sons, London. 1972.
- [21] EDMONDS, A. *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press . 1960.
- [22] SCHWEIZER, W. *Numerical quantum dynamics*. Kluwear academic publishers. 2002.
- [23] LANDAU, R. *Computational Physics*. John Wiley, 1997.
- [24] PAYNE, G. *Configuration space faddeev continuum calculation*. Phys Rev C. Vol 26. 1982, 4.
- [25] MALFLIT, R. *The effect of three nuclear force*. Nucl.Phys. A, Vol. 127, 1996, 161-169.
- [26] ZABOLITZKY, J. *Exact ground states of few body nuclei*. Phys Rev C. Vol 25, 1982,40-50.

- [27] FEDOROV, D. *Three body continuum coulomb problem and 3α structure of ^{12}C* . Physic letters B, Vol. 389, 1996, 631-636.
- [28] FILIKHIN, I. *$0+$ states of ^{12}c nucleous the faddeev calculation in configuration space*. Phys. G: Nucl. Vol. 31,2005, pp. 1207-1224.
- [29] PRESS, W. *Numerical Recipes in C*. Cambridge university Press. 1992.

حساب طاقة الارتباط للنوى ($^{12}\text{C}-^3\text{H}$) عن طريق إيجاد الحلول العددية

لمعادلة فاديف من أجل قوى ثلاث نيكلونات

سلمان، معلا، سعيد
